



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

**Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem**  
Villamosmérnöki és Informatikai Kar  
Egészségügyi mérnök szak

Rajnai Richárd

# **FOLYAMATSZABÁLYOZÁS PUPILLAREFLEX HÁZI**

BUDAPEST, 2022

# Tartalomjegyzék

|   |    |
|---|----|
| Paraméterek .....   | 3  |
| 1. Írja fel a felnyitott kör átviteli függvényét! .....   | 3  |
| 2. Rajzolja fel a rendszer hatásvázlatát!.....  | 4  |
| 3. Határozza meg a zárt rendszer átviteli függvényét és jellemezze a stabilitás szempontjából! A holtidő 3-ad rendű Pádé approximációval közelítse. Szimulálja a rendszer válaszát, ha a zavaró jel $1(t)$ szerint változik! .....            | 7  |
| 4. Vizsgálja meg a $K$ paraméter különböző értékeire $K = (2K, 3K, 4K)$ a rendszer minőségi jellemzőit a kimenet jellemzői alapján: túllövés mértéke, tranziens lecsengésének ideje, szabályozási idő! Értékelje a kapott eredményeket! ..... | 9  |
| 5. Vesse össze a 3. pontban kapott eredményeket azzal az esettel, ha a rendszer nem tartalmaz holtidőt ( $D = 0$ )! .....   | 12 |
| 6. Adja meg a rendszer $L_{ref}$ bemenő jele és $L_c$ kimenő jele alapján az állapotegyenlet-rendszer leírását! Adja meg az $A, B, C, D$ mátrixokat! .....  | 14 |
| 7. Szimulálja a rendszer működését az $L_{ref}$ referencia érték és $L_{dist}$ amplitúdójú $0.05\text{Hz}$ , $0.1\text{Hz}$ frekvenciájú $0$ Lumen középértékű zavarójel esetén Matlab segítségével!.....                                     | 15 |
| 8. Határozza meg a $K$ paraméter azon küszöbértékét, amelyre a rendszer még stabilis. Szimulálja a rendszer kimenetét! .....  | 20 |

## Paraméterek

| K    | $\tau$ [s] | D [s] | Ldist [mlumen] | Lref [mlumen] |
|------|------------|-------|----------------|---------------|
| 0,23 | 0,1        | 0,18  | 0,1            | 1,4           |

### 1. Írja fel a felnyitott kör átviteli függvényét!

A feladat szövegesen tartalmazza a felnyitott kör átviteli függvényének leírását:

*„A mérésekből megállapítható, hogy a pupilla reflex folyamatait tartalmazó rendszer átviteli függvénye  $G(s)$  ekvivalens egy  $K$  erősítési tényezőjű azonos azonos időállandójú elemeket tartalmazó három tárolós taggal, amely egy  $D$  késleltetést is tartalmaz. A három tárolós tag paramétereit a feladat kiírásban definiáljuk.”*

- Körerősítés:  $K$
- Egytárolós tag:  $\frac{1}{1+sT}$
- Egy háromtárolós tag azonos időállandókkal, megegyezik három darab azonos időállandójú egytárolós tag szorzatával
- Késleltetés Laplace transzformáltja:  $e^{-sT_h}$

Ebből az alábbi képletet kapjuk:

$$G(s) = \frac{K}{(1+s\tau)^3} * e^{-sD} = \frac{0,23}{(1+0,1s)^3} * e^{-0,18s}$$

## 2. Rajzolja fel a rendszer hatásvázlatát!

Hatvány felbontása összegekre:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(1 + s\tau)^3 = 1 + 3s\tau + 3(s\tau)^2 + (s\tau)^3 = 1 + 0,3s + 0,03s^2 + 0,001s^3$$

$$G(s) = \frac{K}{1 + 3\tau s + 3\tau^2 s^2 + \tau^3 s^3} * e^{-sD} = \frac{0,23}{1 + 0,3s + 0,03s^2 + 0,001s^3} * e^{-0,18s}$$

Rendszeregyenlet felírása majd kifejezése az  $s^3 Y$  csomópontra:

$$G(s) = \frac{Y}{U} = \frac{K}{1 + 3\tau s + 3\tau^2 s^2 + \tau^3 s^3} * e^{-sD}$$

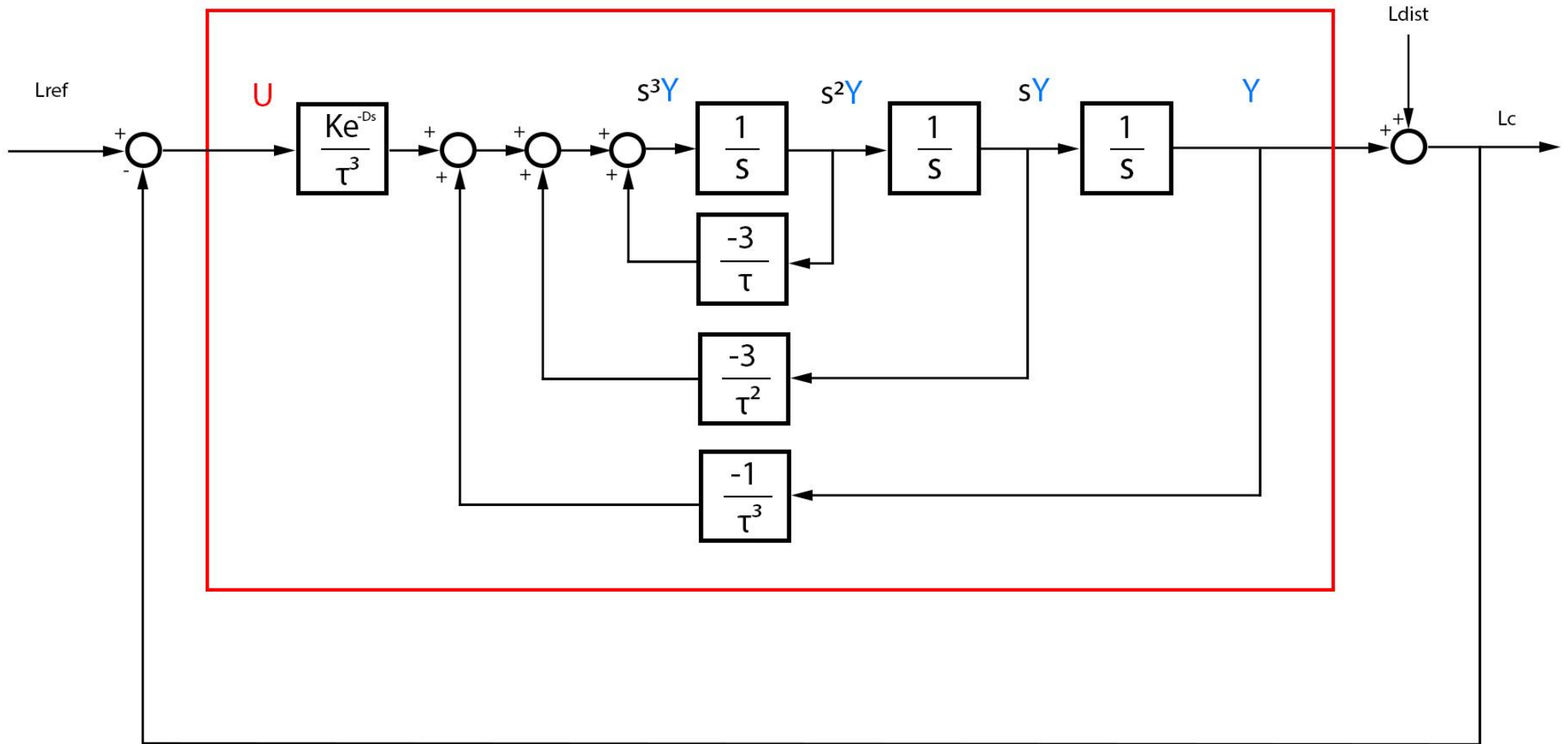
$$Y + 3\tau s Y + 3\tau^2 s^2 Y + \tau^3 s^3 Y = K e^{-sD} U$$

$$s^3 Y = \frac{K e^{-sD}}{\tau^3} U - \frac{1}{\tau^3} Y - \frac{3\tau}{\tau^3} (sY) - \frac{3\tau^2}{\tau^3} (s^2 Y)$$

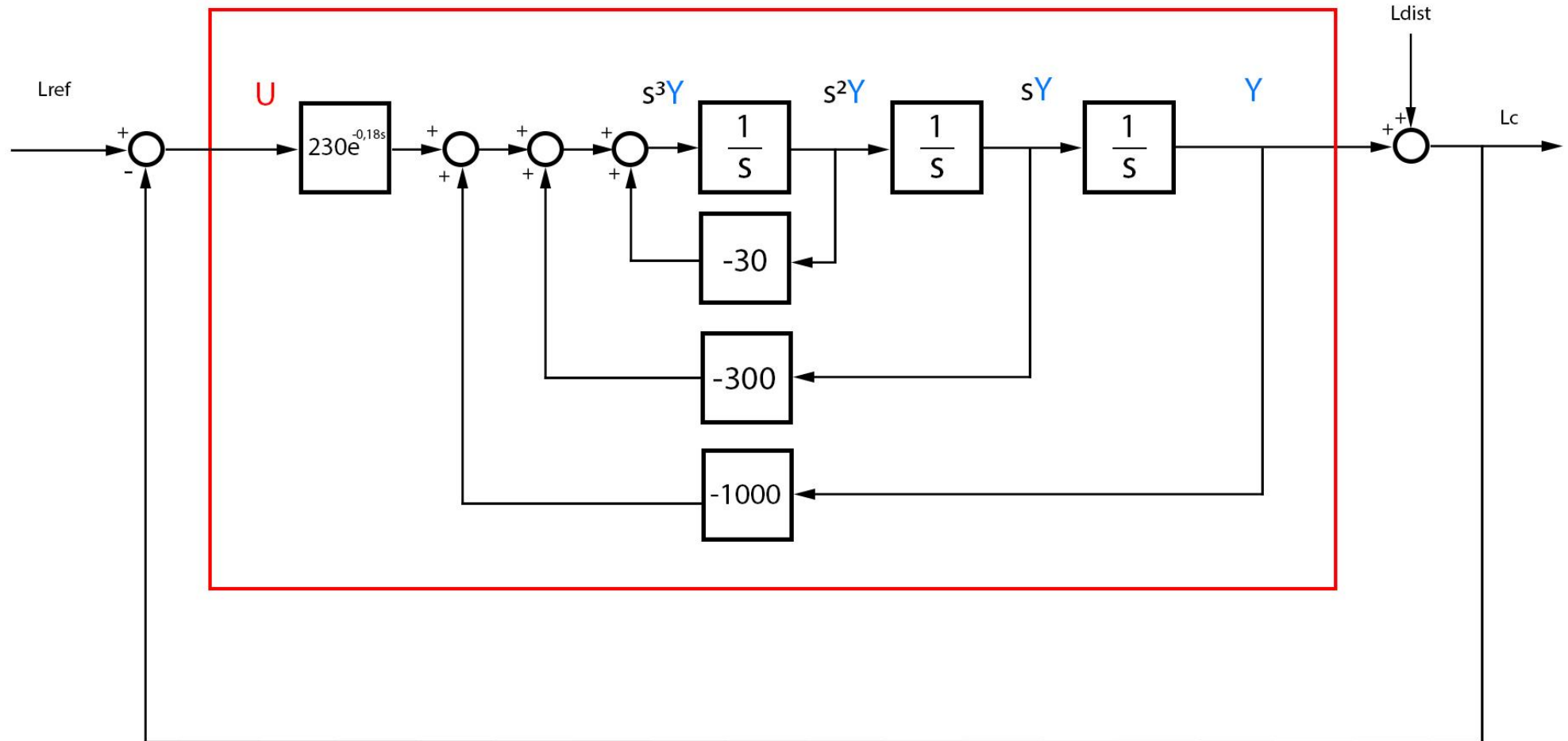
$$s^3 Y = \frac{K e^{-sD}}{\tau^3} U - \frac{1}{\tau^3} Y - \frac{3}{\tau^2} (sY) - \frac{3}{\tau} (s^2 Y)$$

A hatásvázlat egy lehetséges formája a következő oldalon látható. Ebben a megoldásban az integrátorok sorosan kapcsolódnak, azonban ha részlettörtekre bontjuk az átviteli függvényt akkor az integrátorok párhuzamos kapcsolású megoldása is megadható.

$G(s)$



$G(s)$



### 3. Határozza meg a zárt rendszer átviteli függvényét és jellemezze a stabilitás szempontjából! A holtidő 3-ad rendű Pádé approximációval közelítse. Szimulálja a rendszer választ, ha a zavaró jel $1(t)$ szerint változik!

A Pádé approximáció egy polinom/polinom alakú közelítést ad a függvényekre. Az  $e^x$  3-ad rendű közelítése levezetés nélkül:

$$e^{-sD} = \frac{120 - 60sD + 12s^2D^2 - s^3D^3}{120 + 60sD + 12s^2D^2 + s^3D^3} = \frac{120 - 10,8s + 0,3888s^2 - 0,00583s^3}{120 - 10,8s + 0,3888s^2 - 0,00583s^3}$$

(a MATLAB olyan alakban írja ki, hogy a legnagyobb s hatvány egyes szorzóval szerepeljen)

A felnyitott kör átviteli függvénye a közelítéssel:

$$G(s) = \frac{K}{(1 + s\tau)^3} * \frac{120 - 60sD + 12s^2D^2 - s^3D^3}{120 + 60sD + 12s^2D^2 + s^3D^3} =$$

$$= \frac{0,23}{(1 + 0,1s)^3} * \frac{120 - 10,8s + 0,3888s^2 - 0,00583s^3}{120 - 10,8s + 0,3888s^2 - 0,00583s^3}$$

A zárt rendszer átviteli függvénye:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

Egy rendszer gerjesztés-válasz stabilis, ha az átviteli függvény pólusainak a valós része 0-nál kisebb és az előző feltételek teljesülése mellett továbbá aszimptotikusan stabilis, ha biztosan tudjuk, hogy az átviteli függvény nem redukált.

A matlabbal kiíratam a pólusokat:

```
-27.0173 +11.7731i
-27.0173 -11.7731i
-17.1632 +18.8462i
-17.1632 -18.8462i
-4.1528 + 5.2536i
-4.1528 - 5.2536i
```

Ebből megállapítható, hogy a rendszer aszimptotikusan stabilis.

A rendszer válasza:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} U(s) + \frac{1}{1 + G(s)} U_{zavar}(s)$$

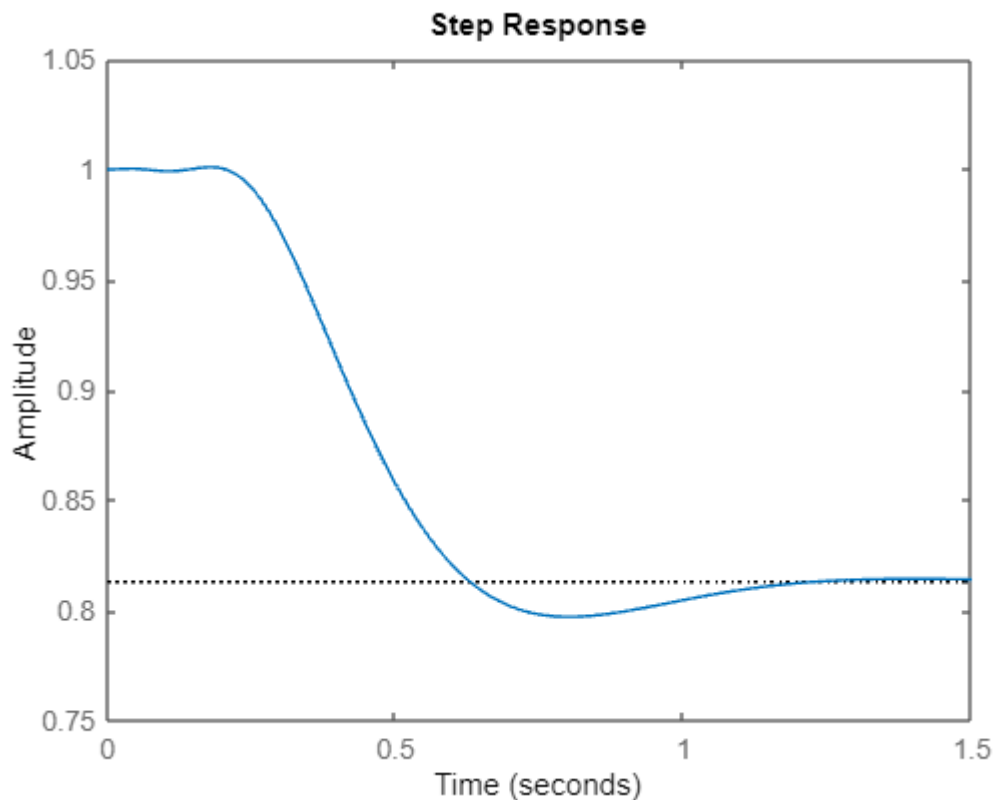
Ha  $U(t) = 0$  és  $U_{zavar}(t) = 1(t)$  akkor

$$Y(s) = \frac{1}{1 + G(s)} * \frac{1}{s}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{1 + G(s)} * \frac{1}{s} \right\}$$

Matlab megvalósítás:

```
K= 0.23;  
tau=0.1;  
D=0.18;  
[pade_num, pade_den]=pade(D,3);  
G =tf([K],[tau^3, 3*tau^2, 3*tau, 1])*tf([pade_num],[pade_den]);  
W = feedback(G,1) ;  
Wzaj = feedback(1,G) ;  
pole(W)  
step(Wzaj)
```



A zaj mértéke csökken, de nem nyomja el teljesen.



#### **4. Vizsgálja meg a K paraméter különböző értékeire $K = (2K, 3K, 4K)$ a rendszer minőségi jellemzőit a kimenet jellemzői alapján: túllövés mértéke, tranziens lecsengésének ideje, szabályozási idő! Értékelje a kapott eredményeket!**

Általánosan elmondható, hogy a körerősítés (K) növelésével a válaszjel felfutása gyorsabb lesz és a rendszer zajelnyomása nő, azonban a rendszer labilisabb irányba mozdul el. A túllövés mértéke megnő, lengő lesz a beállítás és később éri el a végleges értékét.

Túllövés (Overshoot): az állandósult állapot amplitúdójához képest mennyivel több a válaszjel maximális értéke a tranziens lecsengése közben

(pl.: ha az állandósult érték 1V de beállítás közben elérte az 1,5V-ot is akkor a túllövés mértéke 0,5V azaz 50%)

Tranziens lecsengésének ideje (Transient time): ha megváltoztatjuk a bemeneti jelet vagy valami új zavar érkezik akkor a kimeneten rövid időre átmeneti (tranziens) jelkomponensek jelennek meg és ez az az idő ami a rendszernek kell ahhoz, hogy beálljon az állandósult állapotba

Szabályozási idő (Settling time): az az időtartam amikor a kimenet már csak a megadott hibasávon belül változik

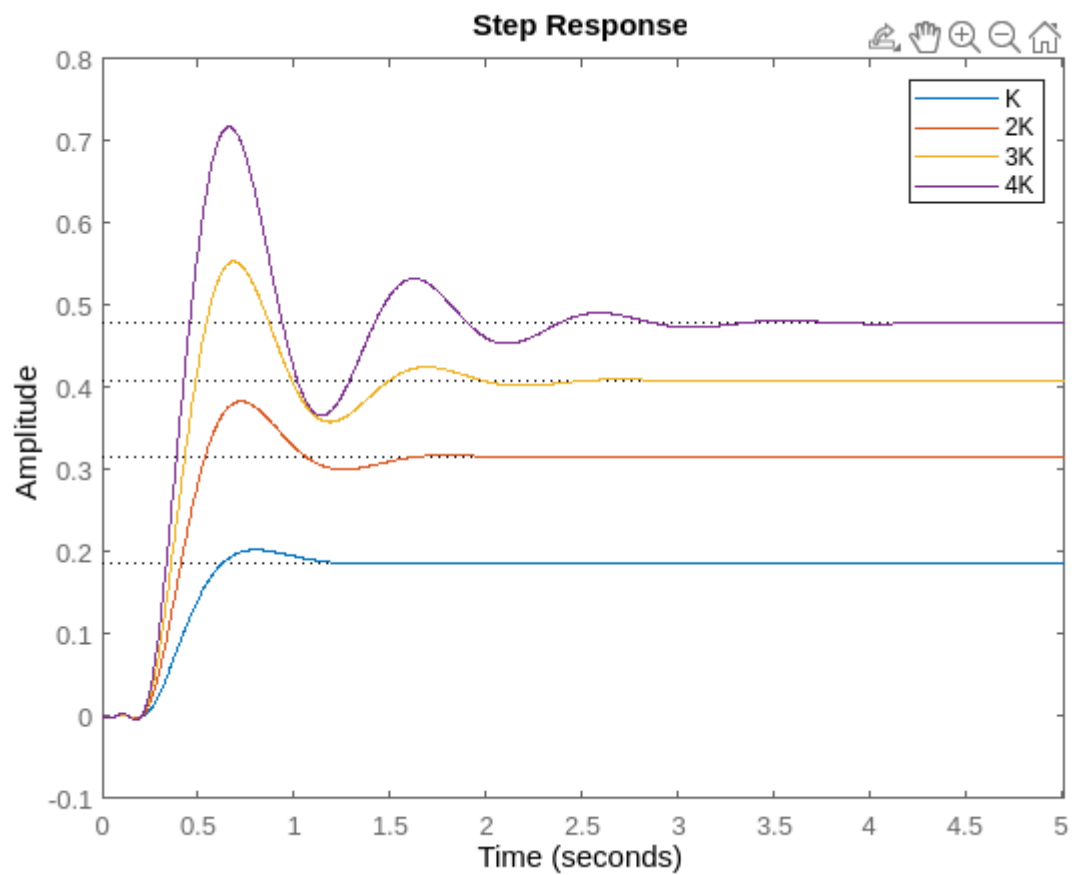
100%-os túllövés alatt a tranziens és a szabályozási idő gyakorlatilag megegyezik.

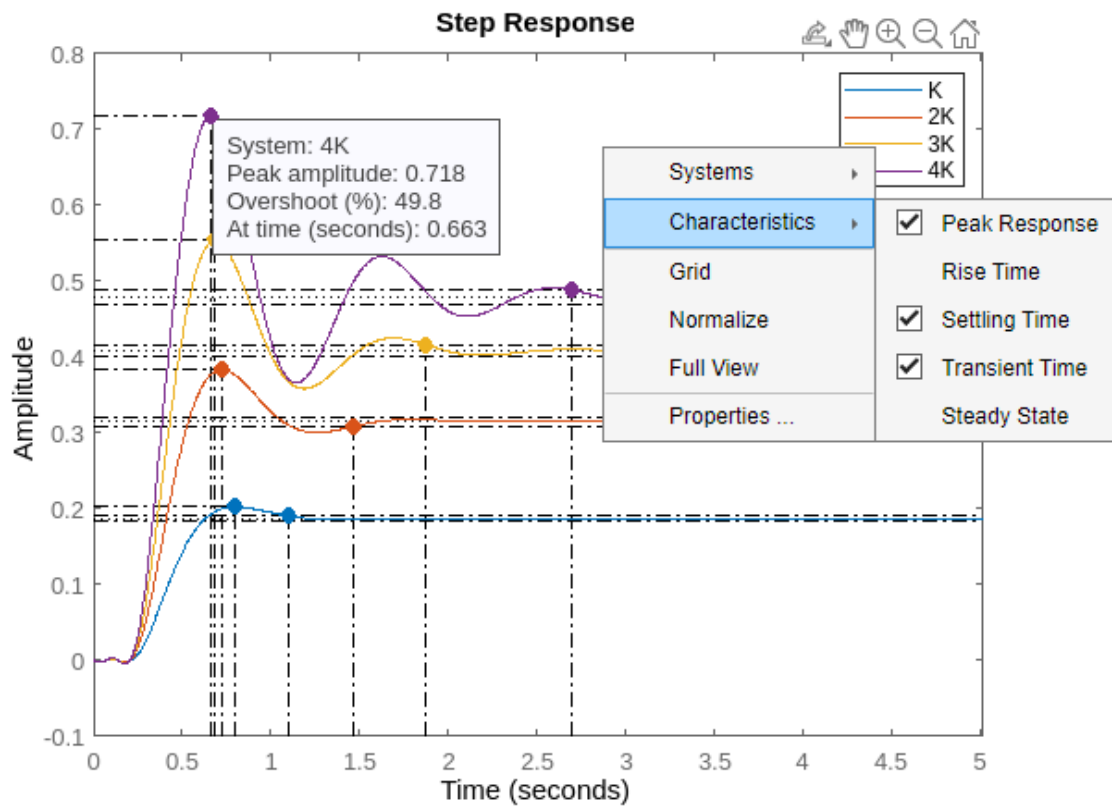
Matlabban az ábráról is le lehet olvasni az értékeket, jobb kattintással a felugró menüből kiválasztva bejelöli az adott helyet, ill. a stepinfo is kiírja.

|    | Túllövés | Tranziens idő | Szabályozási idő |
|----|----------|---------------|------------------|
| K  | 8,4913%  | 1,0969s       | 1,0974s          |
| 2K | 21,7053% | 1.4649s       | 1.4657s          |
| 3K | 35.6672% | 1.8751s       | 1.8759s          |
| 4K | 49.8061% | 2.6924s       | 2.6943s          |

Matlab megvalósítás:

```
K= 0.23;  
tau=0.1;  
D=0.18;  
[pade_num, pade_den]=pade(D,3);  
hold on  
for i=1:4  
G =tf([K*i],[tau^3, 3*tau^2, 3*tau, 1])* tf([pade_num],[pade_den]);  
W = feedback(G,1);  
step(W);  
stepinfo(W)  
end  
legend('K', '2K', '3K', '4K');  
hold off
```





A vártaknak megfelelően a legnagyobb körerősítéssel rendelkező (4K) rendszernek van a legnagyobb túllövése és lecsengési ideje.

## 5. Vesse össze a 3. pontban kapott eredményeket azzal az esettel, ha a rendszer nem tartalmaz holtidőt ( $D = 0$ )!

A felnyitott kör átvitele:

$$G(s) = \frac{K}{(1 + s\tau)^3}$$

A zárt rendszer átvitele:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\frac{K}{(1 + s\tau)^3}}{\frac{(1 + s\tau)^3 + K}{(1 + s\tau)^3}} = \frac{K}{(1 + s\tau)^3 + K}$$

A 3. pontban elmondottaknak megfelelően vizsgálom újra a rendszert holtidő nélkül.

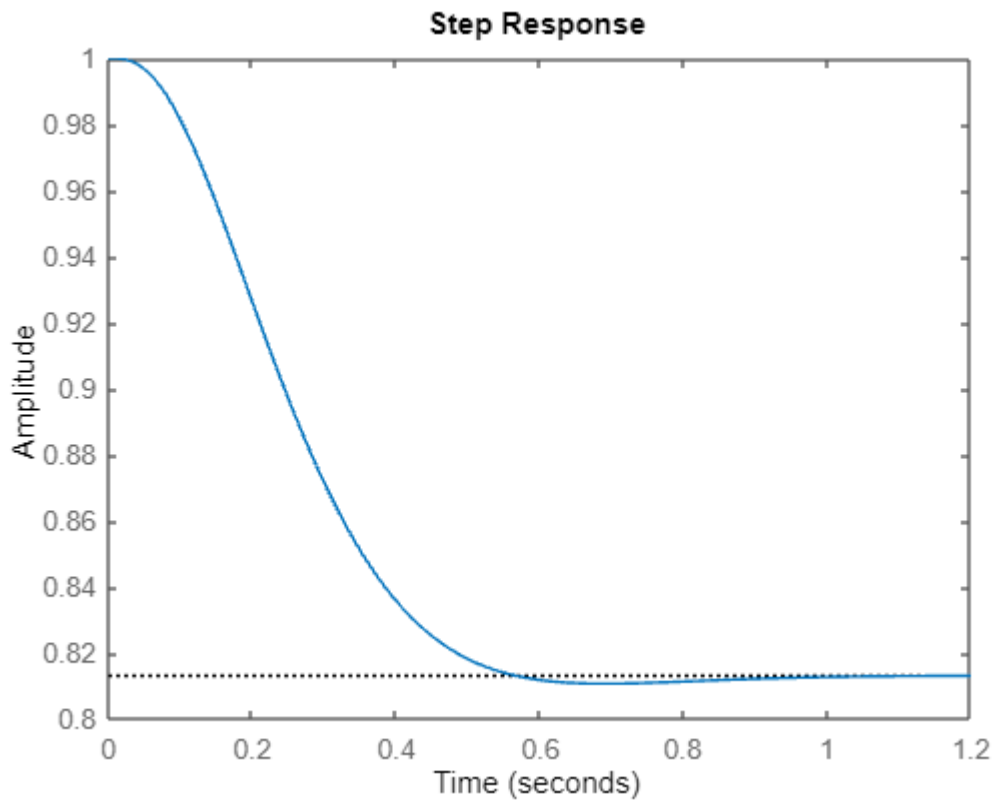
Pólusok:

-16.1269 + 0.0000i  
-6.9365 + 5.3061i  
-6.9365 - 5.3061i

Ebből megállapítható, hogy a rendszer aszimptotikusan stabilis.

Matlab megvalósítás:

```
K= 0.23;  
tau=0.1;  
D=0.18;  
G =tf([K],[tau^3, 3*tau^2, 3*tau, 1]) ;  
W = feedback(G,1);  
Wzaj = feedback(1,G);  
pole(W)  
step(Wzaj)
```



Megállapítható, hogy holtidó nélkül hamarabb lecseng a tranziens.

**6. Adja meg a rendszer Lref bemenő jele és Lc kimenő jele alapján az állapotegyenlet-rendszer leírását! Adja meg az A, B, C, D mátrixokat!**

Állapotváltozás leírás az idő tartományban:

$$x(t)' = Ax(t) + BU(t)$$

$$y(t) = C^T x(t) + DU(t)$$

$$\begin{bmatrix} x1' \\ x2' \\ x3' \\ x4' \\ x5' \\ x6' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -96.67 & -64.87 & -47.32 & -19.15 & -14.49 & -6.034 \\ 64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \\ x6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.05615 & 0.117 & -0.4062 & 0.5642 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \\ x6 \end{bmatrix} + 0U$$

Matlab megvalósítás:

```
K= 0.23;
tau=0.1;
D=0.18;
[pade_num, pade_den]=pade(D,3);
G =tf([K],[tau^3, 3*tau^2, 3*tau, 1])* tf([pade_num],[pade_den]);
W = feedback(G,1);
ss(W)
```

## 7. Szimulálja a rendszer működését az $L_{ref}$ referencia érték és $L_{dist}$ amplitúdójú 0.05Hz, 0.1Hz frekvenciájú 0 Lumen középértékű zavarójel esetén Matlab segítségével!

A bemenetet és a választ megadom  $f=0.05\text{Hz}$  esetre, az  $f=0.1\text{Hz}$  eset egyszerű helyettesítéssel megkapható.

Bemenet:

$$U(t) = L_{ref} * 1(t) = 1.4 * 1(t)$$

$$U_{zavar} = L_{dist} * \cos(\omega t) = 0.1 * \cos(2\pi * 0.05t)$$

A felnyitott kör átvitele:

$$G(s) = \frac{K}{(1 + s\tau)^3}$$

A rendszer válasza:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} U(s) + \frac{1}{1 + G(s)} U_{zavar}(s)$$

$$Y(s) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{1 + G(s)} * \frac{1.4}{s} + \frac{1}{1 + G(s)} * 0.1 * \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right\}$$

A válasz két komponens összegéből tevődik össze a gerjesztés és a zaj hatására. A gerjesztés által okozott komponens az átvitel és a gerjesztés Laplace transzformált szorzatának az inverz Laplace transzformáltjából kapom meg, a zaj által okozott komponens is megkapható hasonló módon.

Továbbá a szinuszos jelnél kézi számolásnál egyszerűbb ha fázor alakban felírjuk, az átvitelbe az adott frekvenciát behelyettesítjük és a két komplex számot összeszorozzuk. A kapott komplex számból a szinuszos alak újra felírható. Számítógépnek tökmindegy melyiket használjuk, a Laplace használata is teljesen jó.

Fázor alakban a zavar és a válasz:

$$U_{zavar} = L_{dist} * \cos(\omega t) = 0.1 * \cos(2\pi * 0.05t) = 0.1e^{j(2\pi*0.05t)}$$

$$Y(s) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{1 + G(s)} * \frac{1.4}{s} \right\} + \frac{1}{1 + G(j2\pi * 0.05t)} * 0.1e^{j(2\pi*0.05t)}$$

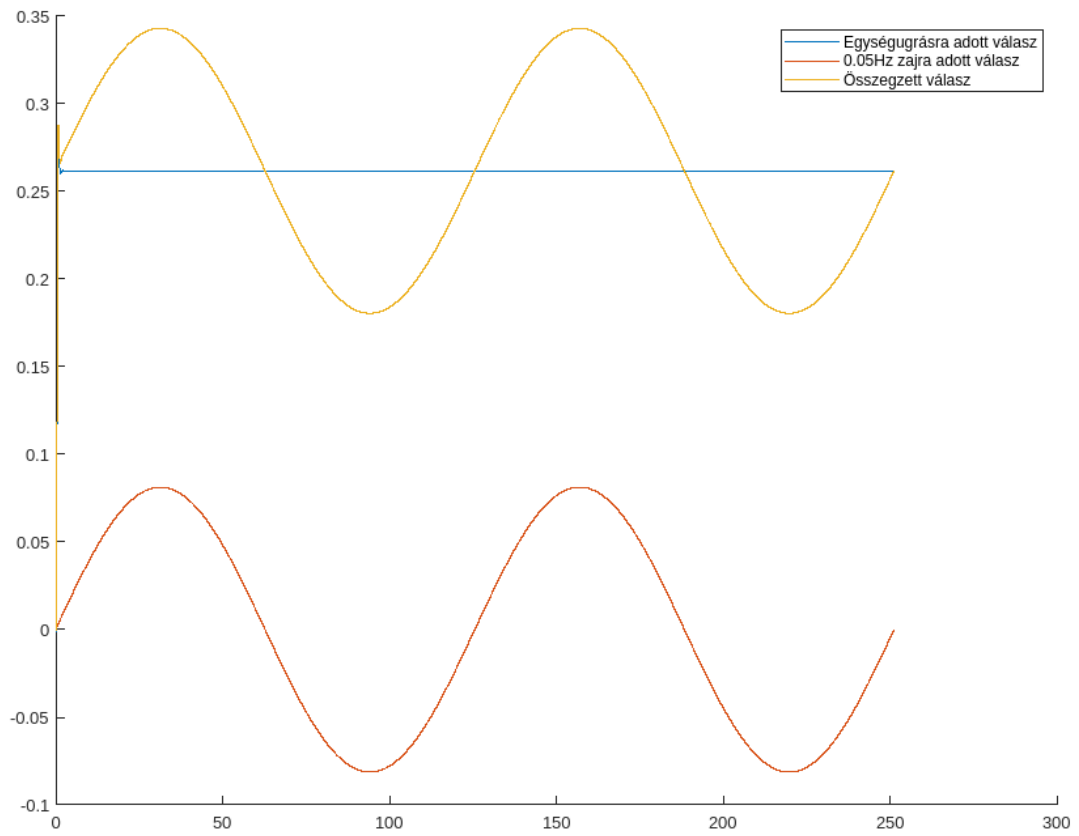
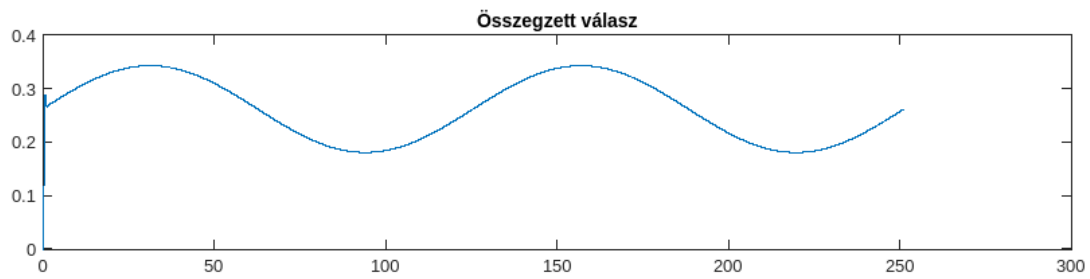
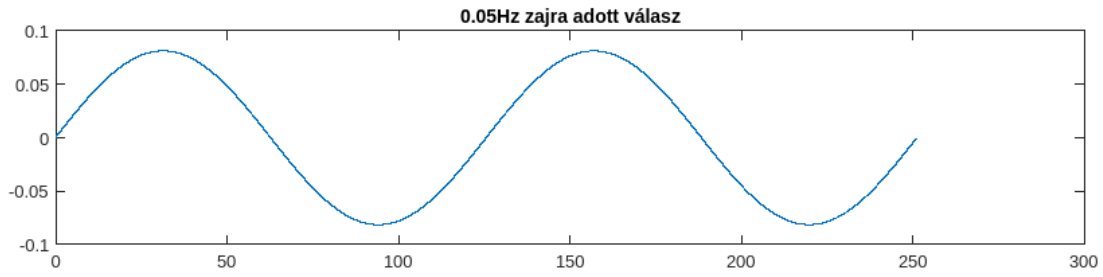
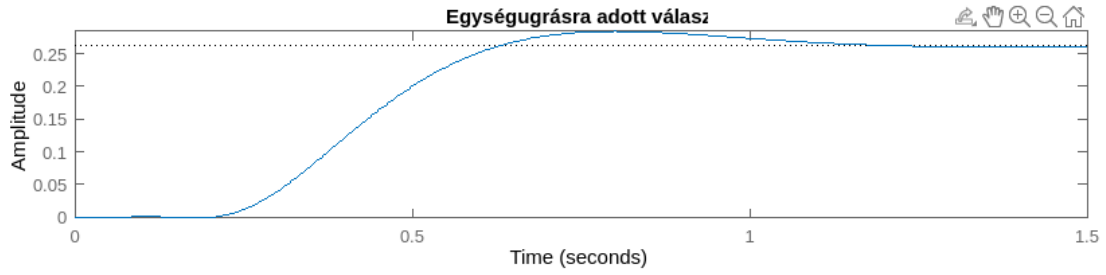
Matlab megvalósítás:

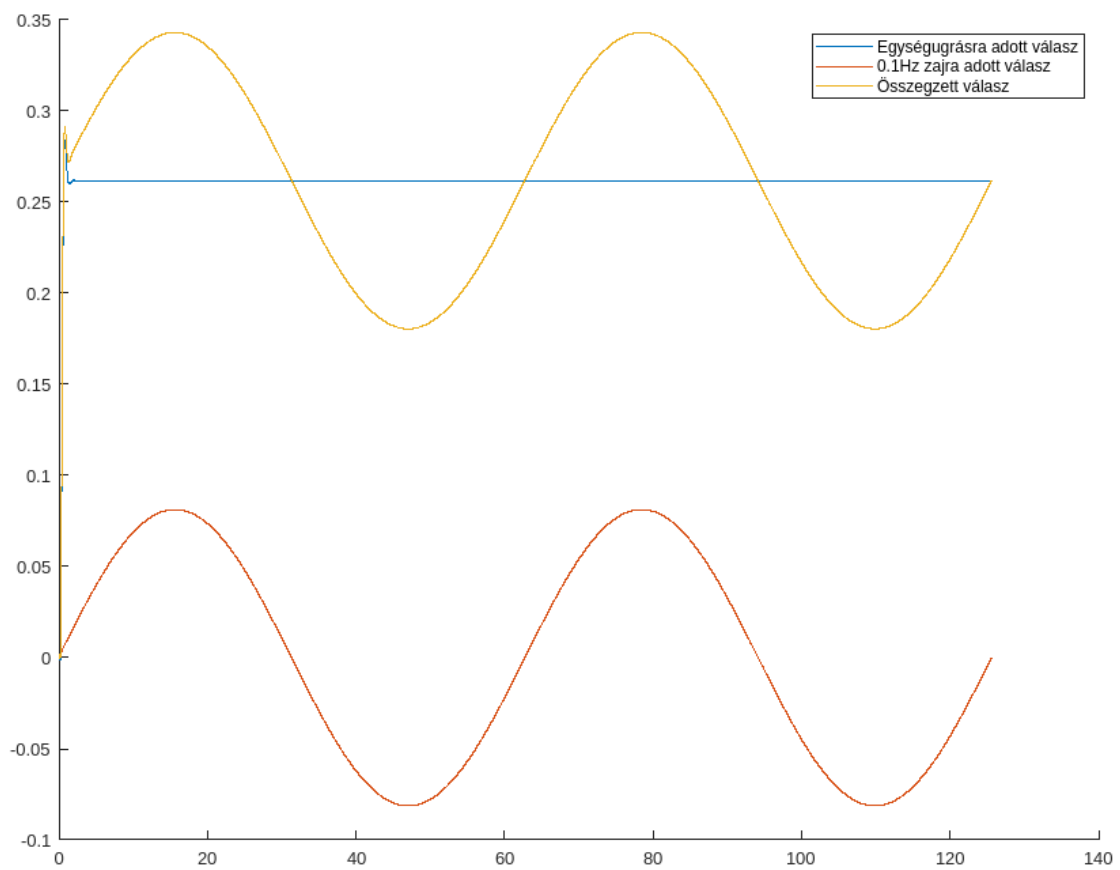
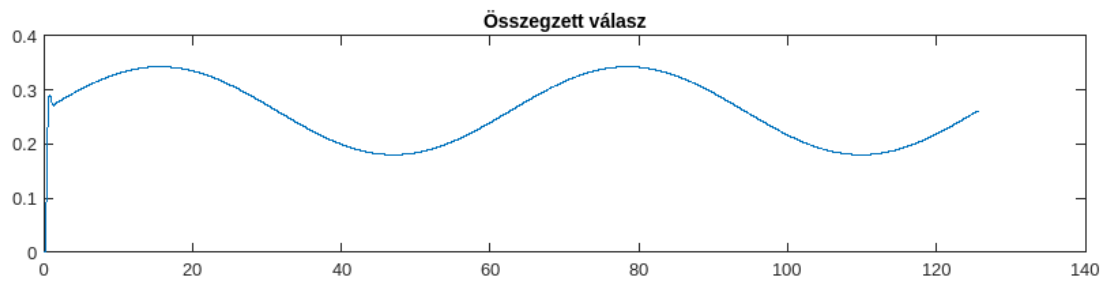
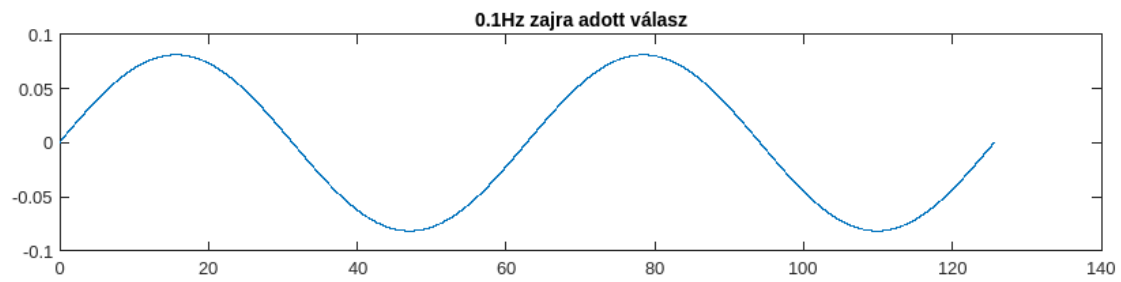
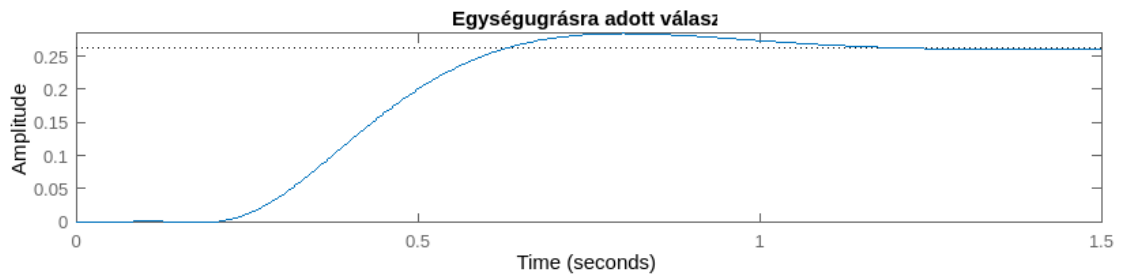
```
K= 0.23;
tau=0.1;
D=0.18;
Ldist=0.1;
Lref=1.4;
[pade_num, pade_den]=pade(D,3);
G =tf([K],[tau^3, 3*tau^2, 3*tau, 1])* tf([pade_num],[pade_den]);
W = feedback(G,1);
Wzaj = feedback(1,G);
f = [0.05 0.1];
opt = stepDataOptions('StepAmplitude',Lref);
```

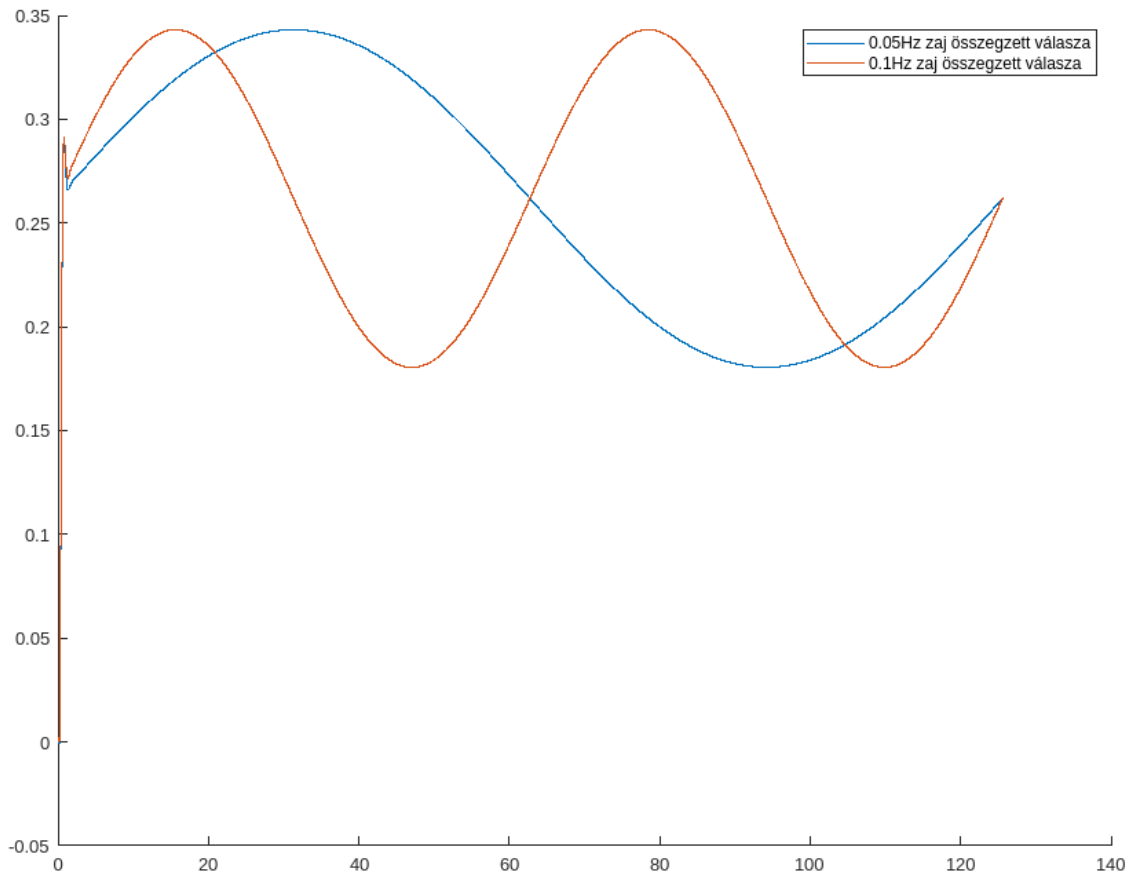
```
for i=1:2
    T=0:0.01:(2*2*pi*(1/f(i)));
    Uzaj=Ldist*sin(f(i)*T);
    Y1=step(W,T,opt);
    Y2=lsim(Wzaj,Uzaj,T);
    Y=Y1+Y2;
    figure
    subplot(3,1,1)
    step(W,opt)
    title('Egységugrásra adott válasz')
    subplot(3,1,2)
    plot(T,Y2)
    title(strcat(num2str(f(i)),'Hz zajra adott válasz'))
    subplot(3,1,3)
    plot(T,Y)
    title('Összegzett válasz')
    figure
    hold on
    plot(T,Y1)
    plot(T,Y2)
    plot(T,Y)
    legend('Egységugrásra adott válasz',strcat(num2str(f(i)),'Hz zajra adott
    válasz'),'Összegzett válasz')
    hold off
end

Y_masodik = Y;
Uzaj=Ldist*sin(f(1)*T);
Y1=step(W,T,opt);
Y2=lsim(Wzaj,Uzaj,T);
Y_elso = Y1 + Y2;
figure
hold on
plot(T,Y_elso)
plot(T,Y_masodik)
legend(strcat(num2str(f(1)),'Hz zaj összegzett válasza'),strcat(num2str(f(2)),'Hz
zaj összegzett válasza'))
hold off
```









Minkét jelnél az első diagramon (az 5 kép közül az 1. és 3.) külön-külön ábrázoltam a válaszjel komponenseit és az összegzett jelet (más-más időtartamig) a jelalak szemléltetéséhez. A második diagramon (az 5 kép közül az 2. és 4.) együttesen ábrázoltam a jeleket, ahol a zavarjel két periódusát jelenítettem meg, aminek az alacsony frekvenciája miatt olyan nagy időtartamot kellett ábrázolni, hogy az ugrásválasz felfutása szinte nem is látható, inkább egy vonalnak néz ki. Jól látható, hogy az összegzett jel a zajnak a szinuszos jelalakját veszi fel és az ugrásválasz DC offszetként jelenik meg a jelben. Az utolsó képen együttesen szemléltettem a két összegzett választ a könnyebb összehasonlíthatóságért.

## 8. Határozza meg a K paraméter azon küszöbértékét, amelyre a rendszer még stabilis. Szimulálja a rendszer kimenetét!

A megoldásomban a K értékét lépésenként növelem, hozzáadok egy  $\Delta K$  értéket és megnézem, hogy a rendszer stabilis-e, ha igen akkor újból hozzáadom, ha nem akkor kivonom belőle az utoljára hozzáadott értéket és megfelezem a  $\Delta K$  értékét és újra elkezdem hozzá adogatni amíg stabilis. Ezt addig csinálom amíg a  $\Delta K$  értéke 0,01 fölött van, tehát 1%-os pontossággal mondom meg a K küszöbértékét.

Kapott érték:

$$K = 1,8394$$

Matlab megvalósítás:

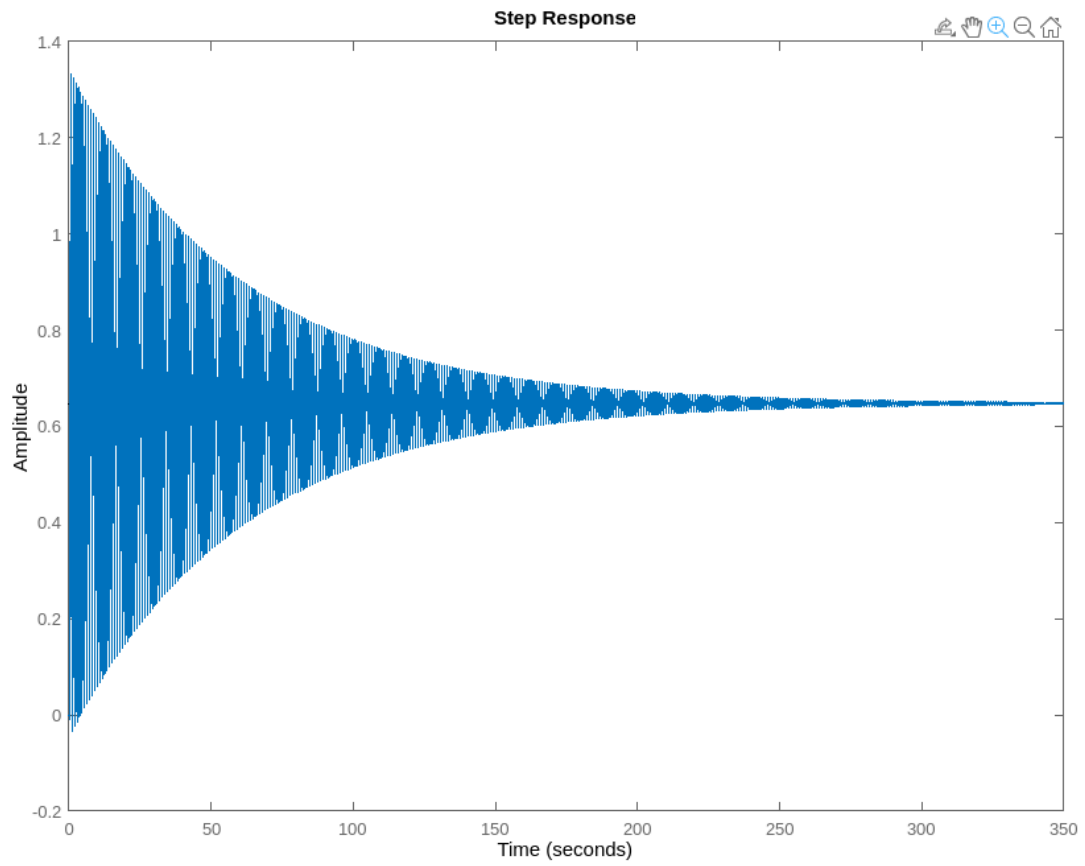
```
K= 0.23;
tau=0.1;
D=0.18;
[pade_num, pade_den]=pade(D,3);
delta = 1;
unstable = false;

while delta > 0.01
    K=K+delta;
    G =tf([K],[tau^3, 3*tau^2, 3*tau, 1])* tf([pade_num],[pade_den]);
    W = feedback(G,1);
    W_poles=pole(W);

    for i=1:size(real(W_poles),1)
        if real(W_poles(i)) >= 0
            unstable = true;
        end
    end

    if unstable == true
        K=K-delta;
        delta=delta/2;
        unstable = false;
    end
end

G =tf([K],[tau^3, 3*tau^2, 3*tau, 1])* tf([pade_num],[pade_den]);
W = feedback(G,1);
step(W)
K
```



Láthatóan rendkívül nagymértékű tranziens jelenséget mutat, de beáll az állandósult állapot.