Kalkulus

Sáfár Orsolya

Határozatlan integrál

A határozatlan integrál definíciója

Definíció: Legyen $f(x)$ egy tetszőleges függvény. Ha létezik olyan $F(x)$ függvény, amelyre $F'(x) = f(x)$, akkor a $F(x)$ függvényt a $f(x)$ primitív függvényének vagy határozatlan integráljának nevezzük.

Azaz a határozatlan integrál nem más mint a derivált "visszacsinálása". Kérdés, hogy egyáltalán van-e primitív függvény, és ha van, akkor hány ilyen függvény van. Továbbá ha van, akkor hogyan kereshetjük meg?

Tétel: Ha $f(x)$ folytonos, akkor biztosan létezik legalább egy primitív függvénye.

Ezen feltétel csupán elégséges, vannak olyan függvények is, amelyek nem folytonosak, de mégis van primitív függvényük. Pontos jellemzést azonban ezen függvényekről nem könnyű adni, nem is tesszük most.

Integrálszámítás első alaptétele

Azt már tudjuk, hogy egy egész intervallumon konstans függvény deriváltja az egész intervallumon 0. Kérdés, hogy megfordítható-e az állítás, ezen múlik ugyanis a primitív függvény egyértelműsége.

Tétel: Ha egy függvény deriválható egy teljes nyílt intervallumon, és a deriváltja minden pontban 0, akkor valamilyen $c \in \mathbb{R}$-re $f(x) \equiv c$ a teljes intervallumon.

Következmény: A primitív függvény additív konstans erejéig egyértelmű, ugyanis ha F és G is primitív függvénye f-nek, akkor $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$, így az $F - G$ konstans. Így beszélhetünk függvénynek a primitív függvényéről. Jele: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós konstans.

Példák

Példa 1:

$$\int \cos(x)\,\mathrm{dx} = \sin(x) + C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans, ugyanis $\sin'(x) = \cos(x)$.

Példa 2:

$$\int x^n\,\mathrm{dx} = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \text{ha } n \neq -1$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans. Ugyanis
$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1}(x^{n+1})' = \frac{1}{n+1}(n+1)x^n = x^n.$$

Példák

Példa 3:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = ?$$

Tudjuk, hogy $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$, így logikus lenne, hogy $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = \ln(x) + C$, ahol $C \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges konstans. De ez azt jelentené, hogy a primitív függvény csak a pozitív számokra értelmezett. Kérdés, tudunk-e mondani valamit a negatív számok esetén.
Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{ha } x > 0 \\ \\ \ln(-x) & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Vizsgáljuk meg ezen függvény deriváltját!

Példa - Folytatás

Ha $x > 0$, akkor $f'(x) = \frac{1}{x}$. Másrészt $\ln(-x)$ pontosan a negatív számokon értelmezett, így megpróbálhatjuk deriválni.

$$\ln'(-x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

Ezzel megtaláltuk a primitív függvény negatív számokra is. $f(x)$ röviden úgy írható, hogy $f(x) = \ln|x|$, ha $x \neq 0$. Emiatt

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = \ln|x| + C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges konstans.

Példák - Folytatás

Példa 4:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx} = \arcsin(x) + C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans, ugyanis $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Minden függvényt, ami szerepel a deriválttáblázatban mint egy függvény deriváltja közvetlenül tudunk integrálni. De például mi lenne $\int \ln(x)\,\mathrm{dx}$? És $\int 3x^2 + \sin(x)\,\mathrm{dx}$? Ezen kérdések megválaszolásához szükségünk lesz az integrálási szabályokra.

A határozatlan integrálás tulajdonságai

Mivel a határozatlan integrál nem más mint a deriválás "visszacsinálása", ezért minden deriválási szabályból következik egy integrálási szabály.

Tétel: Ha $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans és $f(x)$ primitív függvénye $F(x)$, akkor $cf(x)$ primitív függvénye $cF(x)$, ugyanis $(cF(x))' = cF'(x) = cf(x)$, hiszen a konstansszorzó kiemelhető a deriválásból.

Tétel: Ha f primitív függvénye F és g primitív függvénye G akkor $f + g$ primitív függvénye $F + G$, ugyanis $(F + G)' = F' + G' = f + g$, hiszen összeg deriváltja a deriváltak összege.

Következmény: Ha f primitív függvénye F és g primitív függvénye G akkor $f - g$ primitív függvénye $F - G$.

Példák

Ezek szerint az összeg integrálja az integrálok összege, továbbá a konstans kiemelhető. Megpróbálkozhatunk most már tehát a $\int 3x^2 + \sin(x)\,\mathrm{dx}$-t kiszámolni.

Példa 5:

$$\int 3x^2 + \sin(x)\,\mathrm{dx} = \int 3x^2\,\mathrm{dx} + \int \sin(x)\,\mathrm{dx} =$$

$$3\int x^2\,\mathrm{dx} + \int (-1)(-1)\sin(x)\,\mathrm{dx} = 3\int x^2\,\mathrm{dx} - \int -\sin(x)\,\mathrm{dx} =$$

$$3\frac{x^3}{3} - \cos(x) + C = x^3 - \cos(x) + C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges konstans.

Sajnos ez nem segít az $\int \ln(x)\,\mathrm{dx}$ meghatározásában, de szerencsére még vannak további deriválási szabályok is.

Szorzat deriváltja

Tudjuk, hogy $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Közvetlen szabály ebből nem lesz, de átalakításra alkalmas képlet igen.

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

Próbáljuk meg megkeresni mindkét oldal primitív függvényét. Mivel ugyanaz áll mindkét oldalon a primitív függvények is megegyeznek (egy additív konstanstól eltekintve):

$$\int (f(x)g(x))' \,\mathrm{dx} = \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \,\mathrm{dx}$$

Mivel a határozatlan integrál a "deriválás visszacsinálása", azaz $\int f'(x) \,\mathrm{dx} = f(x) + C$ definíció szerint, így

$$\int (f(x)g(x))' \,\mathrm{dx} = f(x)g(x)$$

Parciális integrálás

Mivel az összeg integrálja az integrálok összege, így

$$\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,\mathrm{dx} = \int f'(x)g(x)\,\mathrm{dx} + \int f(x)g'(x)\,\mathrm{dx}$$

Azaz:

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,\mathrm{dx} + \int f(x)g'(x)\,\mathrm{dx}$$

Vigyük át az egyik primitív függvény a baloldalra:

$$f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{dx} = \int f(x)g'(x)\,\mathrm{dx}$$

Ezt utóbbi összefüggést nevezzük a parciális integrálás képletének, amellyel nem kiszámítunk egy integrált, hanem átalakítjuk egy szorzat integrálját.

Példa

$$\int x \sin(x)\, \mathrm{dx} = ?$$

Az $x \sin(x)$-t közvetlenül nem tudjuk integrálni, így megpróbálkozunk az integrál átalakításával. El kell döntenünk, hogy a szorzatból melyik függvénynek szánjuk az f' és melyiknek a g szerepét. Feladatfüggő, hogy melyik célszerű, arra érdemes gondolni, hogy a másik oldalon pont fordítva szerepelnek, f illetve g'-két.

Mivel a deriválás a kitevőt csökkenti, így ha x-et választjuk g-nek, akkor $g' = 1$ miatt eltűnik az integrálból. Viszont amit f'-nek választunk, azt fejből kell tudnunk integrálni, ugyanis a másik oldalon f szerepel, amely f' határozatlan integrálja.

Válasszuk tehát az $f'(x) = \sin(x)$, $g(x) = x$ kiosztást!

Példa - folytatás

Ha $f'(x) = \sin(x)$, akkor $f(x) = -\cos(x)$ és ha $g(x) = x$, akkor $g'(x) = 1$. Innen:

$$\int \overbrace{x}^{g} \overbrace{\sin(x)}^{f'} \,\mathrm{dx} = \overbrace{x}^{f} \overbrace{(-\cos(x))}^{g} - \int \overbrace{1}^{g'} \overbrace{(-\cos(x))}^{f} \,\mathrm{dx} =$$

$$-x\cos(x) + \int \cos(x) \,\mathrm{dx} = -x\cos(x) + \sin(x) + C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans. Figyelmesen olvasva feltűnhetett, hogy f meghatározásakor nem írtunk $+C$-t, pedig az is egy határozatlan integrál. Ezen $+C$ azonban beleolvasztható a mögötte szereplő integrál additív konstansába, így nem szükséges kiírni.

Példa

$$\int x \ln(x)\, \mathrm{dx} = ?$$

Mivel az integrál belsejében ismét egy szorzat van, ezért megpróbálhatjuk átalakítani. Az előbbi példa gondolatmenetét követve legyen most is $g(x) = x$, és ezzel eltüntetjük az x-es szorzót az integrálból. Ekkor $f'(x) = \ln(x)$, viszont mi lenne ekkor $f(x)$? Sajnos a logaritmus függvényt még nem tudjuk integrálni, így nem megy.

Próbáljuk meg a másik kiosztást. Ha $g(x) = \ln(x)$, akkor $g'(x) = \dfrac{1}{x}$. Innen $f'(x) = x$ lesz és ekkor $f(x) = \frac{x^2}{2}$.

Példa - Folytatás

$$\int \overbrace{x}^{f'} \overbrace{\ln(x)}^{g} \, \mathrm{dx} = \overbrace{\frac{x^2}{2}}^{f} \overbrace{\ln(x)}^{g} - \int \overbrace{\frac{x^2}{2}}^{f} \overbrace{\frac{1}{x}}^{g'} \, \mathrm{dx} =$$

$$\frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{1}{2} x \, \mathrm{dx} = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C =$$

$$x^2 \left(\frac{\ln(x)}{2} - \frac{1}{4} \right) + C$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges konstans.

Példa

$$\int \ln(x)\,\mathrm{dx} = ?$$

Ez első pillantásra nem tűnik szorzatnak, de mindent fel tudunk fogni szorzatként, ha eggyel megszorozzuk. Így persze

$$\int \ln(x)\,\mathrm{dx} = \int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{dx}$$

Ezért tudjuk alkalmazni a parciális integrálás szabályát. Mivel pont $\ln(x)$-et szeretnénk integrálni, ezért semmi értelme őt választani $f'(x)$-nek, hiszen ekkor $f(x)$ meghatározásakor pont az eredeti kérdést kell megoldanunk.

Viszont ha $f'(x) = 1$ (és ekkor $f(x) = x$) és $g(x) = \ln(x)$ akkor $g'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Példa - Folytatás

$$\int \overbrace{1}^{f'} \cdot \overbrace{\ln(x)}^{g} \, \mathrm{dx} = \overbrace{x}^{f} \overbrace{\ln(x)}^{g} - \int \overbrace{x}^{f} \overbrace{\frac{1}{x}}^{g'} \, \mathrm{dx} =$$

$$x \ln(x) - \int 1 \, \mathrm{dx} = x \ln(x) - x + C = x(\ln(x) - 1) + C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges konstans.

Ezzel a módszerrel tudjuk meghatározni az összes inverz szögfüggvény integrálját is (például a hiperbolikus szögfüggvényekét is).

Példa

$$\int \arctan(x)\,\mathrm{dx} = ?$$

Írjuk fel tehát az integrandust (az integráljel belsejében lévő függvényt) $1 \cdot \arctan(x)$ alakban. Ekkor $f'(x) = 1$, innen $f(x) = x$ és $g(x) = \arctan(x)$, innen $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

$$\int \overbrace{1}^{f'} \cdot \overbrace{\arctan(x)}^{g}\,\mathrm{dx} = \overbrace{x}^{f}\overbrace{\arctan(x)}^{g} - \int \overbrace{x}^{f}\overbrace{\frac{1}{1+x^2}}^{g'}\,\mathrm{dx} = ?$$

Példa - folytatás

A határozatlan integrál,

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{dx}$$

további átalakítások nélkül közvetlenül kiszámítható, és

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges konstans.

Ez utóbbi állítást könnyű ellenőrizni, hiszen

$$\ln'\left(1+x^2\right) = \frac{2x}{1+x^2}$$

az összetett függvény deriválási szabálya miatt.

Összetett függvény deriválási szabálya

Tudjuk, hogy $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$. Ezért ha olyan integrált találunk, amely szorzat alakú, méghozzá úgy, hogy egy összetett függvény szorozva a belső függvény deriváltja, akkor elég a külső függvényt integrálni.

Tétel: Ha az $f(x)$ függvény primitív függvénye a $F(x)$ függvény, akkor

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + C,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges konstans.

Voltaképpen sok primitív függvény meghatározásakor nem is szükséges levezetés. A megoldás kulcsa abban rejlik, hogy felismerjük az $f(g(x))g'(x)$ alakot.

"Egyperces" integrálok

Az előbbi példában:

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}2x\,\mathrm{dx}$$

Itt a külső függvény az reciprok, a belső függvény az $(1+x^2)$, ennek a deriváltja $2x$. Továbbá az $\frac{1}{x}$ függvény primitív függvénye a $\ln|x|$, ezt kell venni x helyett az $1+x^2$ helyen, így lett

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges konstans.

Példa

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{dx} = ?$$

Valójában ez is összetett függvény szorozva a belső függvény deriváltja alakú. A belső függvény az $1 - x^2$, ennek a deriváltja $-2x$, ami konstansszorzótól eltekintve megtalálható a számlálóban. A maradék $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ alakba írható, azaz a külső függvény a $-\frac{1}{2}$-edik hatványra emelés, és mivel $\int x^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{dx} = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$, így

$$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{dx} = -\frac{1}{2} 2\sqrt{1-x^2} + C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges konstans.

Linearizáló azonosságok

$$\int \cos^2(x)\,\mathrm{dx} = ?$$

Ez most közvetlen integrálással nem megy. Helyette átalakítjuk az integrandust. Induljuk a kétszeres szög koszinuszának képletéből!

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

Innen

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1,$$

azaz

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Ez utóbbi képletet linearizáló azonosságnak nevezik, mert eltünteti a négyzetet a koszinuszról, azaz linearizálja.

Példa - folytatás

Ennek felhasználásával:

$$\int \cos^2(x)\,\mathrm{dx} = \int \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

ahol C tetszőleges valós konstans.

Hasonló azonosság vezethető le $\sin^2(x)$-re:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - \sin^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

innen

$$2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$$

azaz

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$