

1. példa. Egy merőlegesen metsződő földelt fémsíkok által alakított sarokban egy $R = 5$ cm sugarú, $Q = 10$ nC töltéssel ellátott fémgömb helyezkedik el az ábrán látható módon az egyes síkktól $a = 1$ m és $b = 1,5$ m távolságra. A közeg levegő.

a) Vegyen fel olyan ekvivalens töltéselrendezést, melynek elektromos tere megegyezik a fémelemek és a töltés által létrehozott térrel! (1 pont)

Helyes ábra. (1 p)

b) Mekkora és milyen irányú erő hat a gömbre? Az irányt elegendő az a) feladat ábráján jelölni! (3 pont)

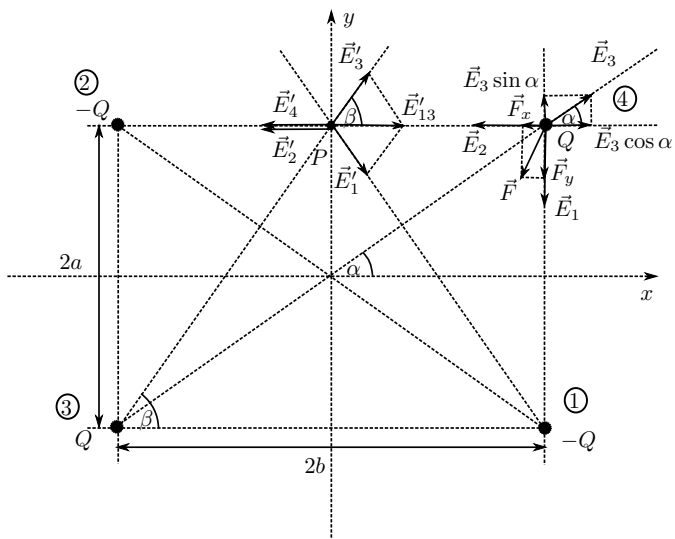
Lásd Bilicz példatár 2.16-os feladata.
 Az eredő térerősség helyes formulája. (1 p)
 Innen az erő: $F = QE = 19,12$ N. (1 p)
 Az ábrán az erő helyes feltüntetése. (1 p)

c) Határozza meg a gömb potenciálját! (3 pont)

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\sqrt{(2a)^2 + (2b)^2}} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} \right) = 1,75 \text{ kV} \quad (3 \text{ p})$$

d) Határozza meg a felületi töltéssűrűséget az ábrán jelölt P pontban! (3 pont)

Térerősségkomponensek helyes kifejezése: (1 p)
 $E'_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b^2 + (2a)^2} = E'_3, E'_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b^2} = E'_4.$
 Az eredő térerősség: $E' = 2(E'_1 \cos \beta - E'_2)$, ahol $\beta = \arctan\left(\frac{2a}{b}\right).$ (1 p)
 Végül a felületi töltéssűrűség a P pontban: $\sigma_P = \epsilon_0 E' = -554,47 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}.$ (1 p)



2. példa. Egy keresztirányban rétegzett hengerkondenzátor méretei: $R_1 = 1$ mm, $R_2 = 3$ mm, $R_3 = 5$ mm és $l = 3$ cm. Az egyes rétegek relatív dielektromos állandói és vezetőképességei rendre $\epsilon_1, \epsilon_2, \sigma_1$ és $\sigma_2.$

Tekintsük a két réteget tökéletes szigetelőnek ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$)!

a) Mekkora a kondenzátor kapacitása, ha $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 2,25$? (2 pont)

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_1 l}{\ln\left(\frac{R_3}{R_1}\right)} = 2,33 \text{ pF} \quad (2 \text{ p})$$

b) Mekkora a kondenzátor kapacitása, ha $\epsilon_1 = 2,25, \epsilon_2 = 3,3$? (4 pont)

I. megoldás:
 Az egyes rétegek kapacitásai: $C_i = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_i l}{\ln\left(\frac{R_{i+1}}{R_i}\right)},$ ahol $i = \{1, 2\}.$ (2 p)
 Az eredő kapacitás pedig soros kapcsolással kapható: $C = C_1 \times C_2 = 2,59 \text{ pF}.$ (2 p)
II. megoldás: $C = \frac{Q}{U},$ ahol $U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\epsilon_1} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr + \frac{1}{\epsilon_2} \int_{R_2}^{R_3} \frac{1}{r} dr \right).$ (2 p)
 A végeredmény: $C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\frac{1}{\epsilon_1} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{\epsilon_2} \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)} = 2,59 \text{ pF}.$ (2 p)

Legyen a továbbiakban $\sigma_1 = 1 \cdot 10^{-12}$ S/m és $\sigma_2 = 1 \cdot 10^{-13}$ S/m!

c) A fegyverzetek közé kapcsolt feszültség $U = 1$ kV. Határozza meg a kondenzátoron átfolyó szivárgási áramot! (4 pont)

I. megoldás: Elektrosztatikai analógia alapján az egyes rétegek konduktanciája:
 $G_i = \frac{\sigma_i}{\epsilon_0\epsilon_i} C_i,$ ahol $i = \{1, 2\}.$ (2 p)
 Az eredő vezetés pedig soros kapcsolással kapható: $G = G_1 \times G_2.$ (1 p)
 $G = \frac{I}{U} \Rightarrow I = \frac{2\pi l U}{\frac{1}{\sigma_1} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{\sigma_2} \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)} = 30,37 \text{ pA} \quad (1 \text{ p})$
II. megoldás: Az alábbi két összefüggés felhasználásával (1 p)
 $I = J(r)2\pi r l,$
 $J(r) = \sigma_i E(r),$ ahol $i = \{1, 2\},$
 majd a feszültség számítása a b) feladathoz hasonló módon. (2 p)
 Végül az I áram kifejezése. (1 p)

Kispéldák. (Minden helyes válasz 2 pontot ér. A végeredményt írja fel a feladatlapra, a *részletszámításokat* – ahol szükséges – külön lapon mellékelje.)

A helyes és teljes alapegyenletekre 1 pont, a numerikusan jó eredményre további 1 pont adható.

1. A σ fajlagos vezetőképességű talajban h mélységben egy $r \ll h$ sugarú fémgömb helyezkedik el. Határozza meg a földelési ellenállást!

$$R = \frac{U}{I} = \frac{I}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2h} \right)$$

2. Egy szigetelő közeg legnagyobb lineáris mérete 0,25 m. Alkalmazható-e tisztán elektrosztatikus modell 1 GHz-en az elektromos térerősség számítására a szigetelőben és annak közelében? Válaszát indokolja!

Nem, mert a c/f arány összemérhető a karakterisztikus mérettel.

3. A levegőben két egyforma, R sugarú igen hosszú vezeték helyezkedik el egymástól $d \gg R$ távolságban, melyek ellentétes irányú I áramot szállítanak (Lecher-vezeték). Adja meg a vezetékek síkjában, tőlük azonos távolságra lévő, párhuzamos egyenesen a térerősség nagyságát!

$$H = \frac{2I}{\pi d}$$

4. Elektrosztatikus térben a skalárpotenciál kifejezése egy koherens egységrendszerben $\phi(x, y, z) = 2 \sin(\pi x) \cos(\pi y)$. Fejezze ki az elektromos térerősség vektorát mint a hely függvényét!

$$\mathbf{E}(x, y, z) = -\text{grad}\phi = -2\pi[\cos(\pi x) \cos(\pi y)\mathbf{e}_x - \sin(\pi x) \sin(\pi y)\mathbf{e}_y]$$

5. Egy toroid vasmagra két tekercset csévélünk, melynek menetszámai: N_1 és N_2 , a közepes erővonalhossz l , kör keresztmetszetének átmérője D . A vasmag relatív permeabilitása μ_r . Számítsa ki a kölcsönös indukciós együtthatót, ha a két tekercs külön-külön ellentétes irányú mágneses teret hoz létre a vasmagban!

$$M = -\frac{\mu_0\mu_r N_1 N_2 D^2 \pi}{4l}$$