

Jelek és jelfeldolgozás (BMEVIHVBB01)

12. előadásvázlat

Szerkesztette: Dr. Horváth Bálint Péter, BME-HVT

2022.05.24.

1. Mintavételezés, jelrekonstrukció

Az $x(t)$ FI jelet a t_k időpillanatokban felvett értékével jellemezzük, ahol $t_k = kT, k \in \mathbf{Z}, T$ a mintavételi periódusidő. FI jel mintavételezése (digitalizálása) a gyakorlatban a folytonos idejű, folytonos értékű jelből diszkrét idejű, diszkrét értékű jelet képez. Jelen esetben azonban diszkrét idejű, folytonos értékű jelekként kezeljük.

Legyen $x = x(t)$ korlátos, véges FI jel. Ekkor

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & kT \leq t < kT + T_0 \\ 0, & kT + T_0 \leq t < kT + T \end{cases},$$

ahol T_0 a mintavételezés hossza legyen olyan rövid, hogy az alatt x konstansnak tekinthető. Ekkor

$$x_T(t) \approx \begin{cases} x(kT) = x_D[k], & kT \leq t < kT + T_0 \\ 0, & kT + T_0 \leq t < kT + T \end{cases}.$$

A fenti közelítések alapján írjuk le a mintavételezett jelet a t_k helyeken $T_0 x(kT)$ intenzitású, elhanyagolhatóan rövid impulzusok sorozataként. Egy ilyen impulzus a t_k pillanatban $T_0 x_D[k] \delta(t - kT)$. Ekkor a mintavételezett jel tetszőleges időpillanatban:

$$x_*(t) = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k] \delta(t - kT).$$

2. Mintavételezett jelek spektruma

Ugyan a korábbiakban csak DI jelek esetén láttuk be, de FI jelekre is belátható, hogy a jel spektruma az időfüggvény Fourier-transzformáltja. A FI jelek spektrumát $X(j\omega)$ -val jelöljük, ahol ω a körfrekvencia [rad/sec]-ban.

$$X_*(j\omega) = \mathcal{F} \{x_*(t)\}.$$

Az előzőekben felírt mintavételezett jelet, behelyettesítve

$$X_*(j\omega) = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k] e^{-jk\omega T}.$$

A DI jel spektruma pedig

$$X_D(e^{j\vartheta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k]e^{-jk\vartheta}.$$

A kapcsolat a FI és DI jel spektruma között adódik (amennyiben a FI jel absz. integrálható, ill a DI jel absz. összegezhető):

$$X_*(j\omega) = T_0 X_D(e^{j\vartheta})|_{\vartheta=\omega T},$$

amelyből következik, hogy a mintavett jel spektruma periodikus, vagyis

$$X_*(j(\omega - \omega_s)) = X_*(j\omega),$$

ahol $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ mintavételi körfrekvencia.

Az alábbiakból következik a mintavételezési-tétel:

Ha az $x(t)$ jel sávkorlátozott Ω sávkorlással, és a mintavétel kellően sűrű ($\omega_s \geq 2\Omega$, vagyis $T \leq \frac{\pi}{\Omega}$), akkor az $x(t)$ jel rekonstruálható az $x_(t)$ mintavett jelből.*

3. Jelrekonstrukció

A mintavett jelből a FI jel visszaállítása a jelrekonstrukció. Ennek egyik lehetséges módja a szakaszonkénti állandó más néven nulladrendű tartóval megvalósított jelrekonstrukció. Az így rekonstruált jel időfüggvénye, illetve a nulladrendű tartó impulzusválasza:

$$\begin{aligned}\hat{y}_0(t) &= y_D[k] = y(kT + 0), \quad kT \leq t < kT + T \\ h_0(t) &= \frac{1}{T_0} (\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T))\end{aligned}$$