Kalkulus

Sáfár Orsolya

Határozott integrál

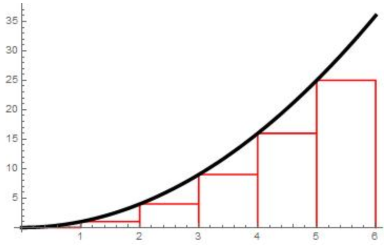
Riemann-integrál

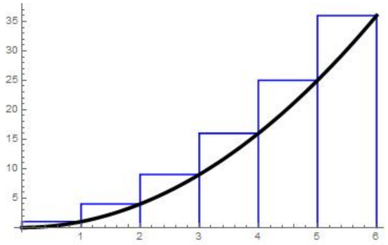
Emlékeztető (Weierstrass-tétel): A az $f(x)$ függvény folytonos és az $[a, b]$ intervallum korlátos és zárt, akkor $f(x)$-nek van maximuma és a minimuma $[a, b]$-n.

Definíció: Az $[a, b]$ intervallum egy felosztása egy $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ pontsorozat. Ezen felosztás finomsága a legnagyobb távolság ami két szomszédos pont között előfordul.

Definíció: Egy $[a, b]$ intervallum egy felosztáshoz és egy $f(x)$ folytonos függvényhez tartozó alsó közelítő összeg azon téglalapok területeinek előjeles összege, amelyek egyik oldala a felosztás két szomszédos pontja közötti szakasz, magassága pedig a függvény minimuma ezen szakaszon (ha ez negatív szám, akkor a terület mínusszal számít). A felső közelítő összeg ugyanez maximummal.

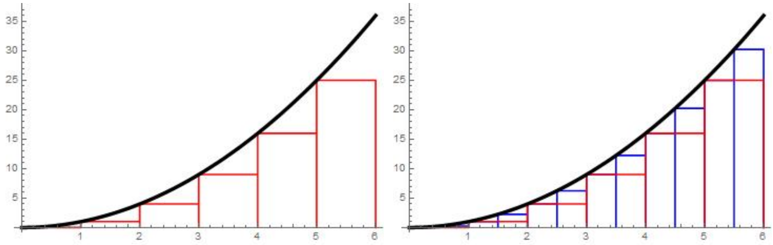
Közelítő összegek





Ha egy rögzített felosztás sorozatot tekintek, akkor az alsó közelítő összeg mindig kisebb lesz, mint a felső közelítő összeg.

Közelítő összegek



Ha finomítom a felosztássorozatot további pontok felvételével, akkor az alsó közelítő összeg monoton nő.

Határozott integrál

Definíció: Ha az alsó és felső közelítőösszegek is konvergensek ha a felosztás finomsága tart 0-hoz, és ugyanahhoz a valós számhoz tartanak bármilyen felosztássorozatra, akkor az mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény Riemann-integrálható, és az integrálja ezen közös határérték. Jele: $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$.

Tétel: Ha $f(x)$ folytonos az $[a, b]$-on, akkor Riemann-integrálható is.

Megjegyzés: Valójában az alsó és felső közelítő összeg definiálható olyan függvényekre is, amik nem veszik fel a maximumukat, a legkisebb felső korlát fogalma segítségével. Így beszélhetünk akár nem folytonos függvények Riemann-integráljáról is, és valójában minden korlátos függvény amely csak véges sok pontban szakad Riemann-integrálható, sőt...

Newton-Leibniz formula

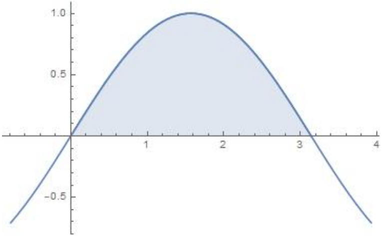
Tétel: /Newton–Leibniz/ Legyen I egy nyílt intervallum, $f(x)$ primitív függvényre I-n $F(x)$ és tegyük fel, hogy $f(x)$ Riemann-integrálható $[a, b] \subset I$-n. Ekkor

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{dx} = F(b) - F(a).$$

Megjegyzés: Persze a primitív függvény csak $+C$ erejéig egyértelmű. Viszont a Newton–Leibniz formulában mindegy C értéke, mert a kivonás miatt eltűnik .
Az $F(b) - F(a)$ jobboldalt szokás $[F(x)]_a^b$-vel jelölni.

Példa

Példa: Mekkora terület esik egy szinusz hullám alá?

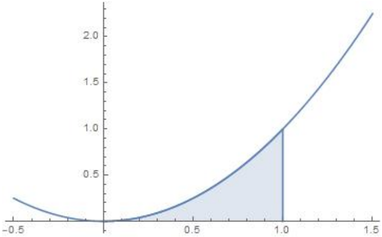


Ezek szerint az $\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{dx}$ értékét kell meghatároznunk. Mivel a $\sin(x)$ (egyik) primitív függvénye a $-\cos(x)$, így a Newton-Leibniz formula miatt:

$$\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{dx} = [-\cos(x)]_0^\pi = (-\cos(\pi)) - (-\cos(0)) = 2$$

Példa

Példa 2: Mekkora terület esik a parabola alá a $[0,1]$ szakasz felett?



Ezek szerint az $\int_0^1 x^2\,\mathrm{dx}$ értékét kell meghatároznunk. Mivel a x^2 (egyik) primitív függvénye a $\frac{x^3}{3}$, így a Newton-Leibniz formula miatt:

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{dx} = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0$$

A Riemann-integrál tulajdonságai

A Newton-Leibniz formula visszavezeti a Riemann-integrál kiszámítását a primitív függvényre: első lépésben kiszámítjuk a primitív függvényt, aztán behelyettesítünk. Ezért örökli a határozatlan integrálás számolási szabályait:

- $\int\limits_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{dx} = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{dx} + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$
- $\int\limits_a^b cf(x)\,\mathrm{dx} = c\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ bármilyen $c \in \mathbb{R}$ konstansra
- $\int\limits_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{dx} = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{dx} - \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$

A Riemann-integrál tulajdonságai - folyt.

Vannak azonban új tulajdonságok is, amelyek valamennyien a Newton-Leibniz-formula közvetlen felhasználásával igazolhatóak.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{dx}$$

Bármilyen $c \in \mathbb{R}$-re, amennyiben az összes intervallumon létezik a Riemann-integrál:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^c f(x)\,\mathrm{dx} + \int_c^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

Példa

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{|x|}\,\mathrm{dx} = ?$$

A primitív függvény meghatározásához fel kell oldanunk az $|.|$-t, ugyanis csak e^{x}-nek és e^{-x}-nek is tudjuk a primitív függvényét. De a $[-1, 1]$-en x előjelétől függ $|.|$ jelentése. Ezért:

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{|x|}\,\mathrm{dx} = \int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{|x|}\,\mathrm{dx} + \int_{0}^{1} \mathrm{e}^{|x|}\,\mathrm{dx} =$$

$$\int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{dx} + \int_{0}^{1} \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{dx} = \left[-e^{-x}\right]_{-1}^{0} + \left[e^{x}\right]_{0}^{1} =$$

$$-e^{0} - \left(-e^{-(-1)}\right) + e^{1} - e^{0} = 2\,\mathrm{e} - 2$$

Parciális integrálás

Emlékeztető: a primitív függvények meghatározásánál használtuk a parciális integrálás módszerét, azaz a

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{dx} = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{dx}$$

összefüggést. Ennek megfelelője a Riemann-integrál esetén:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{dx} = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Példa

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{dx} = ?$$

A parciális integrálás módszerét használjuk az x eltüntetésére, azaz $g(x) = x$ és $f'(x) = \mathrm{e}^x$ felosztással dolgozunk. Ekkor $g'(x) = 1$ és $f(x) = \mathrm{e}^x$, így

$$\int_0^1 \overbrace{x}^{g} \cdot \overbrace{\mathrm{e}^x}^{f'}\,\mathrm{dx} = \left[\overbrace{x}^{g} \cdot \overbrace{\mathrm{e}^x}^{f}\right]_0^1 - \int_0^1 \overbrace{1}^{g'} \cdot \overbrace{\mathrm{e}^x}^{f}\,\mathrm{dx} =$$

$$[x\,\mathrm{e}^x]_0^1 - [\mathrm{e}^x]_0^1 = (\mathrm{e} - 0) - (\mathrm{e} - 1) = 1$$

Példák

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{dx} = ?$$

Itt is parciális integrálással dolgozhatunk, ekkor legyen $f'(x) = \mathrm{e}^x$, $g(x) = \sin(x)$

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{dx} = [\mathrm{e}^x \sin(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{dx} =$$

$$e^{\pi} \sin(\pi) - e^0 \sin(0) - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{dx} = -\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{dx}$$

Példák - folytatás

Bár látszólag nem segített sokat a parciális integrálás, de próbáljuk meg még egyszer, legyen $f'(x) = \mathrm{e}^x$, $g(x) = \cos(x)$, innen

$$-\int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{dx} = -[\mathrm{e}^x \cos(x)]_0^\pi + \int_0^\pi \mathrm{e}^x(-\sin(x))\,\mathrm{dx} =$$

$$-(\mathrm{e}^\pi \cos(\pi) - e^0 \cos(0)) - \int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{dx} = \mathrm{e}^\pi + 1 - \int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{dx}$$

Összevetve azzal, ahonnan indultunk:

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{dx} = e^\pi + 1 - \int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{dx},$$

innen

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{e}^\pi + 1}{2}$$

Helyettesítéses integrálás

Az összetett függvény deriválási szabályából adódó integrálás szabályt nevezzük helyettesítéses integrálásnak. Induljunk ki az

$$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$$

alakból. Múlt előadáson már láttuk, hogy ha a jobboldalon lévő szorzatalakot felismerjük az integrálás belsejében, akkor az primitív függvény közvetlenül meghatározható.

A helyettesítéses integrálnál viszont mi magunk készítjük el a szorzat alakot x átalakításával. Legyen $g(t)$ egy szigorú monoton, deriválható függvény. Ekkor a határozatlan integrálra a következő képlet érvényes:

$$\int f(x)\,\mathrm{dx}\,|_{x=g(t)} = \int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{dt}$$

Példák

Példa:

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{e^{2x}+1}\,\mathrm{dx} = ?$$

Használjuk az $x = \ln(t) = g(t)$, azaz $\mathrm{e}^x = t$ helyettesítést! Ekkor

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{e^{2x}+1}\,\mathrm{dx} = \int \frac{t}{t^2+1} \cdot \overbrace{\frac{1}{t}}^{\ln'(t)}\,\mathrm{dt} = \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{dt} =$$

$$\arctan(t) + C = \arctan(\mathrm{e}^x) + C$$

Példák

Példa 2:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = ?$$

Használjuk az $x = \sin(t)$, azaz $\arcsin(x) = t$ helyettesítést. Ekkor

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = \int \sqrt{1-\sin^2(t)}\,\overbrace{\cos(t)}^{\sin'(t)}\,\mathrm{dt} = \int |\cos(t)|\cos(t)\,\mathrm{dt} =$$

elhagyhatjuk az abszolút értéket, mert $\sqrt{1-x^2}$ mindig nemnegatív.

$$\int \cos^2(t)\,\mathrm{dt} = \int \frac{1}{2}(1+\cos(2t))\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) + C$$

Mivel $x = \sin(t)$, így $\arcsin(x) = t$, ezért

$$\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) + C = \frac{1}{2}\arcsin(t) + \frac{1}{2}\sin(t)\cos(t) + C =$$

$$\frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$$

Helyettesítéses integrálás 2

Ha határozott integrálra szeretnénk alkalmazni a helyettesítéses integrálás módszerét, akkor az a határokat is megváltoztatja. A következő képlet igaz:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)\,\mathrm{dt}$$

Ebben az esetben az a munkát amit a primitív függvény t-ről x-re átírása lenne máshol végezzük el: az új határok kiszámításakor.

Példák

Példa:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{e^{2x}+1}\,\mathrm{dx} = ?$$

Használjuk az $x = \ln(t) = g(t)$, azaz $\mathrm{e}^x = t$ helyettesítést! Ekkor $g^{-1}(x) = \mathrm{e}^x$, így $g^{-1}(0) = e^0 = 1$ és $g^{-1}(1) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{e^{2x}+1}\,\mathrm{dx} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{t}{t^2+1} \cdot \overbrace{\frac{1}{t}}^{\ln'(t)}\,\mathrm{dt} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{dt} =$$

$$[\arctan(t)]_1^{\mathrm{e}} = \arctan(\mathrm{e}) - \arctan(1)$$

Példák

Példa: Számítsuk ki az egységsugarú kör területét!

Sajnos az origó középpontú, egységsugarú kör nem egy függvény képe, mert egy x értékhez két $f(x)$ is szóba jönne: egy az alsó félkörről, egy a felső félkörről.

Tudjuk, hogy az egységsugarú kör egyenlete $x^2 + y^2 = 1$. Innen kifejezve y^2-t: $y^2 = 1 - x^2$, innen $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

Két megoldás adódik y-re egy negatív és egy pozitív szám, aminek azonos az abszolút értéke. A pozitív megoldások rajzolják ki a felső félkört, a negatívak az alsót.

Számítsuk ki tehát a felső félkör (amely egy függvény) és a tengely közé eső területet, ami pontosan a félkör területe lesz. Azaz a meghatározandó integrál: $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{dx}$.

Példák - folytatás

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = ?$$

Használjuk az $x = \sin(t) = g(t)$, azaz $\arcsin(x) = t$ helyettesítést.
Ekkor $g^{-1}(t) = \arcsin(t)$, innen $\arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$ és
$\arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{dt} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{dt} =$$

Példák - folytatás

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{dt} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos(2t))\,\mathrm{dt} =$$

$$\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin(\pi) - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin(-\pi)\right) = \frac{\pi}{2}$$

Azaz a teljes terület π, ami megfelel az $r^2\pi$ képletnek $r = 1$-re.