Valószínűségszámítás pótzárthelyi dolgozat megoldása
1. sorozat

1. Egy 7 cm-es szakaszon kiválasztunk két pontot. A két pont a szakaszt három részre osztja. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább egy rész hossza 1 cm-nél rövidebb lesz?
   Megoldás:
   Jelölje X és Y a pontok helyét az intervallumban! A három szakasz:
   $a = \min\{X, Y\}, b = \max\{X, Y\} - \min\{X, Y\}, c = 7 - \max\{X, Y\}$
   Pl. ha $X < Y$, akkor $a = X, b = Y - X, c = 7 - Y$
   Annak az eseménynek, hogy mindegyik szakasz hosszabb 1 cm-nél az alábbi tartomány pontjai felelnek meg:
   $X > 1, Y > 1 + X, 6 > Y$. Ez egy 4cm x 4cm négyzet felét határozza meg.
   Így a keresett valószínűség: $1 - \frac{16}{49} = \frac{33}{49}$.

2. Négyszer feldobunk egy szabályos kockát.
   A : az első két dobás páros,
   B : az utolsó két dobás páratlan,
   C : az első dobás megegyezik az utolsóval.
   Számolja ki a $\mathbf{P}(A + B \mid C + B)$ feltételes valószínűséget!
   Megoldás:
   $(A + B)(C + B) = AC + B$
   $\mathbf{P}((A + B)(C + B)) = \mathbf{P}(AC + B) = \mathbf{P}(AC) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(ABC) =$
   $= \frac{3\cdot3\cdot6\cdot1}{6^4} + \frac{6\cdot6\cdot3\cdot3}{6^4} - \frac{0}{6^4} = \frac{378}{6^4}$
   $\mathbf{P}(C + B) = \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(BC) =$
   $= \frac{6\cdot6\cdot3\cdot3}{6^4} + \frac{6\cdot6\cdot6\cdot1}{6^4} - \frac{3\cdot6\cdot3\cdot1}{6^4} = \frac{486}{6^4}$
   $\mathbf{P}(A + B \mid C + B) = \frac{378}{486} = \frac{7}{9} \approx 0,78$

3. Milyen b értéknél lesz az $f(x) = b\sqrt{x-2}$, $x \in (2, 3)$ függvény sűrűségfüggvény? Ha X sűrűségfüggvénye $f(x)$, akkor mennyi $\mathbf{P}(X < 2,6)$?
   Megoldás:
   $1 = b \cdot \int\limits_2^3 \sqrt{x-2}dx = \left[\frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}\right]_2^3 = \frac{2}{3} \Longrightarrow b = \frac{3}{2}$.
   $\mathbf{P}(X < 2,6) = \frac{3}{2}\int\limits_2^{2,6} \sqrt{x-2}dx = 0,6^{\frac{3}{2}} \approx 0,465$

4. Legyen $X \in B\left(3, \frac{1}{2}\right)$, és $Y = X^2 + 1$. Mi Y eloszlása, és mennyi a várható értéke?
   Megoldás:
   $R_Y = \{1, 2, 5, 10\}, \mathbf{P}\left(Y = 1 + i^2\right) = \mathbf{P}(X = i) = \binom{3}{i}\frac{1}{8}, i = 0, 1, 2, 3$
   $\mathbf{E}Y = \frac{1+6+15+10}{8} = 4$

5. Az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0,25\left(1 + xy\left(x^2 - y^2\right)\right), & |x| < 1, |y| < 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Számolja ki a vetületi sűrűségfüggvényeket!

Megoldás:

$f_X(x) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{4} dy + \frac{1}{4} \int\limits_{-1}^{1} x^3 y dy - \frac{1}{4} \int\limits_{-1}^{1} x y^3 dy = \frac{1}{2}, x \in (-1, 1)$

$f_Y(y) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{4} dx + \frac{1}{4} \int\limits_{-1}^{1} x^3 y dx - \frac{1}{4} \int\limits_{-1}^{1} x y^3 dx = \frac{1}{2}, y \in (-1, 1)$

Valószínűségszámítás pótzárthelyi dolgozat
2. sorozat

1. Egy 5 cm-es szakaszon kiválasztunk két pontot. A két pont a szakaszt három részre osztja. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább egy rész hossza 2 cm-nél hosszabb lesz?
   Megoldás:
   Jelölje X és Y a pontok helyét az intervallumban! A három szakasz:
   $a = \min\{X, Y\}, b = \max\{X, Y\} - \min\{X, Y\}, c = 5 - \max\{X, Y\}$
   Pl. ha $X < Y$, akkor $a = X, b = Y - X, c = 5 - Y$
   Annak az eseménynek, hogy mindegyik szakasz rövidebb 2 cm-nél az alábbi tartomány pontjai felelnek meg:
   $X < 2, Y < 2 + X, 3 < Y$. Ez egy 1cm x 1cm négyzet felét határozza meg.
   Így a keresett valószínűség: $1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$

2. Négyszer feldobunk egy szabályos kockát.
   A : az első két dobás hatos,
   B : az utolsó két dobás páratlan,
   C : az első dobás különbözik az utolsótól.
   Számolja ki a $\mathbf{P}(A + B \mid C + B)$ feltételes valószínűséget!
   Megoldás:
   $\overline{(A + B)}(C + B) = AC + B$
   $\mathbf{P}((A + B)(C + B)) = \mathbf{P}(AC + B) = \mathbf{P}(AC) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(ABC) =$
   $= \frac{1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5}{6^4} + \frac{6 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3}{6^4} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3}{6^4} = \frac{345}{6^4}$
   $\mathbf{P}(C + B) = \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(BC) =$
   $= \frac{6 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3}{6^4} + \frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5}{6^4} - \frac{162 + 108}{6^4} = \frac{1134}{6^4}$
   $\mathbf{P}(A + B \mid C + B) = \frac{345}{1134} = \frac{115}{378} \approx 0,3$

3. Milyen b értéknél lesz az $f(x) = b\sqrt{3 - x},\ x \in (2, 3)$ függvény sűrűségfüggvény? Ha X sűrűségfüggvénye $f(x)$, akkor mennyi $\mathbf{P}(X \geq 2,6)$?
   Megoldás:
   $1 = b \cdot \int\limits_2^3 \sqrt{3 - x}dx = \left[-\frac{2}{3}(3 - x)^{\frac{3}{2}}\right]_2^3 = \frac{2}{3} \Longrightarrow b = \frac{3}{2}.$
   $\mathbf{P}(X \geq 2,6) = \frac{3}{2} \int\limits_{2,6}^3 \sqrt{3 - x}dx = 0,6^{\frac{3}{2}} \approx 0,465$

4. Legyen $X \in B\left(4, \frac{1}{4}\right)$, és $Y = 1 - X^2$. Mi Y eloszlása, és mennyi a várható értéke?
   Megoldás:
   $R_Y = \{1, 0, -3, -8, -15\}, \mathbf{P}\left(Y = 1 - i^2\right) = \mathbf{P}(X = i) = \binom{4}{i}\left(\frac{1}{4}\right)^i \left(\frac{3}{4}\right)^{4-i}, i = 0, 1, 2, 3, 4$
   $\mathbf{E}Y = 1 - \mathbf{E}X^2 = 1 - \left(1 + \frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4}$

5. Az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0,25\left(1 + xy\left(x^2 - y^2\right)\right), & |x| < 1, |y| < 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Számolja ki a $\mathbf{P}(X < Y)$ valószínűséget!

Megoldás:

$\mathbf{P}(X < Y) = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{x}^{1} \frac{1}{4}\left(1 + xy\left(x^2 - y^2\right)\right) dydx =$

$= \int\limits_{-1}^{1} \left[\frac{1}{4}(1-x) + \frac{1}{8}x^3\left(1 - x^2\right) - \frac{1}{12}x\left(1 - x^3\right)\right] dx =$

$= \left[\frac{1}{4}\left(x - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\right) - \frac{1}{12}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}$