

Kiss Bálint
bkiss@iit.bme.hu
Aláírás:

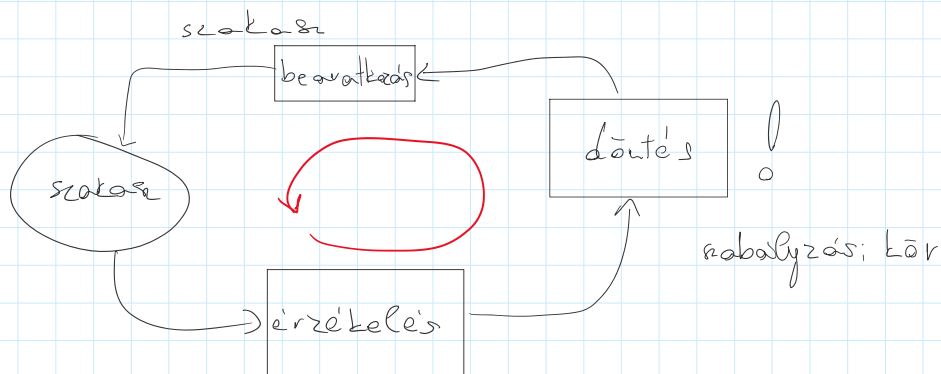
- ZH
- Jelenlét
- 3x kisZH

Vizsga:

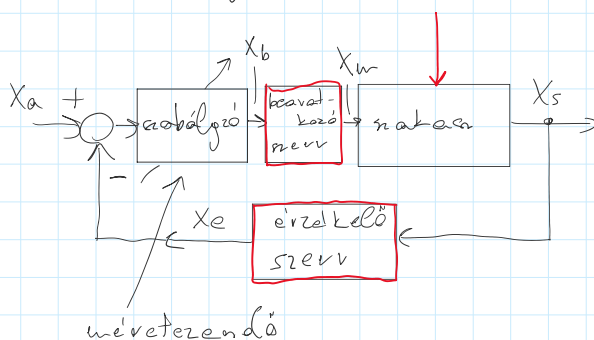
- 60 perc - teszt min 20 pont
- 60 perc - feladat min 20 pont

Tankönyv: Lantos Béla: Irányítástechnikai rendszerek elmélete és tervezése I. <http://mersz.hu>

Alapfogalmak: folyamat (plant), irányítás (control)



Szabályozási kör



x_s : szabályozott jellemző

x_e : ellenőrző jel

x_a : alapjel

x_r : rendelkező jel

x_b : beavatkozó jel

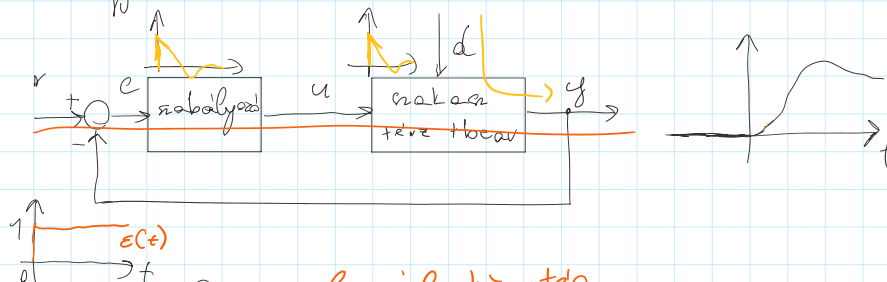
x_m : módosított jellemző

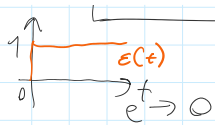
x_z : zavaró jel

Ebben a felében:

- skalár jelek és jellemzők (egyváltozós, SISO)
- lineáris, időben nem változó paraméterek LTI

Egyszerűsített hataásvázlat



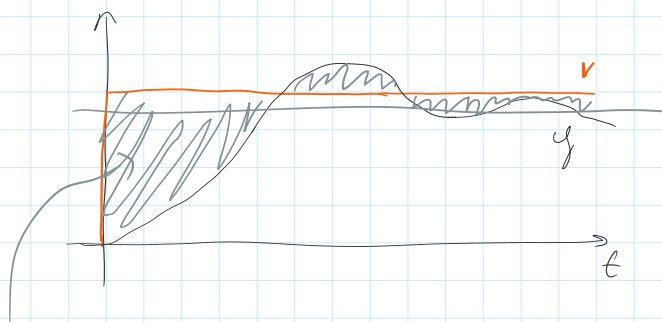


alapjel követés

↳ konstans $r = cte \rightarrow$ értéktartó

↳ időben változó $\rightarrow$ pályakövető

$e \rightarrow 0$ zavarelyomlás

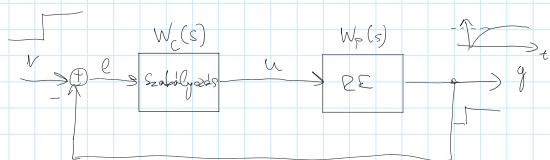


hibaintegrálok $e = r - y$

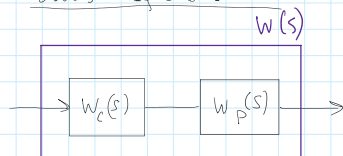
$$I_{QE} = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$$

$$I_{AE} = \int_0^{\infty} |e(t)| dt$$

$$I_{TAE} = \int_0^t t \cdot |e(t)| dt$$

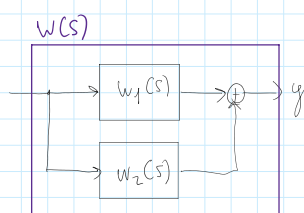


Soros kapcsolás



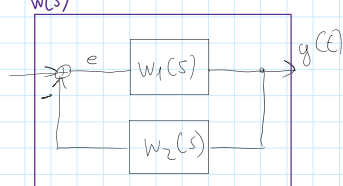
$$w(s) = w_c(s) \cdot w_p(s)$$

Párhuzamos kapcsolás



$$w(s) = w_1(s) + w_2(s)$$

Viszacsatolás



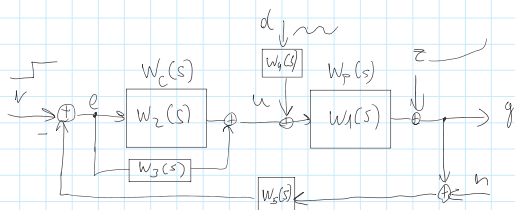
$$w_0(s) = w_1(s) w_2(s) \quad \text{felnyitott kör átviteli fvk.}$$

$$Y(s) = w_1(s) E(s)$$

$$Y(s) = w_1(s) (U(s) - w_2(s) Y(s))$$

$$(1 + w_1(s) w_2(s)) Y(s) = w_1(s) U(s)$$

$$w(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{w_1(s)}{1 + w_1(s) w_2(s)} = \frac{w_1(s)}{1 + w_0(s)}$$



$$w_0 = (w_2 + w_3) + w_1 \cdot w_5$$

$$Y(s) = w_{gr}(s) \cdot Z(s) = \frac{(w_2 + w_3) \cdot w_1}{1 + (w_2 + w_3) w_1 w_5} \cdot Z(s)$$

$$w_{gr}(s)$$

$$Y_d(s) = w_{gd}(s) \cdot D(s) = \frac{w_4 \cdot w_1}{1 + w_0} \cdot D(s)$$

$$Y_z(s) = w_{yz}(s) \cdot Z(s) = \frac{1}{1 + w_0} \cdot Z(s)$$

$$Y_z(s) = W_{yz}(s) \cdot Z(s) = \frac{1}{1+W_0} \cdot Z(s)$$

$$Y_n(s) = W_{yn}(s) \cdot N(s) = \frac{-W_5 \cdot (W_3 + W_2) \cdot W_1}{1+W_0} \cdot N(s)$$

$$Y(s) = Y_r(s) + Y_d(s) + Y_z(s) + Y_n(s)$$

i: integrátorok száma

$$W_{y_g} = \frac{\frac{K}{s^i} W_0}{1 + \frac{K}{s^i} W_0}$$

$$r(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s W_{y_r}(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{K}{s^i} W_0}{1 + \frac{K}{s^i} W_0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{K}{s^i} W_0}{s^i + K W_0}$$

① $i=0$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{K \cdot W_0}{1 + K W_0} = \frac{K}{1+K}$$

② $i \geq 1$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{K}{s} W_0}{s + K W_0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{K W_0}{s}}{s + K W_0} = 1$$

Egységugrás jelére !!!

$$y_d(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s W_{y_d}(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$y_d(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{K}{s^i} W_0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{s^i + K W_0}{s^i}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^i}{s^i + K W_0}$$

$i=0$

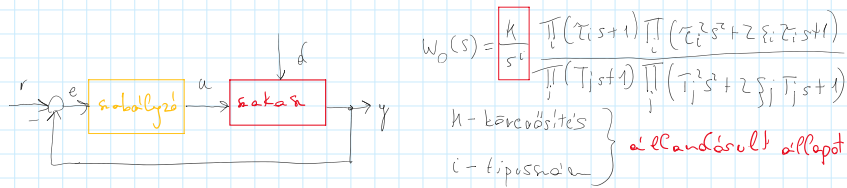
$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + K W_0} = \frac{1}{1+K}$$

$i \geq 1$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s + K W_0} = 0$$

Más jelnél több integrátor kell

Tranziensek és stabilitás



$$\frac{r}{d} \rightarrow \frac{e}{y} = \frac{1}{1 + W_0(s)}$$

Tranziensek - pólusok

$$1 + W_0(s) = 1 + \frac{K}{s^i} \cdot W_{0f}(s) = 1 + \frac{K}{s^i} \frac{P_{0f}(s)}{Q_{0f}(s)} = 0$$

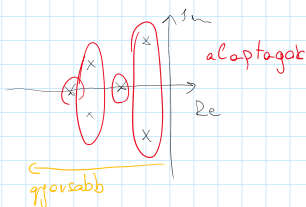
$$s^i Q_{0f}(s) + K P_{0f}(s) = 0 \quad \text{zárt kör karakterisztikus egyenlete}$$

gyökei $\equiv$ zárt kör pólusai $\rightarrow$ tranziensek

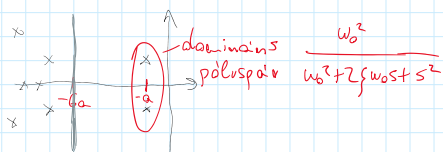
= felnyitott kör pólusai: $K \neq 0$

= felnyitott kör zérusai: $K = \infty$

pólus zérus elrendezés



Domináns pólus(pár)

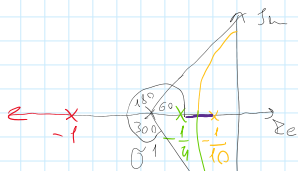


Gyök helyőrből

$s^i Q_{0f}(s) + K P_{0f}(s) = 0$ gyökeinek (zárt kör pólusai) helye
 komplex síkon ahogy $K \in [0, \infty]$ változik

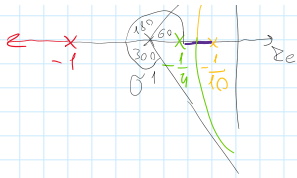
Példa: $W_0(s) = \frac{1}{(s+1)(4s+1)(10s+1)} = \frac{1}{s^0} \frac{1}{(s+1)(4s+1)(10s+1)}$

$-$ fokadama $\neq 0$ zérus
 $-$ fokszáma $= 3$ pólok



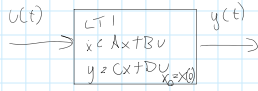
$$\sigma_1 = \frac{-1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{10}}{3}$$

$$\theta_1 =$$



$$\Theta_1 =$$

Stabilitás:



$$y(t) = \underbrace{C e^{At} x_0}_{\text{zero input}} + \underbrace{\int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t)}_{\text{zero state}}$$

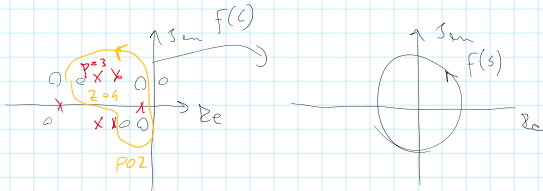
zérus bemenet stabilitás: **Lovaltos**

zérus kiáramlás stabilitás: **Lovaltos**

STABILITÁS $\Leftrightarrow \forall$ pólus
bal féltekén

Nyquist-kritérium: (argumentum elv)

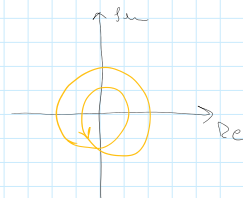
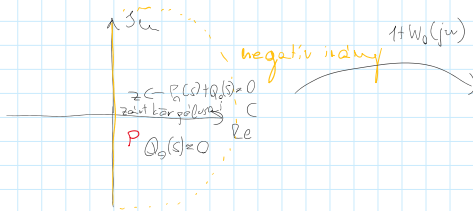
$$EKVSZ(f(c), 0) = Z - P$$



Stabilitás

$1+W_0(s)$ -nek nincs zérusa a jobb féltekén

$$1+W_0(s) = 1 + \frac{P_0(s)}{Q_0(s)} = \frac{P_0(s) + Q_0(s)}{Q_0(s)} \rightarrow \text{zérusok a zárt kör pólusai}$$



stabilitás: $Z \geq 0$

$$EKVSZ(1+W_0(jw), 0) = P - Z$$

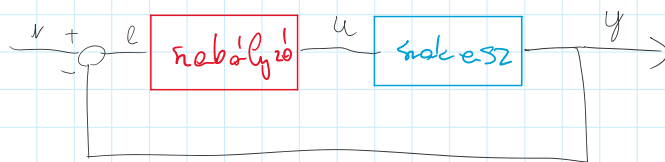
$$EKVSZ(W_0(jw), -1) = P$$

Nyquist görbe

$\Leftrightarrow$ stabil zárt kör

stabilitás, PID szabályzó

$$\text{EKVSZ}(W_0(j\omega); -1)_{\text{JFS}} \Leftrightarrow \text{STABILITÁS}$$



zárt kör
átviteli

$$W_0(s) = \frac{k}{s^i} W_{01}(s) - \text{transziens}$$

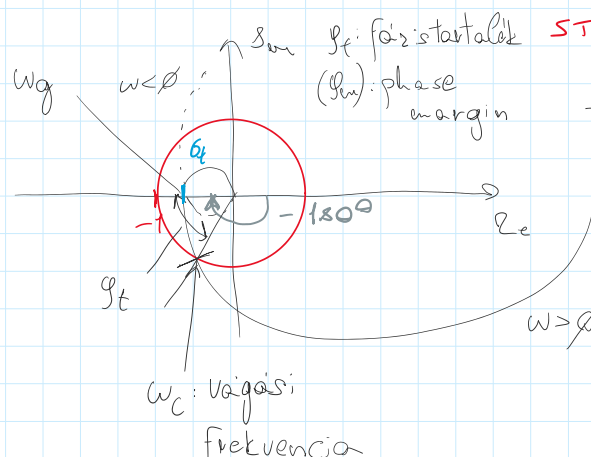
állandósult
állapot

$$\frac{1}{1 + W_0(s)}$$

zérusai
a zárt kör
pólusai

Egyszerűsített Nyquist kritérium

$W_0(s)$ labilis pólusainak száma ϕ ($P_{0\text{JFS}} = 0$)



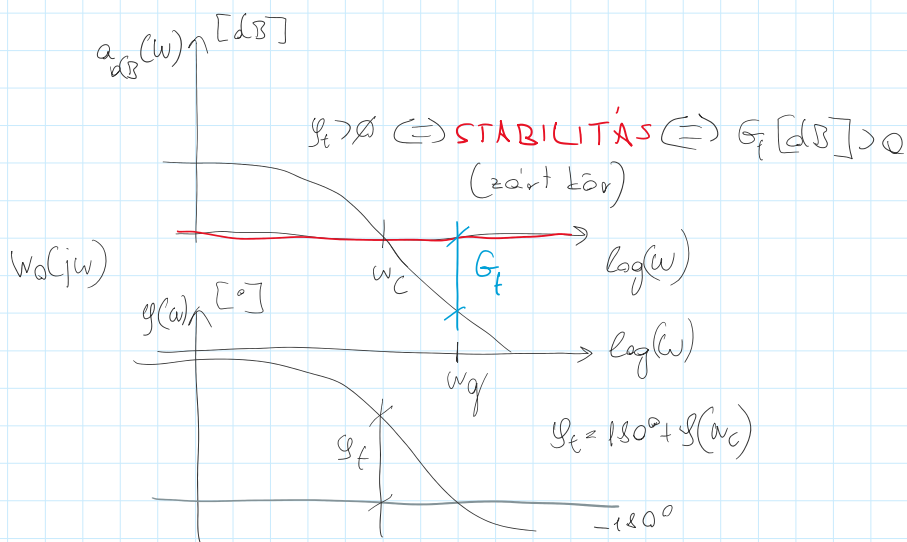
$$\text{STABILITÁS} \Leftrightarrow \text{EKVSZ}(W_0(j\omega); -1) = 0$$

$-W(j\omega)$ egyenes metszi az

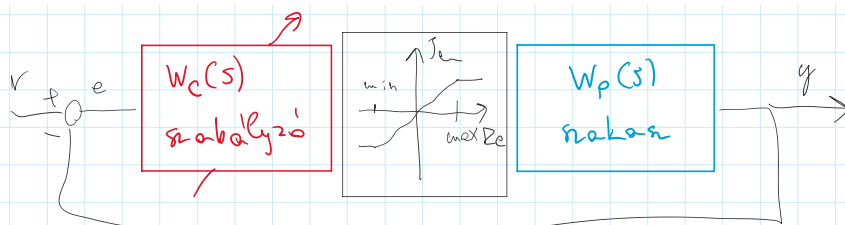
egységkört ($\omega > \phi$ -re)

G_t : erősítés tartalek
(G_m)

Bode-kritérium



radián: $\phi_t > \pi + \phi(\omega_c)$



Soros szabályzó

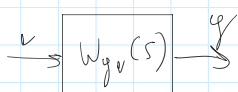
2o 2x (4 paraméter)

PID

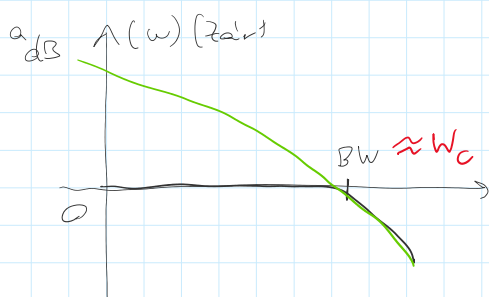
hangolási szempontjai

- STABILITÁS
- transziensek (sávszélesség)
- állandósult állapot
- beavatkozó jel (u) korlátos

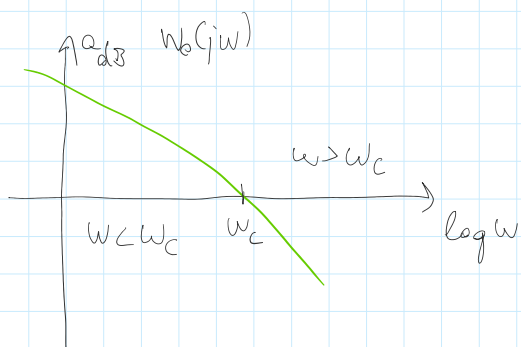
Szabályzási kör sávszélessége



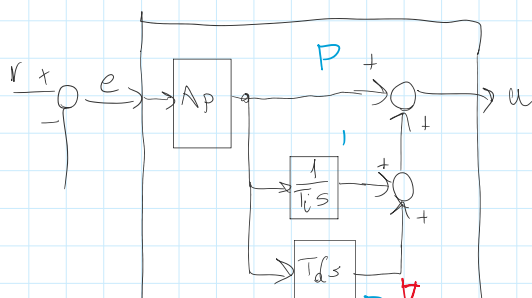
$$W_{gv}(s) = \frac{W_o(s)}{1 + W_o(s)}$$



jö → BW nagy



PID-szabályzó

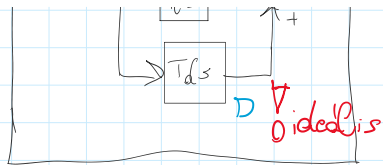


paraméterek:

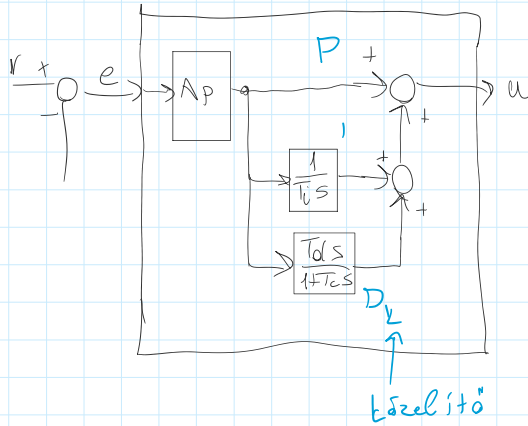
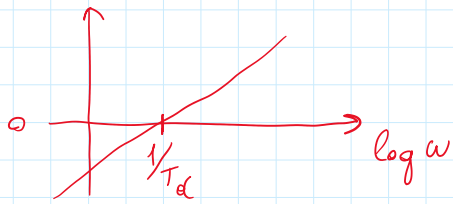
A_p : erősítés

T_i : integrálási idő

T_d : deriválási idő

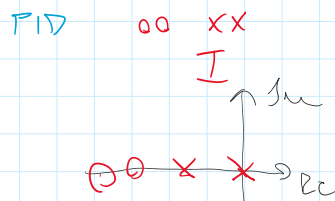
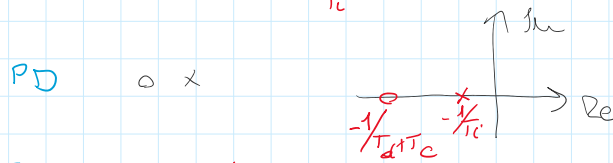
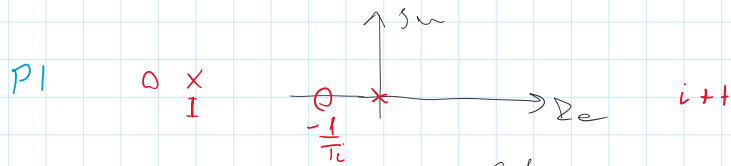


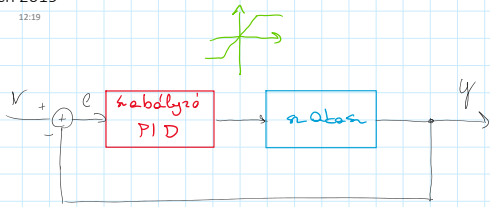
T_d : deriválási idő



T_c : időállandó

$$W_{PID}(s) = A_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + T_c s} \right) = \frac{A_p}{T_c} \frac{(T_d + T_c) T_i s^2 + (T_i + T_c) s + 1}{s(1 + s T_c)}$$





$$W_0(s) = W_{PID}(s) \cdot W_P(s) \text{ - hurokátvitel}$$

$$W_{PID}(s) = A_P \left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{sT_c} \right)$$

P I D

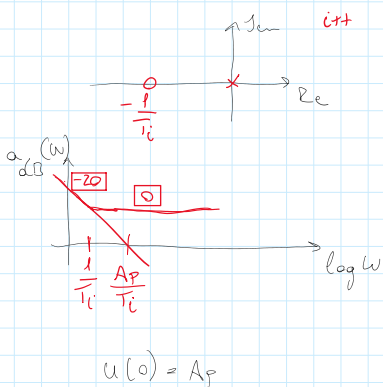
Tervezési szempontok:

φ_t adott

$\beta W \rightarrow$ nagy

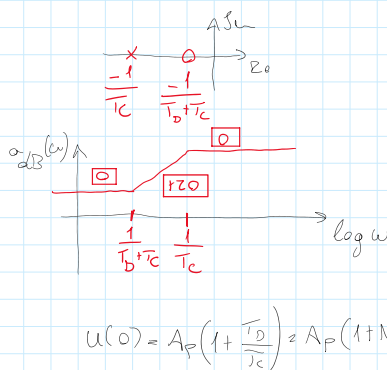
$|u| < U_{max}$

PI $W_{PI}(s) = \frac{A_P}{T_i} \frac{1+sT_i}{s}$

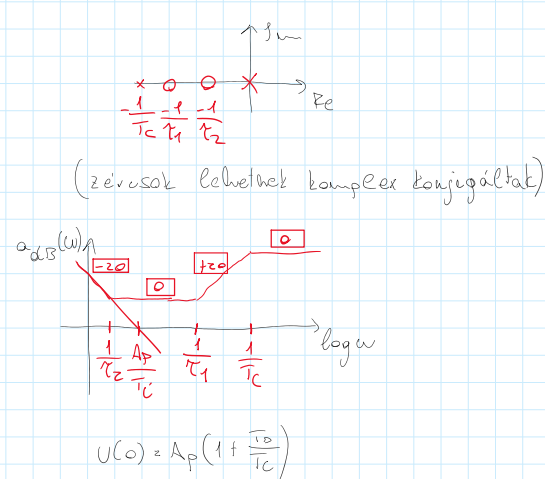


PD $W_{PD}(s) = A_P \frac{1+s(T_d+T_c)}{1+sT_c}$

$T_d/T_c = N$ túlzásiróls override

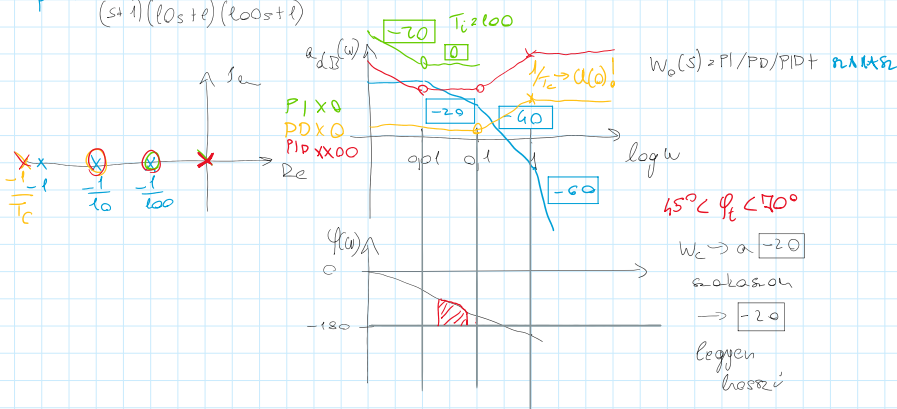


PID $W_{PID}(s) = \frac{A_P}{T_i} \frac{s^2 T_c (T_d+T_c) + (T_c+T_c)s + 1}{s(1+sT_c)}$



Hurokformálás **zérus - pólus** kifejtéssel

$$W_P(s) = \frac{1}{(s+1)(10s+1)(100s+1)}$$



Egyenletrendszer $\rightarrow$ fázis tartomány és $u(0)$ beállítása (PID, PD)

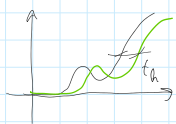
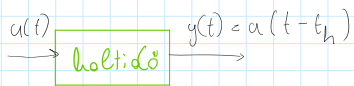
$$\pi + \arg W_0(j\omega_c) - \varphi_t = 0 \quad A_{PI} W_c T_c$$

$$|W_0(j\omega_c)| - 1 = 0$$

$$u(0) - u_{max} = A_P(1+N) - u_{max} = 0 \quad \text{fázis utasítás}$$

Holtidő (ideális beállítási) a szabályzósi körben

Holtidő (ideális késleltetés) a szabályzási körben

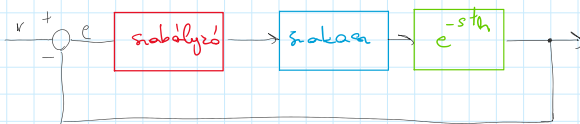
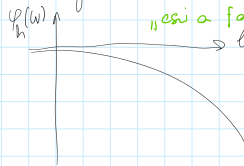


$$W_h(s) = e^{-st_h}$$

$$|W_h(j\omega)| = 1$$

$$\arg W_h(j\omega) = -\omega t_h$$

„ez a fázis!”
→ $\log \omega$

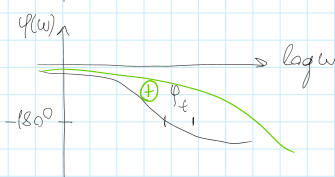
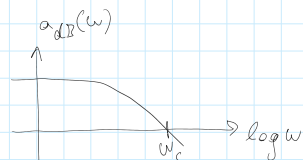


$$W_0(s) = W_c(s) \cdot W_p(s)$$

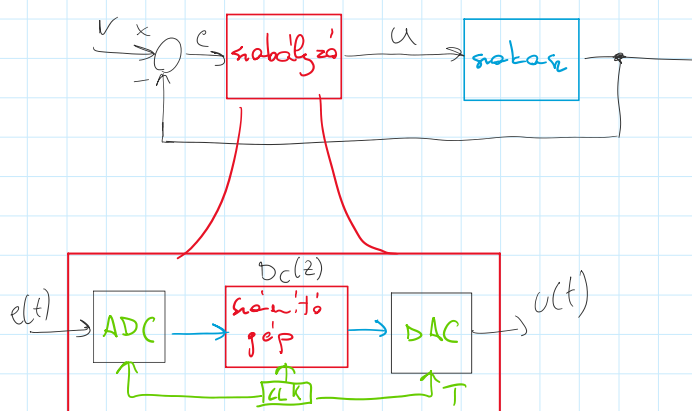
$$W_0'(s) = W_0(s) e^{-st_h}$$

késleltetésstartalék

$$t_h \text{ - "vegyes" } \varphi_t - t$$



Mintavételezés a szabályzási körben



$$W_{PID}(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_D}{1+sT_C} \right) \xrightarrow{T} D_c(z)$$

P I D

specifikáció: $-BW \nearrow$

$$-\varphi_e \in [50^\circ; 70^\circ]$$

holdidő

$$p_h = -\omega T_h$$

$D_c(z)$ - szabályzó (impulzus)átviteli függvénye

T - mintavételi periódusidő

Shannon-tétel (jelrekonstrukció)

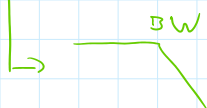
$$u_k \Rightarrow u(t)$$

- súlykorlát ($u(t)$ -re) $\sim \omega_c \times$

- ideális elvátartomány $\times$

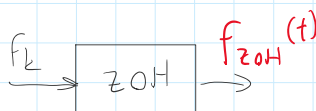
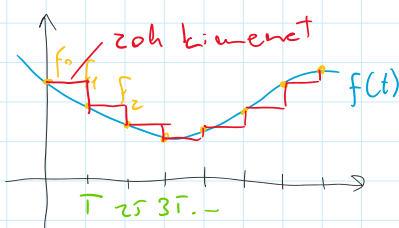
- végtelen összeg

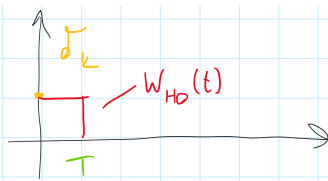
- nem kauzális



Tartóerő (ideális LPF helyett)

Nulladrendű (zero order hold)





$$W_{HO}(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)$$

$$W_{HO}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sT}$$

$\Rightarrow \frac{T}{2}$ holdidő

T -sámítás

1.) $W_{PID}(s)$ méretezése folytonos időben $\rightarrow \omega_c, \varphi_t$

2.) ZOH-t használunk $\rightarrow$ holdidő

3.) megadjuk a φ_t mintavételezés miatt bekövetkező maximális romlást $\sim [10; 50]$

$$\omega_c \cdot \frac{T}{2} = 5 \frac{\pi}{180} \rightarrow T = \frac{\pi}{18 \omega_c}$$

$$W_{PID}(s) \rightarrow D_c(z)$$

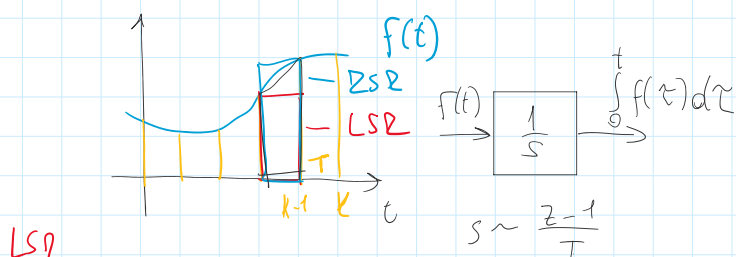
$\frac{1}{s}$ - integrálás

s - deriválás

z^{-1} - késleltetés

$$= e^{-sT} \quad z = e^{sT} \quad \times$$

Operátoros közelítés



LSR

$$f_I(k-1) + f(k-1)T = f_I(k) \quad /Z\{\}$$

$$F_I(z)(1 - z^{-1}) = TF(z)z^{-1}$$

$$\frac{F_I(z)}{F(z)} = \frac{Tz^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{T}{z - 1}$$

RSR

$$f_I(k-1) + f(k)T = f_I(k) \quad /z\{ \}$$

$$F_I(z)(1 - z^{-1}) = TF(z)$$

$$\frac{F_I(z)}{F(z)} = \frac{Tz}{z-1} \quad s \sim \frac{z-1}{Tz}$$

Trapez

$$f_I(k-1) + \frac{T}{2} (f(k) + f(k-1)) = f_I(k) \quad /z\{ \}$$

$$\frac{F_I(z)}{F(z)} = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} \quad s \sim \frac{z-1}{\frac{T}{2}(z+1)}$$

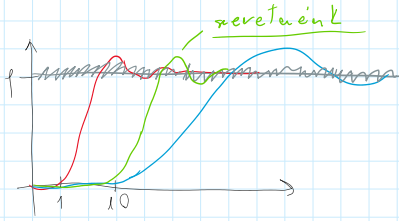
Tustin képlet

Smith-prediktor is edges healthci analyzed

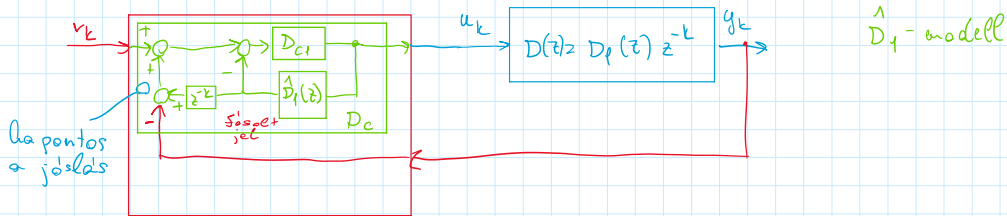
Switth-prediktor:

probléma: "nagy" készletelés a mályogzás körében
(időállóbbokhoz képest)

$$t_u = 1s \quad W_p = \frac{1}{(5s+1)(2s+1)} e^{-s} \quad t_u = 10s \quad W_p = \frac{1}{(5s+1)(2s+1)} e^{-10s}$$



Fisikali tallepe a holtid n'k'oli kinematet. Minden diskret időben ($t_k = k \cdot T_s$)



Zárt kör átvitele

$$D_C = \frac{D_{C1}}{1 + D_{C1} \hat{D}_1^* (1 - z^k)}$$

$$D_{ce} = \frac{D_c \cdot D_1 \cdot z^{-k}}{1 + D_c D_1 z^{-k}} = \frac{\frac{D_{c1} D_1}{1 + D_{c1} D_1 (1 - z^{-k})}}{1 + \frac{D_{c1} D_1 z^{-k}}{1 + D_{c1} D_1 (1 - z^{-k})}} z^{-k} =$$

$$z \frac{D_{c1} D_1}{1 + D_{c1} \hat{D}_1 - \underbrace{D_{c1} \hat{D}_1 z^{-k}} + \underbrace{D_{c1} D_1 z^{-k}}}$$

$$\xrightarrow{z^{-k}} \frac{D_{c1} D_1}{1 + D_{c1} D_1} z^{-k}$$

$D_1 = \hat{D}_1$

Veiges beallaisó snabalyzais (dead-beat)

FIZ. átváltozások: véges imp. változás

$$g(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n} = z b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}$$

z^{-1} hatvengai szerint polinom



Állapoterés analízis folytonos időben (indukálhatóság, megfigyelhetőség)

Állapotegyenlet

$$\frac{d}{dt} \leftarrow \dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

MIMO

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$y \in \mathbb{R}^p$$

$$u \in \mathbb{R}^m$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ (szorlop)}$$

$$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$C \in \mathbb{R}^{p \times n}$$

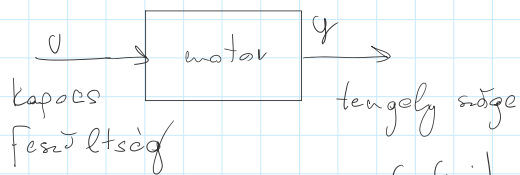
$$D \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

SISO

$$m=1$$

$$p=1$$

példa: DC motor



c_1, c_2 : katalógus adat

$$U - c_1 \omega = R_r i + L_r \dot{i}$$

$$c_2 \cdot i = \Theta \dot{\omega} + f \omega$$

$$\dot{y} = \omega$$

$$\begin{array}{l} x_1 = i \\ x_2 = \omega \\ x_3 = y \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{\omega} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_r}{L_r} & \frac{c_1}{L_r} & 0 \\ \frac{c_2}{\Theta} & -\frac{f}{\Theta} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U$$

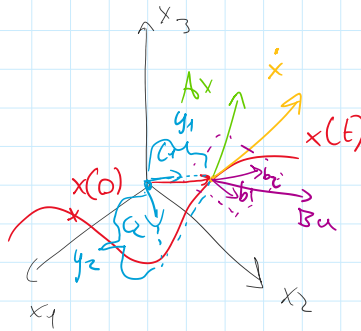
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega \\ y \end{bmatrix}$$

Geometria

$$n=3 \quad m=2 \quad p=2$$

$$\dot{x} = Ax + [b_1 \ b_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = y = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} x$$



megoldás

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau e)} B u(\tau e) d\tau e$$

Bázis transzformáció

$$z = Tx \quad (T = \text{const}, \exists T^{-1})$$

$$\dot{z} = T \dot{x} + \dot{T} x = \underbrace{T A T^{-1}}_{\tilde{A}} z + \underbrace{T B}_{\tilde{B}} u$$

$$y = \underbrace{C T^{-1}}_{\tilde{C}} z + \underbrace{D}_{\tilde{D}} u$$

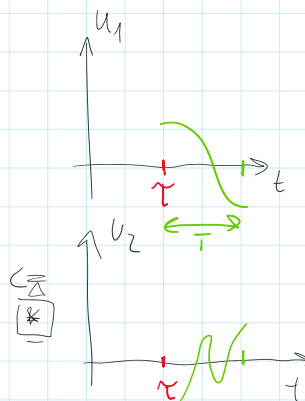
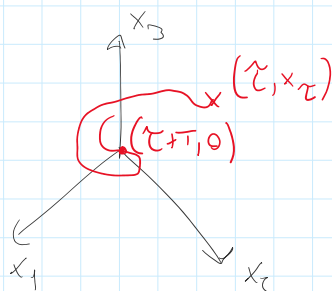
$$W(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

A bázis cseréje az átvitelt nem változtatja meg

Stabilitás és elérhetőség

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x + D(t)u \end{aligned} \right\} \begin{matrix} \text{LTV} \\ \text{linear time variant} \end{matrix}$$

Stabilitás (origóba)

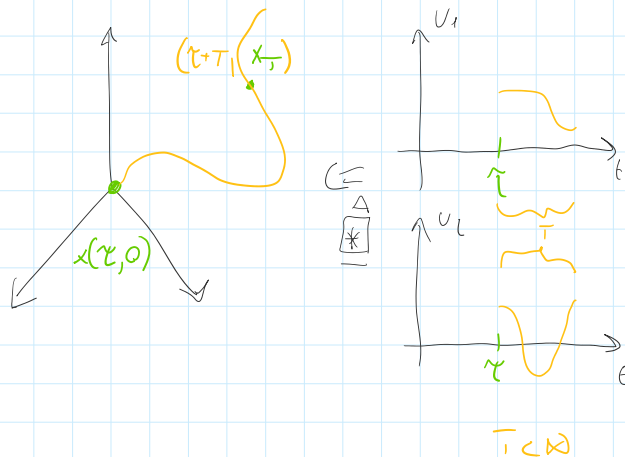




Def: $\begin{bmatrix} \Delta \\ * \end{bmatrix}$ rendszer irányítható, ha $\forall \tau, \forall x_\tau \in \mathbb{R}$ -re létezik

$u(t)$: $t \in [\tau, \tau+T]$ hogy $x(\tau+T) = x_\tau$.

Érőhetőség: (origóból)



$\begin{bmatrix} \Delta \\ * \end{bmatrix}$ rendszer erőható, ha $\forall \tau, \forall x_\tau$ -re $\exists u(t) : t \in [\tau, \tau+T]$,
hogy $x(\tau+T) = x_\tau$

LTI rendszerek esetében

erőhatóság = irányíthatóság

Kritérium (LTI rendszerekre) (Kaldman)

$$\Pi_C = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{(n-1)}B \end{bmatrix}$$

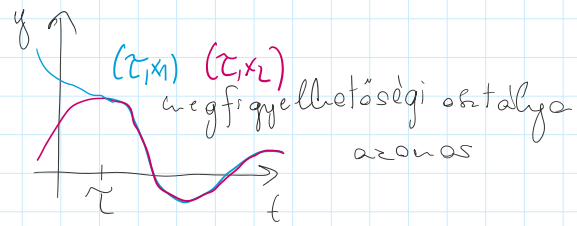
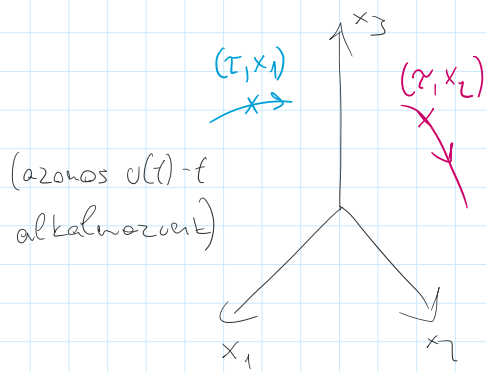
irányíthatósági mátrix

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{array} \right\} \text{irányíthatóság} \Leftrightarrow \text{rank } \Pi_C = n$$

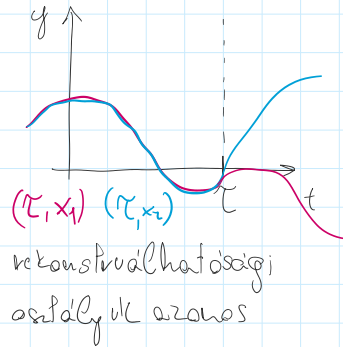
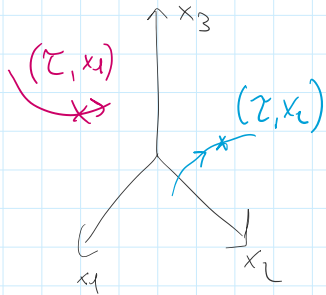
$$\Leftrightarrow (\text{siso}) \det \Pi_C \neq 0$$

Megfigyelhetőség és rekonstruálhatóság

Megfigyelhetőség



Rekonstruálhatóság



Kritérium (Megfigyelhetőség) (kálánán) LTI: megfigyelhető $\Leftrightarrow$ rekonstruálható

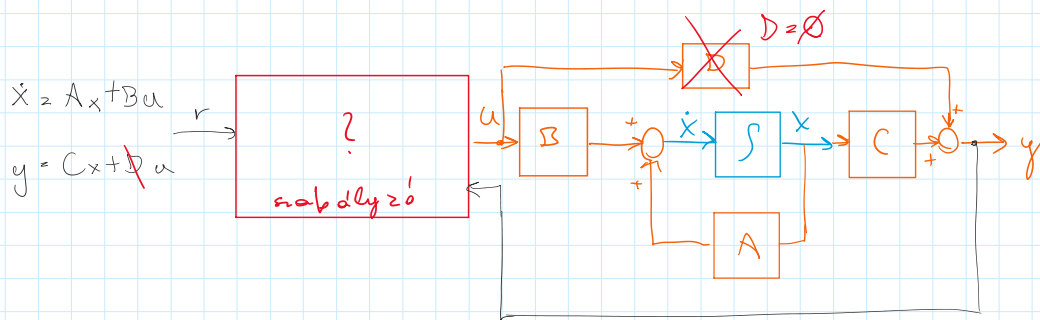
$$\text{Megfigyelhetőség} \Leftrightarrow \text{rank}(M_o) = n$$

$$\Leftrightarrow (\text{siso}) \det(M_o) \neq 0$$

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

M_o : megfigyelhetőségi mátrix

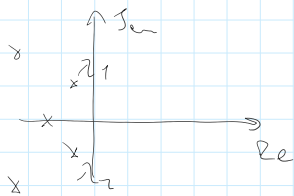
Állapotheres tervezés folytonos időben



Ackermann-képlet, algebrai feladat

adott A mátrix és B oszlopvektor. Keressük K sorvektort,

hogy $H = A - BK$ sajátértékei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ legyenek



$\varphi_c(\lambda) = \lambda^n + h_1 \lambda^{n-1} + \dots + h_{n-1} \lambda + h_n$ - H karakterisztikus
 egyenlete, gyökei: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

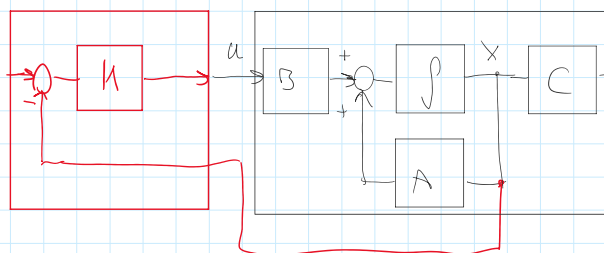
$$\varphi_c(A) = \Pi_c \begin{bmatrix} \vdots \\ k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ k \end{bmatrix} = \Pi_c^{-1} \cdot \varphi_c(A)$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \Pi_c^{-1} \varphi_c(A) \quad \boxed{\text{Ack}}$$

Ackermann-képlet

1.) Pólusát helyezés állapotviszacsatolásral



$$K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]$$

$$u = -Kx$$

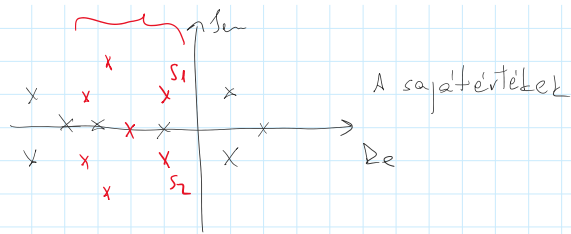
$$\dot{x} = Ax + B(-Kx) \text{ - zárt kör állapotegyenlete}$$

$$\dot{x} = (A - BK)x$$

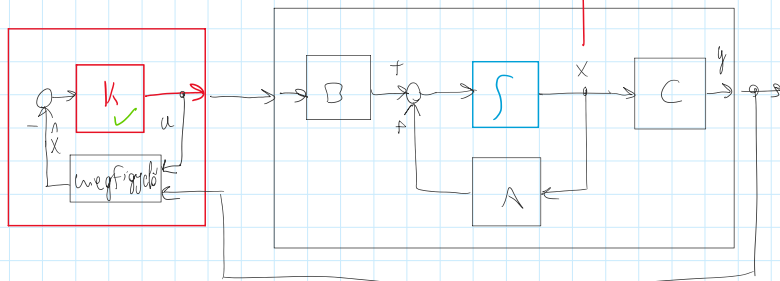
n db

legyenek a zárt kör sajátértékei $s_1, s_2, \dots, s_n \rightarrow$

$$\rightarrow \varphi_c(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i) \xrightarrow{\text{Ack}} K$$



2.) Állapotmegfigyelő



hiba
 $\hat{x} - x = e \rightarrow 0$

megfigyelő:

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + Hu + Gy$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - C\hat{x})$$

$$F = A - GC$$

$$H = B$$

Ack közzétlenül nem alkalmazható, de

$$\text{s.é. } (A - GC) = \text{s.é. } (A - GC)^T$$

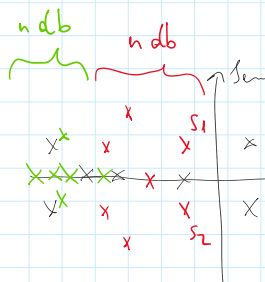
$$(A - GC)^T = A^T - G^T C^T$$

$\Downarrow$

$$G^T \leftarrow \text{Ack} \quad A^T, C^T$$

$$\varphi_0(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i)$$

s_i - megfigyelő $(A^T - G^T C^T)$ sajátértékei



$$x - F = A - GC$$

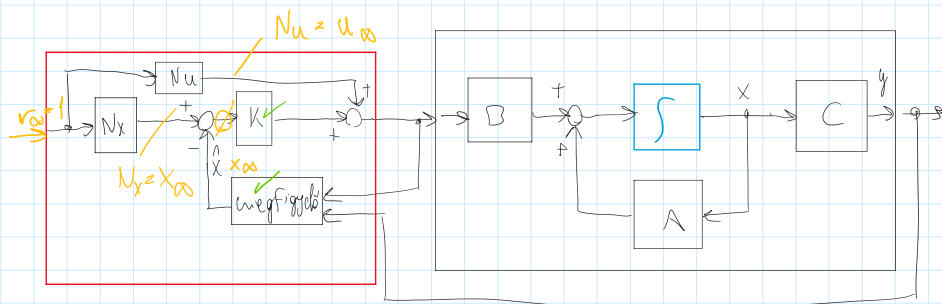
$$x - A - BK$$

$$K = \text{Ack} \quad A, B, \varphi_c$$

$$G = \text{Ack} \quad A, C, \varphi_0$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Alapjel előírtése (N_x, N_u)

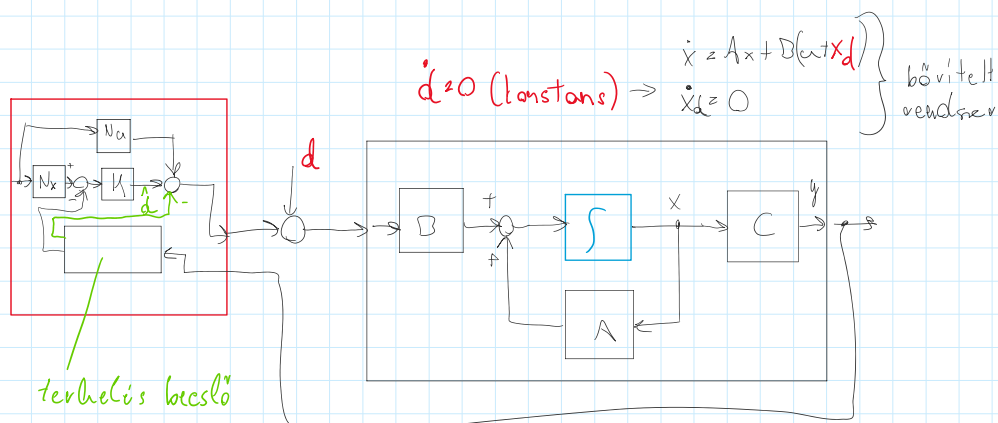


→ nemritésok állandósult állapotból

és $r(t) = \varepsilon(t)$ feltételezéssel

állandósult jelek: $u_\infty, y_\infty, x_\infty$

$$\left. \begin{array}{l} 0 = A x_\infty + B u_\infty \\ 1 = C x_\infty \end{array} \right\} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



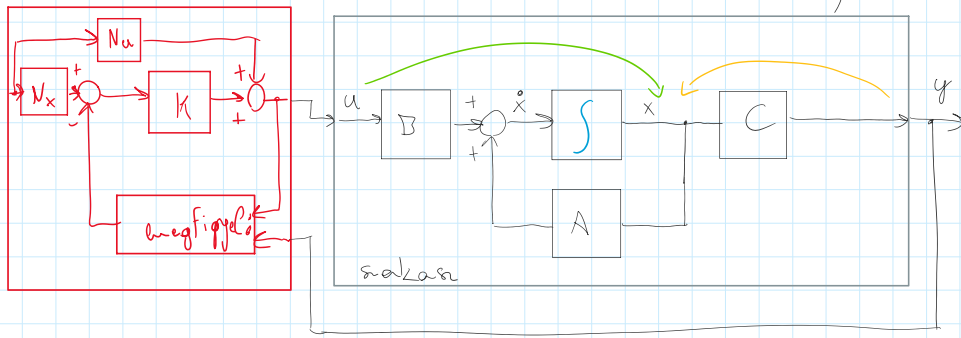
$$\dot{d} = 0 \text{ (constants)} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} = A x + B(u + x_d) \\ \dot{x}_d = 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{bővített} \\ \text{rendszer} \end{array} \right.$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_d \end{bmatrix} \quad \dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_d \end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{\tilde{x}}} = \hat{\tilde{A}} \hat{\tilde{x}} + \hat{\tilde{B}} u + G(y - \hat{\tilde{C}} \hat{\tilde{x}})$$

Állapotteres módterek diszkrét időben (analízis és szintézis)



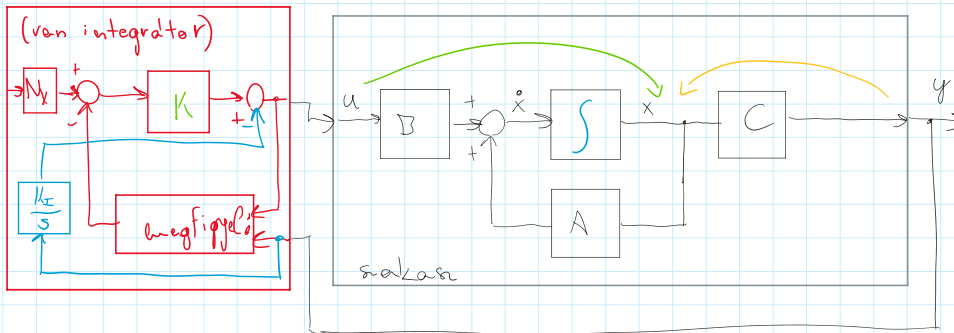
extrakt

- terhelésbeeslő
- integrátor $\rightarrow$

$$x_I = \int_0^t y d\tau \rightarrow \dot{x}_I = y = Cx \rightarrow \text{bővített állapotegyenlet:}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix}$$



Állapotviszacsatolás

$$\tilde{K} = [K \ K_I]$$

$$u = -\tilde{K}x - K_I x_I$$

Diszkrét idő

feladat: diszkrét szabályzó

$\leftarrow$ mérve terük egy folytonos idejű szabályzót, majd czd

$\leftarrow$ szabályzót czd, majd ehhez mérve terük egy diszkrét szabályzót

állapotegyenlet:

reverzibilis rendszer:

$$\begin{cases} x_{i+1} = \phi x_i + \Gamma u_i \\ y_i = C x_i + D u_i \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi^{-1}} \quad x_i = \phi^{-1} x_{i+1} - \phi^{-1} \Gamma u_i$$

$$y_N = C \phi^N x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} C \phi^{N-(k+1)} \Gamma u_k + D u_N$$

$$y_k = \phi^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \phi^{k-(j+1)} \Gamma u_j + D v_k$$

Elérhetőség: (origóból, $n = \dim \times$ lépésben)

x_n elérhető, ha $\exists \{u_i\} = \{u_0, \dots, u_{n-1}\}$, hogy

$$x_n = x_v$$

Irányíthatóság: (origóba, $n = \dim \times$ lépésből)

$x_n \neq \emptyset$ irányítható, ha $\exists \{u_i\} = \{u_0, \dots, u_{n-1}\}$, hogy

$$x_n = \emptyset$$

Elérhetőség kritériuma: $(s, s_0) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \exists \Pi_c^{-1}$

$$x_1 = \Gamma u_0$$

$$x_2 = \phi \Gamma u_0 + \Gamma u_1$$

$$x_3 = \phi^2 \Gamma u_0 + \phi \Gamma u_1 + \Gamma u_2$$

$\vdots$

$$x_n = x_n = \phi^{n-1} \Gamma u_0 + \dots + \Gamma u_{n-1} = \overbrace{[\Gamma \phi \Gamma \dots \phi^{n-1} \Gamma]}^{\Pi_c} \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{n-1} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} = \Pi_c^{-1} x_n$$

Irányíthatóság kritériuma (reverzibilis, $s \neq s_0$) $\Leftrightarrow \exists \Pi_c^{-1}$

$$\emptyset = \phi^n x_0 + \Pi_c \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}$$

$$\phi^n x_0 = -\Pi_c \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}$$

Megfigyelhetőség Rekonstruálhatóság

$$\{u_i\}, \{y_i\} \quad (i=0, \dots, n-1)$$



$$y_k = C \phi^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} C \phi^{k-(j+1)} \Gamma a_j + D u_k$$

Megfigyelhetőség

$$\bar{y}_k = y_k - \square$$

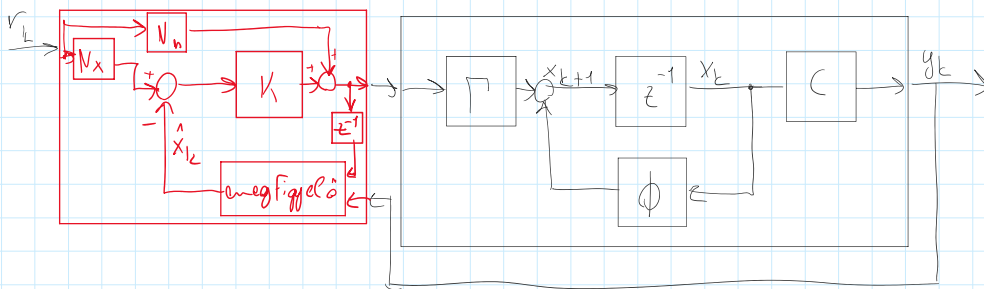
$$\left. \begin{array}{l} \bar{y}_0 = C x_0 \\ \bar{y}_1 = C \phi x_0 \\ \vdots \\ \bar{y}_n = C \phi^{n-1} x_0 \end{array} \right\} \begin{bmatrix} \bar{y}_0 \\ \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_{n-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ C \phi \\ \vdots \\ C \phi^{n-1} \end{bmatrix}}_{M_0} x_0$$

$$x_0 = M_0^{-1} \begin{bmatrix} \bar{y}_0 \\ \vdots \\ \bar{y}_{n-1} \end{bmatrix}$$

Megfigyelhetőség (siso) $\Leftrightarrow \exists M_0^{-1}$

$\Updownarrow$
rekonstruálhatóság (siso, reverzibilis)

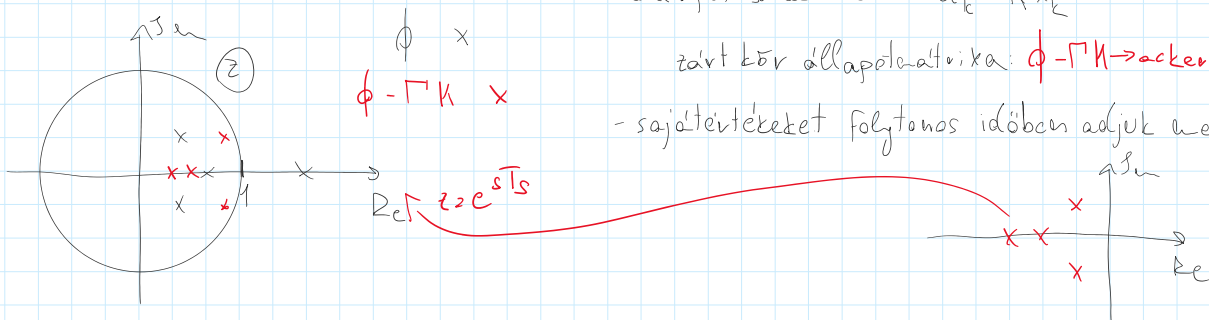
Stabilitás tervezés (állapottervezés, diskret)

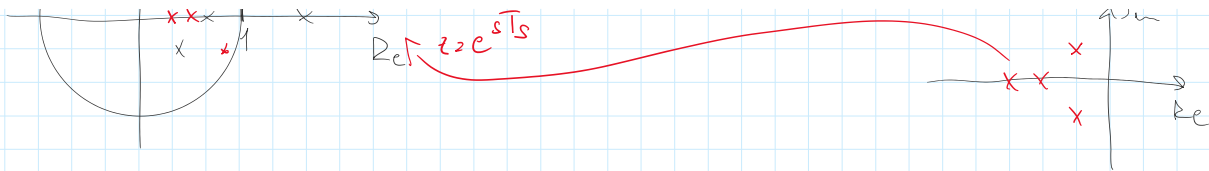


- állapotviszacsatolás $u_k = -K x_k$

zárt kör állapotmátrixa: $\phi - \Gamma K \rightarrow \text{acker} \rightarrow K$

- sajátértékeket folytonos időben adjuk meg





'AlCapotmegfigyelő' -aktualis

$$\hat{x}_k = F \hat{x}_{k-1} + H u_{k-1} + G \underline{y_k}$$

$$\bar{x}_k = \phi \hat{x}_{k-1} + \Gamma u_{k-1} \quad \text{predikció}$$

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + G(y_k - C\bar{x}_k) \quad \text{korrekció}$$

$$e_k = \hat{x}_k - x_k =$$

$$= \phi \hat{x}_{k-1} + \cancel{\Gamma u_{k-1}} + G(C x_k - C \phi \hat{x}_{k-1} - C \Gamma u_{k-1}) - \phi x_{k-1} - \cancel{\Gamma u_{k-1}} =$$

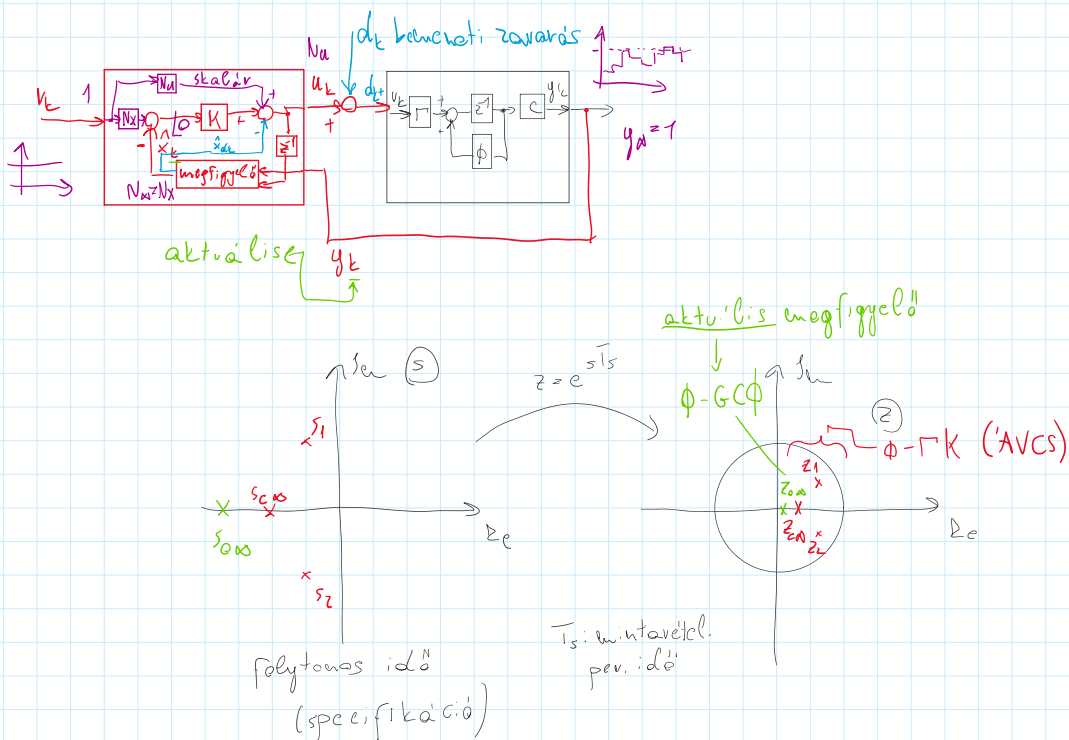
$$= \phi (\hat{x}_{k-1} - x_{k-1}) + G C (\phi x_{k-1} + \cancel{\Gamma u_{k-1}} - \phi \hat{x}_{k-1} - \cancel{\Gamma u_{k-1}}) =$$

$$= \phi - G C \phi (e_{k-1})$$

Állapotteres vezérlés (direkt idő), skalár sűrűs

Számítógépes riánél könyv is használható

- soros kompenzátor mindig
- 2DOF
- állapotteres vezérlés folytonos időben
- ———— " ———— diskret időben



Alapjel erősítése (állandósult állapot, hogy $v_L = E_L$)

$$u_\infty = N_u$$

$$x_\infty = N_x$$

állandósult állapot: $x_{k+1} = x_k = x_\infty = N_x$

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \Phi N_x + \Gamma N_u \\ y_\infty &= C x_\infty = C N_x = 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 0 &= (\Phi - I) N_x + \Gamma N_u \\ 1 &= C N_x \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \Phi - I & \Gamma \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - I & \Gamma \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \phi - I & \Gamma \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Techel'ésbecslő (bővített megfigyelő)

d_k - konstans $\rightarrow d_{k+1} = d_k \rightarrow$ legyen ez is állapot $x_{d,k}$

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{d,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & \Gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{d,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

$$x_{k+1} = \phi x_k + \Gamma (u_k + x_{d,k})$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \\ \tilde{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{d,k} \end{bmatrix} \rightarrow \text{aktíválás megfigyelő}$$

Integrátor (bővített állapotviszacsatolás)

új állapot: kiemelni integrálja

$$x_{I,k+1} = x_{I,k} + T_s y_k = x_{I,k} + T_s C x_k$$

bővített rendszer

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{I,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ T_s C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{I,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} C & 0 \\ \tilde{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{I,k} \end{bmatrix}$$

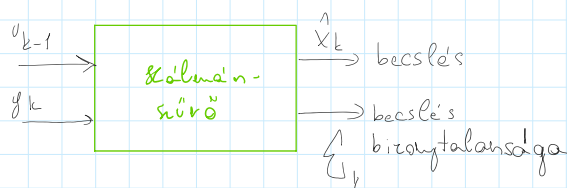
állapotviszacsatolás

Kalman-sűrű

- várható érték
- sűrűség, konfidencia intervallum
- kovariancia

← rendszer + z_{aj}

$$\left. \begin{aligned} x_k &= \phi x_{k-1} + \Gamma u_{k-1} + v_{k-1} \\ y_k &= C x_k + z_k \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{rendszerzaj} \\ \text{mérésizaj} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} v_{k-1} \\ z_k \end{array} \right\} \text{vk-ra val. változók}$$



Nonlinearis rendszerek - Ljapunov-módszer (stabilitás)

Lineáris rendszerek (időtartomány)

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad u = -Kx$$

stabilitás
rendszertulajdonság

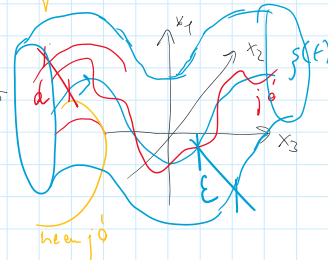
(átlapol)

$$\dot{x} = \bar{f}(x, u) \text{ visszacsatolás } u = g(x) \Rightarrow \dot{x} = \bar{f}(x, g(x)) = f(x) \quad (*)$$

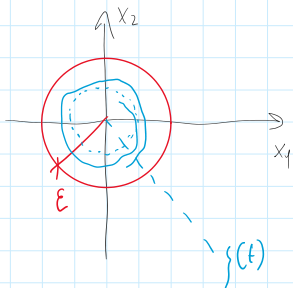
stabilitás?

Definíciók Tfl. $\xi(t)$ megoldása $(*)$ -nek

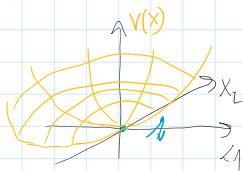
Ljapunov stabilitás
asimptotikus Ljapunov stabilitás



$$\text{Ha } \xi(t) \in \phi \quad (\phi = f(0))$$



Stabilitás vizsgálata - Ljapunov direkt módszere



$$V(0) = 0 \quad V(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$\frac{d}{dt} V(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot f < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

stabil

$\Leftrightarrow$ stabilitás

Ljapunov indirekt módszer

$$A = f'_x(0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=0}$$

Darab irányítása

