

$$(r, x_r) \mapsto S_r(x_r) := \text{a minimum költség az } r\text{-edik lépéstől}$$

$$\inf K_r(x_r, w_r, \dots, w_u)$$

legyen S_r az függvényezett Bellmann-fü.

$$S_{u+1}(x_{u+1}) = 0 \quad (\text{itt már befejeződött a folyamat})$$

Állítás

(1) A Bellmann-függvényre az teljesül, hogy

$$S_r(x_r) = \inf_{w_r \in W_r} l_r(x_r, w_r) + S_{r+1}(l_r(x_r, w_r))$$

$$r = 1, \dots, u$$

(2) az x_r és $w_j \in W_j$, $j = r, \dots, u$ változóikra $x_{j+1} = l_j(x_j, w_j)$, $j = r, r+1, \dots, u$ pontosan akkor teljesül, hogy

$$S_r(x_r) = K_r(x_r, w_r, \dots, w_u), \text{ ha}$$

$$S_j(x_j) = l_j(x_j, w_j) + S_{j+1}(x_{j+1}), j = r, \dots, u$$

Bizonyítás:

(1) -hez

$$K_r(x_r, w_r, \dots, w_u) = l_r(x_r, w_r) + \cancel{K_{r+1}(x_r, w_r)} + K_{r+1}(l_r(x_r, w_r), w_{r+1}, \dots, w_u)$$

$$\inf_{w_r, \dots, w_u}$$

$$\inf_{w_r} \inf_{w_{r+1}, \dots, w_u}$$

$$(2) - \text{höz } w_j \in W_j \quad x_{j+1} = f_j(x_j, w_j)$$

$$S_r(x_r) \leq l_r(x_r, w_r) + S_{r+1}(x_{r+1}) \leq \dots \\ \leq K_r(x_r, w_r, \dots, w_u)$$

A két szélső egyenlőség, akkor mindenképp egyenlőség áll $\Rightarrow (2)$

Következmény: Bellman -féle optimális

A követendő két állítás ekvivalens:

(1) A vezérlés optimális

$$x_j, w_j \in W_j, j = 1 \dots u \text{ változóira}$$

$$x_{j+1} = f_j(x_j, w_j) \text{ értékekkel}$$

$$S_1(x_1) = K_1(x_1, w_1, \dots, w_u).$$

$$(2) S_u(x_u) = K_u(x_u, w_u, \dots, w_u), \text{ ha}$$

$$u = 1, 2, \dots, u$$

Bellman módszer

$$S_j(x_j) = l_j(x_j, w_j) + S_{j+1}(x_{j+1}) - \text{két}$$

egyenletből optimális vezérlések

$$j = u, u-1, \dots, 1-x \quad x_j \text{ függvényében.}$$

"Nátulról visszafelé kell az optim.
megoldást megtalálni"

integráltr.: f_0 -hez másodk f_0 -t
 rendel hozzá

$$T_K(f)(y) = \int K(x, y) f(x) dx$$

lineáris
operátor

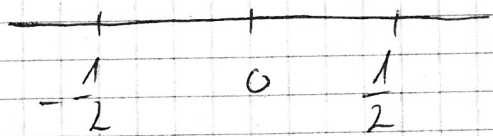
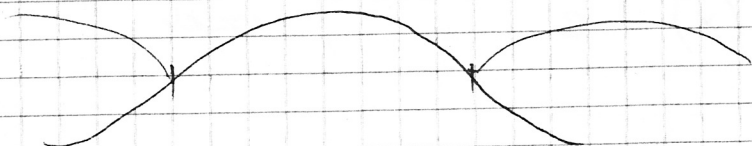
~~mag~~ függvény

$$e^{-2\pi i \langle x, y \rangle}$$

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow$ vektorek

Fourier tr.
ez a magf.

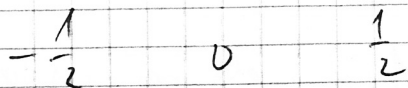
Nehéz művel valami lecsúsz-
műveletet csinal a brause formát.
 f_0 -ek halmozata-an
 (differenciál. polin. való szorzás,
 konvolúcióból szorzás)



Fourier-sor:

$$c_k \quad k \in \mathbb{Z}$$

(periódikus f_0 -ek-
 nál sorozatot
 csinál)



tartományt növelem, és
 az egyébként hatékony
 sűrűsítést

Fourier tr. közelítőleg Fourier sor
 is használható.

Fourier-transzformáció. Ha f az

$\mathbb{R}^n$ valamilyen részhalmazon értelmezett

fü., $x \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ -beli vektor),

~~de~~ s nullától különböző valós szám ($0 \neq s \in \mathbb{R}$),

akkor $\tau_x f$ az f eltolása, $\tau_s(f)$ az

f nyújtottja és f az f megszorítása

- $(\tau_x f)(y) = f(y - x)$

- $(\tau_s f)(y) = f\left(\frac{y}{s}\right)$

$\tau_s f$ az f húzása

- $\check{f}(y) = f(-y)$

Ha $t \in \mathbb{R}^n$, legyen $e_t(x) = e^{2\pi i \langle t, x \rangle}$, ezek
(csavarvonal)

a karakterek

$$e_t(x+y) = e_t(x) \cdot e_t(y), \text{ ha } x, y \in \mathbb{R}^n$$

(folyt. leképezések melyek az csavarvonal.
szorz. mérések át)

$$\overline{e_t(x)} = e_t(-x) = e_{-t}(x)$$

 komplex-t. f. - de x is defin.

Egy $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ függvény Fourier-tr.,

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{e_t(x)} dx =$$

formálisan egy érték
szorzat

↑
helyettesítés

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle t, x \rangle} dx$$

$$\hat{f}\left(\frac{t}{2\pi}\right) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle t, x \rangle} dx$$

↑
gyűrűsebesség

még $(2\pi)^{-n}$ szorzása, vagy $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ szorzása

$$\hat{f}\left(\frac{t}{2\pi i}\right) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\langle t, x \rangle} dx$$

Alkítás:

(1) $\|\hat{f}\| \leq \|f\|_1$ korlátos fr. a Fourier-tr.

(2) $\hat{\bar{f}} = (\hat{f})^\vee$ (konjugált)

(3) $(\tau_x f)^\wedge = e_{-x} \hat{f}$ (eltolás)

(4) $(e_x f)^\wedge = \tau_x \hat{f}$ (modulálás)

(5) $(\nabla_\theta f)^\wedge = |\theta|^\kappa \cdot \sigma_{\frac{1}{\theta}}(\hat{f})$

a nyújtás a Fourier tr. csereingója

Ha f valós vektoros, ~~akkor~~:

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i t x} dx = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(2\pi t x) dx}_{\text{cos transzformált}} + i \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(2\pi t x) dx}_{\text{sin. transzform.}} \end{aligned}$$

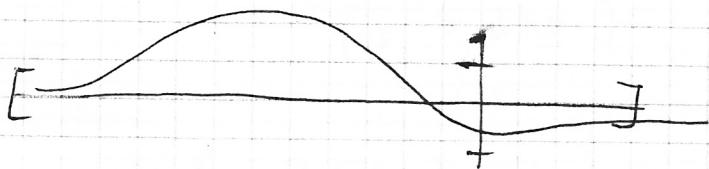
$$f = \frac{f + \tilde{f}}{2} + \frac{f - \tilde{f}}{2}$$

páros és páratlan f -re igaz
felírható az f

páros f -re 2π lesz a $\cos$ transzf.

páratlan f -re 2π szor lesz a $\sin$ tr.

Egy metrikus térben értelmezett normált
térbeli értéknél f -re eltérnik a végtelenben,
ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van egy olyan
 K kompakt halmaz, hogy azon kívül
 $|f| < \varepsilon$ (a számegy. a $\pm\infty$ -ben
tart a 0 -hoz)



Riemann - Lebesgue lemma:

Ha $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, akkor $\hat{f}$ folytonos és
eltérnik a végtelenben

Mivel simább a f -re a végt. a
Fourier tr. annál gyors. térlik el a
végtelenben, ez a két tétel

Tétel: Ha $f \in C^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ -ben van

és minden $|k| \leq m$ esetén
 $\partial^k f \in L^1$ -ben van, akkor

$t \mapsto \hat{f}(t) |t|^m$ függvény értelmezhető
 a végtelenben, és minden
 legfeljebb m -ed fokú P polinomra
 $P(\partial)$ Fourier-tr. a
 $t \mapsto P(2\pi i t) \hat{f}(t)$ függvény

Ha a f gyorsan tűnik el a
 végtelenben a Fourier-tr. szuma.

Tétel: $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ és valamely
 $m \in \mathbb{N}$ -re $x \mapsto f(x) |x|^m$ fr. is
 $\mathcal{L}^1$ -ben van. Ekkor az $\hat{f}$ fr.
 m -szer folytkatosan differenciálható
 és minden m -nél nem magasabb
 fokú polinomra (P) , $P(\partial) \hat{f}$
 $x \mapsto P(-2\pi i x) f(x)$ ennek a
 Fourier-tr.

Ha f -t polin. szorozom a
 Fourier-tr. differenciálható

Definíció: f, g lokálisan abszolút integrál-
ható komplex értékeű f. -ek $\mathbb{R}^n$ -en.

Ekkor f és g konvolúcióját

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$$

össze függésről értelmezhető, ha az
integrál létezik

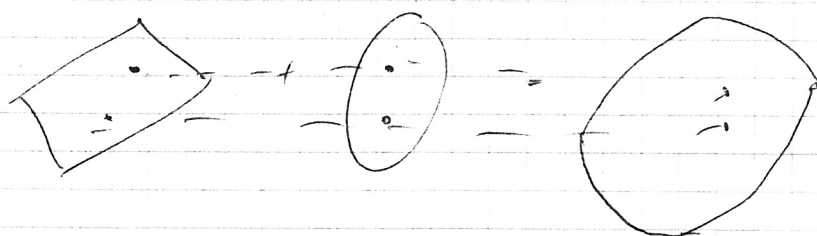
– lehet hogy valahol nincs értel. az
integrál, nem létezik a konvol.

$$(f * g)(x) = (g * f)(x), \text{ a konvolúció kommutatív}$$

Ha az x nincs benne a tartózkodáson az
 f -nek és a tartózkodáson a g -nek, akkor

$$(f * g)(x) = 0$$

Tartó – ahol f v. g nem nulla, és
azok lezárása



Tétel: Ha f és g $\mathbb{R}^n$ -en értelmezett
komplex f. -ek, akkor $f * g$ is
ugyanannak a halm. az eleme és

$$(f * g)^{\wedge} = \hat{f} \hat{g} \rightarrow \text{hátadom szedni}$$

az f -et és g -t
ha ism. a konvol.

Tétel: (inverzios tétel)

Ha $f, \hat{f}$ abszolút integrálh. komplex
füv-e $(\in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}))$, akkor

$\hat{\hat{f}} = \check{f}$ teljesül majdnem mindenütt
(egy 0 halmazzal kivételével)

- fontos, hogy a Fourier tr. is
integrálhatóvá válik ~~is~~ lenne $\mathbb{R}^n$ -et $\mathbb{C}$ -re
lineárisan

~~Tétel~~ Tétel: (unicitási) f és $g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ és

$\hat{f} = \hat{g}$, akkor $f = g$ - vel majdnem
mindenütt

- ha egy 0 halmazzal megvált. a
- fűt az integrálh. változók
- az L^2 térben is jól lenne Fourier-tr.
csinálni
(lehetne abszolút integrálható)

Az L^2 térben a Four. tr. úgy néz ki, de,
hogy tartja a vektorok szögét
és skaláris szorzatát

Plancherel-tétel: egy és csak egy
ilyen izometrikus (térbeliség tartó)
leképezése létezik a $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ -nek
önmagára, amely az $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ -n
a Fourier transzformáció.

↑
vagyis ha valaki
4² Four. tr. elemekhez bevezetődnek

Ezt is $f \mapsto \hat{f}$ -nek jelölve,

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle \quad \text{(tartja a skalárszorzat!)} \quad \text{~~határozza meg~~}$$

$$f \text{ norma} = \hat{f} \text{ norma}$$

- unitér transzformáció

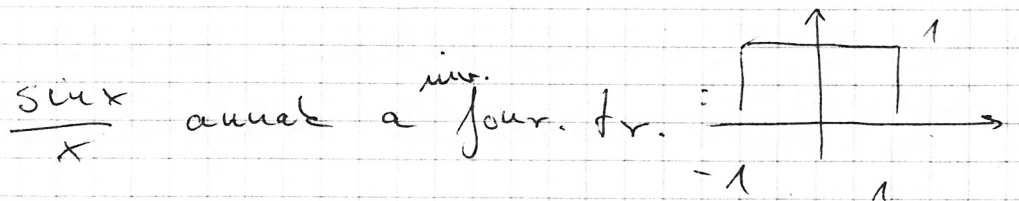
(komplex térre ortogonális transzformációja)

$$\hat{\mathcal{F}}_{[-1,1]} = g \quad \|\mathcal{F}_{[-1,1]}\|_2^2 = \|g\|_2^2$$

$$\text{pl.: } \int_{-2}^2 \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \underset{\substack{\text{ex.} \\ \text{vehető}}}{c} \int_{-1}^1 1^2 = c \cdot 2$$

$$\|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2$$

ahol c konstans
mivel az eredeti fu. transzform. a négyzet
területe



Levontunk: a hely és az impulzus sűrűség
között a Fourier-tr. létező kapcsolat

Atlaké Fourier-transzformált

legyen $0 \neq g \in L^1(\mathbb{R})$ ^{mindig lemez-értékű} atlaké függvény
lehetőlegis rögzített. Ha a g
tartója $C[-T, 0]$, akkor azt
mondjuk, hogy a g lemezűs (obsági).

Egy $f \in L^2(\mathbb{R})$ fu. erre vonatkozó

átlake Fourier-transzformálta (WFT)
 az $(\omega, t) \mapsto \tilde{f}(\omega, t)$ értéket
 rendeljük hozzá.

$$(\omega, t) \mapsto \tilde{f}(\omega, t) = \left(f_t \right)^\wedge,$$

ahol $f_t(x) = g(x-t) f(x)$

(a δ funkcia levetése egy részre)

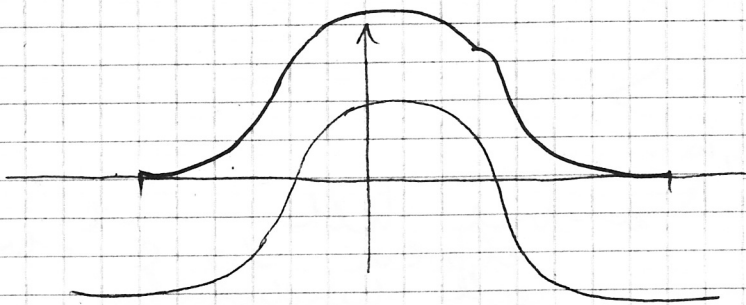
A $g_{\omega, t}(x) = g(x-t) \cdot e^{2\pi i \omega x}$ jelöléssel

$$\tilde{f}(\omega, t) = \langle f, g_{\omega, t} \rangle$$

Példa:

Az $x \mapsto \sin(\pi x^2)$ ↑ ahogy $x \rightarrow \infty$ úgy $\rightarrow 0$
 "zűr" jel a felv.

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \cos \pi x, & \text{ha } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$



2011. 11. 17.

H. 46 - tan konzultáció

átlake Fourier-tr. azért jó, mert
 nem kell $-\infty$ - $+\infty$ -ig ismerni a
 jelt.

Megjegyzés: az idő átlaborozása megfelel
egy frekvenciaátlaborozásnak

Planchard: $\tilde{f}(\omega, t) = \langle f, g_{\omega, t} \rangle =$
 ↑ ↑
 átlak idő amivel eltoltuk az átlakot
 Fourier-tr.

$$= \langle \hat{f}, (\hat{g}_{\omega, t})^\wedge \rangle = \dots$$

c-ados f. való moduláció

$$g_{\omega, t} = (\tau_t g) e_\omega$$

↑
t-nel
eltoljuk a f.

$$(\hat{g}_{\omega, t})^\wedge = \tau_\omega (\tau_t g)^\wedge = \tau_\omega (\hat{g} e_{-t}) =$$

↑
ω-val való eltolás

$$= (\tau_\omega \hat{g}) \cdot \tau_\omega (e_{-t})$$

$$\tilde{f}(\omega, t) = e^{-2\pi i t \cdot \omega} \langle \hat{f}, \hat{g}_{t, \omega} \rangle$$

↑
ω-val kell
eltolni és e^{-t}-vel
kell modulálni

ugyanaz mint ha a Fourier tr. átlakozunk

Az átlak f. ha kicseréljük a Fourier
tr., akkor a Fourier transzformált
azzal átlakozódik

Megye, hogy az egyes átlakozó f. -ek a
frekvencia tartományban mennyire pontyos
és a Fourier transzformálót

Tétel (Bizonytalansági reláció)
Ha a Fourier tr. valószínűségi
helyre, akkor az eredeti fu.
fog szétfolyni, és fordítva.

pl.: kvantummechanika impulzusának
és helyének a kapcsolata

↓
a hely bizonytalanságának a
szórása nem lehet akármilyen
kicsi $\leftarrow$ komplex

Tegyük fel, hogy $g \in L^2(\mathbb{R})$, $\|g\|_2 = 1$,
továbbá tegyük fel, hogy a "középpont"
integrálok léteznek és végesek

$$\int_{\mathbb{R}} t^2 |g(t)|^2 dt \text{ és } \int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega$$

$\mathbb{R}$ $\uparrow$ $\mathbb{R}$
momentuma sűrűség.
Ekkor a valószínűségi.

várh. $\rightarrow$ $t_0 = \int_{\mathbb{R}} t |g(t)|^2 dt$ és

Fourier $\rightarrow$ $\omega_0 = \int_{\mathbb{R}} \omega |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega$
tr. várh. értéke.

léteznek és végesek. Továbbá

$T^2 = \int_{\mathbb{R}} (t - t_0)^2 |g(t)|^2 dt$
szórás négyzet $\mathbb{R}$

és $\Omega^2 = \int_{\mathbb{R}} (\omega - \omega_0)^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega$

léteznek és végesek, és

$h\pi \Omega T \geq 1 \rightarrow$ a két szórásnégyzet között
alulról korlátozások

Példa:

$$g(t) = \sqrt[4]{2a} e^{-\pi t^2 a}$$

ha a kicsi, jól van
szét van terítve,
ha nem, "hegyesedik"

Fourier tr. kétféleképpen:

$$\hat{g}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{a}} e^{-\pi \omega^2 / a}$$

itt most
fordítva

$$T = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \quad \Omega = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{4\pi}}$$

szorzatuk pont 1-et ad ki
becserezve

Ablak Fourier tr. az eredeti jél visszaállít.

Tétel - Rekonstrukciós formula

$g \in L^2(\mathbb{R}) \rightarrow$ ablak függvény

$f \in L^2(\mathbb{R}) \rightarrow$ eme ismét az ablak f.-tr.

Ekkor f függvény vissza kapható az
ablak Fourier - transzformáltból

$$f(x) = \frac{1}{\|g\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_{\omega t}(x) \tilde{f}(\omega, t) d\omega dt$$

az ablak
vannak súlyozva

az
függvények

Tétel: (Mennyire jó közelítés az előző formula)
Legyen $g \in L^2(\mathbb{R}) \rightarrow$ ablak f.

Ekkor bármely olyan h f. -re
mely véges. integrálható az
egész síkon ($\in L^2(\mathbb{R})$), ha

$$f_h = \frac{1}{\|g\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(w, t) h(w, t) dt dw$$

akkor bármely $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R})$ -re
amelyre az $\tilde{f} \neq f_h$ teljesül,
hogy a $\|h - \tilde{f}\|_2 \geq \|h - f_h\|_2$

azaz az előzős tetsz. h -től
akkor a legközelebb, ha
 $\tilde{f}$ helyére f_h kerül

A lehető legjobban közel. kapn. vissza
 h -hoz legk. aluláteresztő tr.
kapta m. vissza f_h -ként

Tétel: Dirichlet rekonstrukciós formula
(Shannon mintavételi formula)

$f \in L^2(\mathbb{R})$, f folytonos és
szélséghatárolt Ω -val, amelyre

$$\hat{f}(w) = 0, \text{ ha } w \notin [-\Omega, \Omega]$$

Ekkor a Fourier - tr. az exak. jel
visszaállítható

$$t_n = \frac{n}{2\Omega} \quad \text{jelöléssel}$$

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sin(2\pi\Omega(t-t_n))}{2\pi\Omega(t-t_n)} f(t_n)$$

$t = t_m$ a határértékkel egyenlő,
ami 1

Dirichlet rekonstrukciós formula

$g \in L^2(\mathbb{R}) \rightarrow$ általában.

g kompakt tartójú, amely eltérzik egy

↙
korlátos
és zárt
halmaz

↘
legnagyobb halmaz, melyen
kívül g eltérzik

$1/\mu$ hosszúságú intervallumon kívül

$$A \quad H_\tau(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g(x - n\tau)|^2$$

↗
a g általában τ -t eltolgatva
 n szer $\mathbb{Z}$ -vel

Már g Riemann integrálható (majdnem
mindenütt folytonos), akkor $\tau \downarrow 0$ esetén

$$H_\tau(x) \rightarrow \|g\|_2^2$$

(konstans τ -hoz tart)

↗
jól behatárolható határérték.
Erdemes megjegyezni!

Jegyzet fel, hogy $0 < \inf_{x \in \mathbb{R}} H_\tau(x)$ és

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} H_\tau(x) < \infty$$

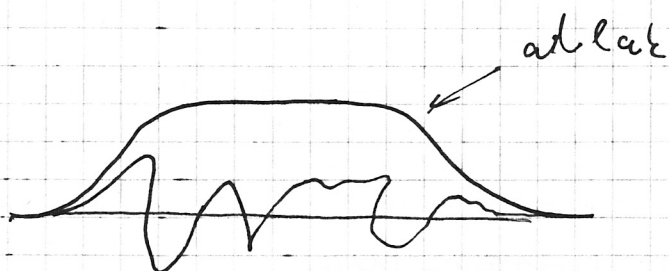
(Ér csak $\tau \leq$ esetén lehetséges)

Ekkor az $f(t)$ rekonstruálható a
 bázisvektorok segítségével.

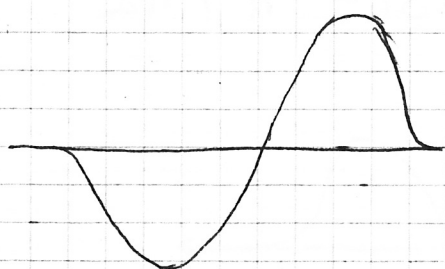
$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{g_{m,n}(t)}{H_n(t)} \tilde{f}(m, n)$$

csak a diszkrét értékek alapján
 visszaállítható $f(t)$

Wigner → Fourier tr. is ott van mint
 csúszás



olyan fő használat, ami hullám
 és alak egyben, ilyen jel:



anyawavelet

→ tologatjuk illetve
 csúsztatjuk és
 rájuk

(az alakozás és
 a Fourier-tr. egyben
 történik)

Definíció:

← $\pm \infty$ is lehet

legyen $\mu \in \mathbb{R}$ rögzített és egy

ψ valós változó $\int \psi = 1$,

$$\text{legyen } \psi_s(x) = |s|^{-1/\mu} \psi\left(\frac{x}{s}\right)$$

$$\text{és } \psi_{s,t}(x) = |s|^{-1/\mu} \psi\left(\frac{x-t}{s}\right)$$

Ez a ψ anyamawavelet lesz fartsod
waveletcsalád.

(itt $1/\mu = 0$)

helyett.
integr.
 ψ

Ha $1 \leq q < \infty$, akkor

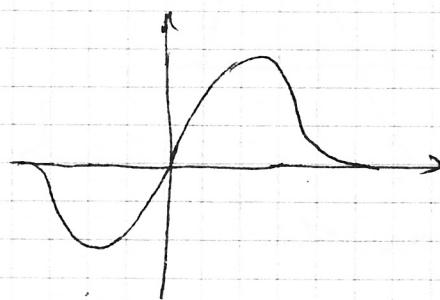
$$\begin{aligned} \|\psi_{s,t}\|_q^q &= \int_{\mathbb{R}} |s|^{-q/\mu} \left| \psi\left(\frac{x-t}{s}\right) \right|^q dx = \\ &= |s|^{-\frac{q}{\mu}} \int_{\mathbb{R}} |\psi(y)|^q |s| dy = \\ &= |s|^{\frac{1-q}{\mu}} \|\psi\|_q^q \end{aligned}$$

Igy $\mu = q$ esetben a norma nem
változik.

$$q = \infty \text{ -re } \|\psi_{s,t}\|_{\infty} = |s|^{-1/\mu} \|\psi\|_{\infty}$$

Példa

$$\psi(x) = x \cdot e^{-x^2}$$



ennek a deriváltja:

$$\psi(x) = (1 - 2x^2) e^{-x^2}, \text{ a „Mexikói kalap”}$$

Definíció: Legyen $\mu \in \mathbb{R}$, és

$$\psi \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ rögzített.}$$

Egy $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ függvény folytonos
wavelet transformáltja az

$$\tilde{f}(s,t) = \langle f, \psi_{s,t} \rangle =$$

2011. 11. 21

Wavelet-transzformáció

Visszaállítási

- Szimmetrikus rekonstrukciós formula

$$\left. \begin{array}{l} \psi \text{ anymire} \\ p \text{ helyre} \end{array} \right\} \psi_{s,t} \text{ rekonstruálható}$$

$$\tilde{f}(1,t) \stackrel{\Delta}{=} \langle f, \psi_{s,t} \rangle$$

$$\text{Tfj. } 0 < c = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < +\infty$$

Ekkor tetszőleges $f \in L_2(\mathbb{R}, c)$ visszaállítható az $\tilde{f}$ -ből

$$f(x) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{\left(\frac{2}{p}-3\right)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(s,t) \psi_{s,t}(x) dt ds$$

csak d_2 -ben

Megjegyzés

ha a wavelet integrálható $\psi \in L(\mathbb{R}, c)$, akkor ψ folytonos,
így a feltételül követelt, hogy $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$, azaz

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) e^{-2\pi i \langle 0, x \rangle} dx = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$$

nem van lehet mindezt
bizni

Asymmetrische Rekonstruktionssatz

Tgl. $0 < C_+ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(z)|^2}{|z|} dz < \infty$

es $0 < C_- = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(z)|^2}{|z|} dz < \infty$

Visualität a

$$f(u) = \frac{f_+(u)}{C_+} + \frac{f_-(u)}{C_-}$$

aber $f_+(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\omega) e^{2\pi i \omega u} d\omega$

$$f_-(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\omega) e^{i\pi \omega u} d\omega$$

Eher

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} |s|^{-\frac{1}{p}-1} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(s,t) g(s,t) dt ds$$

asym.

Mengengröße

Ha $C_+ = 0$ oder $C_- = 0$, aber $\tilde{f}(s,t)$, $s > 0$
 von Funktionen unterstützt ist $\int$ ergibt folgend E_2 von
 bedeckt ist, ha ψ values, mit aber $\hat{\psi}(-\omega) = \hat{\psi}(\omega)$

Mengengröße

Direkt unvollständig in Gleichung. Eher $s = \pm \delta^m$
 $t = n \delta^m \frac{1}{s}$ $m, n \in \mathbb{Z}$

$$0 < \delta < \infty$$

$$\delta \neq 1$$

$$\delta \neq 0$$

A folgend es ist ein erstes es ist die Fourier-Transformations

von zwei alternativen: letztes Gruppe-24

Hardy - terek

Hardy-ter als- és felő (jobb és bal) féltekén.

Felő $\mathbb{C}^+$ a nyílt, komplex felő félkörlet $(z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0)$

$\mathbb{C}^-$ --- alsó --- $(\operatorname{Im}(z) < 0)$

Vegyük $1 \leq p < \infty$, legyen a

H_+^p azon f p -ek határán, amelyek $f: \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}$
analitikusak és amelyekre

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^p dx$$

korlátos, mint $y > 0$ függvény.

$$\text{Egy } f \in H_+^p \text{ függvényre legyen } \|f\| = \sup_{y>0} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

H_-^p azon $f: \mathbb{C}^- \rightarrow \mathbb{C}$ p -ek határán, melyekre

$$\overline{f(\bar{z})} \in H_+^p$$

alsó féltekén analitikusak.

H_+^∞ azon $f: \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ p -ek határán, melyekre
analitikusak és korlátos

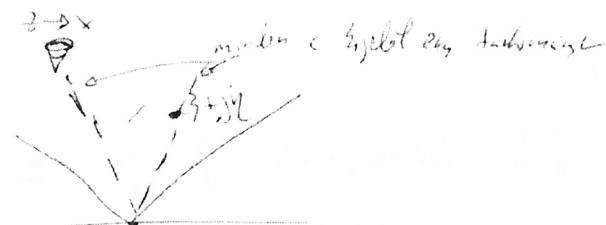
$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ y > 0}} |f(x+iy)|$$

Def. Ha $x \in \mathbb{R}$ jelölve a $\lim_{z \rightarrow x} f(z) = c$, hogy

$\forall C > 0$ -ra f fr $\{z + jy : z \in \mathbb{R}, |z - x| < C \cdot \frac{1}{C}\}$

határozott, hogy c a határérték az x pontban, azaz

$\lim_{z \rightarrow x} f(z) = c$ nem függvényérték határérték



Tétel

$1 \leq p \leq \infty$

minimális határérték

$f \in H_+^p$, akkor $g(x) := \lim_{z \rightarrow x} f(z)$ mindig mindenütt létezik,

$f \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, továbbá $x \mapsto \frac{\ln |f(x)|}{(1+x^2)}$ integrálható függvény

Képlet Poisson-formula

$1 \leq p \leq \infty$

$f \in H_+^p$, akkor $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ esetén

$$f(x+jy) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} f(t) dt$$

függvény minden x valós számra
meghatározott és határérték létezik
a f függvény, azaz $f \in H_+^p$ és $h(x) = \lim_{z \rightarrow x} f(z)$ mindig mindenütt

ha $h \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ és $g(x+jy) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} h(t) dt$

Továbbá az $x \mapsto f(x+jy)$ fr L^p -normáján tart az $x \mapsto g(x)$ függvény, azaz $\lim_{y \rightarrow +0} g(x) = f(x)$

Konvergenz: In $1 \leq p < \infty$, also $f \in \mathbb{H}_p^+$, also

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^p dx = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy) - f(x)|^p dx = 0$$

Teil 2: Cauchy-Formel

$$1 \leq p < \infty$$

$$f \in \mathbb{H}_p^+, \text{ also } x \in \mathbb{R}, y > 0 \text{ existiert } f(x+iy) = \frac{1}{2\pi y} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-(x+iy)} dt$$

$$\text{es } \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-(x+iy)} dt = 0$$

man sieht, dass es existiert, dass man, dass f(x+iy) = 0 ist.

Messbarkeit: In $h \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ es $x \in \mathbb{R}, y > 0$ existiert

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{h(t)}{t-(x+iy)} dt = 0 \text{ also}$$

$$f(x+iy) = \frac{1}{2\pi y} \int_{\mathbb{R}} \frac{h(t)}{t-(x+iy)} dt \text{ konvergiert}$$

$$f \in \mathbb{H}_p^+ \text{ es } \lim_{y \rightarrow \infty} f(x+iy) = h(x) \text{ fast überall}$$

$$= \langle \hat{f}, (\gamma_{s,t})^\wedge \rangle$$

$$(\gamma_{s,t})^\wedge(\omega) = |S|^{1-\frac{1}{p}} e^{-2\pi i \omega t} \hat{\psi}(s\omega),$$

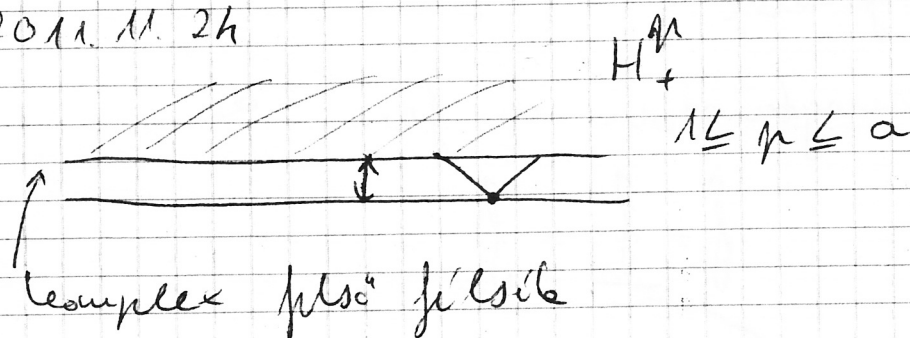
így $\hat{f}(t,s)$ az $\omega \mapsto |S|^{1-\frac{1}{p}} \hat{f}(\omega) \hat{\psi}(s\omega)$ ← helyes.

függvény Fourier-tr. a $(-t)$ helyen.

2011. 11. 21

Egy előadás kiírásait

2011. 11. 24



H_+^2 tér esetén pont. megk. mondani
hogy mit "lineáris" lehet" ki

$$H_+^p \subset \mathcal{D}'^p$$

nem tangenciális lineáris

Paley-Wiener-tétel

Egy $f \in \mathcal{D}'^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pontosan akkor van
a H_+^2 térben ha a Fourier-tr.

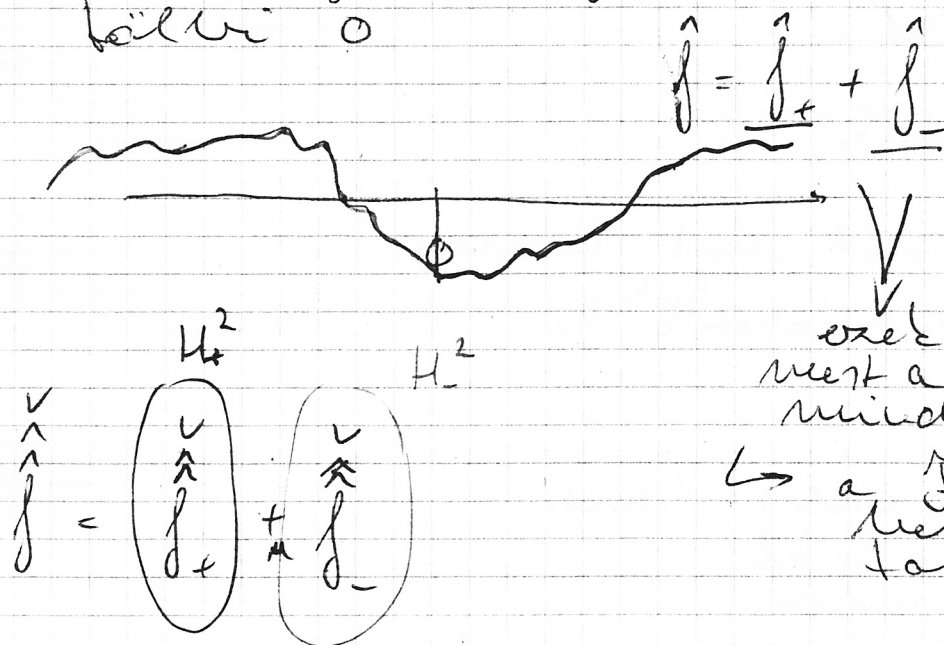
az majdnem mindenütt 0 a $[0, +\infty[$ -en
kívül

-a Fourier-tr. Fourier-tr. az
eredeti f. megfordítottja

Megjegyzés: Ebből már látható, hogy a H^2 -ben pontosan azok a f_0 -ek vannak amelyekre (a számegyen. kitérővel) a Fourier-tr. $] - \infty, 0]$ -án kívül mindenütt 0.
(a ~~tr.~~ az $0 + \infty$ -en értékelve)

Mivel a Fourier-tr. az H^2 -ben ^{valószínűleg konst. értékű} teljes szorzattartó, minden $f \in H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ f_0 egyértelműen felírható $f_+ \in H_+^2$ és $f_- \in H_-^2$ függvények ortogonális összegeként.

- a poz. fél. meghat. a f_0 -a kívül 0



ezek egym. meről.
mert a szorzattartó
mindenütt 0
→ a Fourier-tr.
teljes szorzattartó

- az H^2 -t egyértelműen fel tudjuk bontani két egym. merőleges altérre
összeírva

A megfelelő ^{ortogonális} projekciókat $f \xrightarrow{P_+} f_+$

$$P_+ : H^2 \rightarrow H_+^2, \quad f \xrightarrow{P_+} f_+$$

$P_- : H^2 \rightarrow H_-^2$ Riesz-projekciókat
nevezünk $\nearrow$ egy nullumt. eltérő
hermitikus

Definíció $\varphi \in H^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

A φ függvényhez tartozó Toeplitz
operátor a következő

$$T_\varphi : H_+^2 \rightarrow H_+^2$$

$$T_\varphi(f) = P_+(\varphi f)$$

A Toeplitz operát. ezzel az összef. definícióval

Definíció

A Hankel operátort hasonlóan értelmezzük

$$H_\varphi : H_-^2 \rightarrow H_-^2$$

$$H_\varphi(f) = P_-(\varphi, f)$$

Nehéz tétel:

$\varphi \in H^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ esetén a φ -hez
tartozó Hankel operátor normája

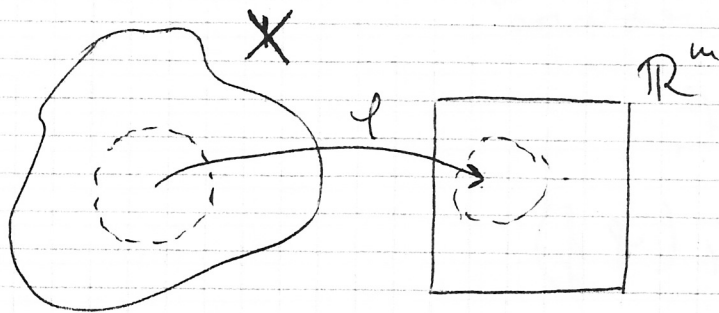
$$\|H_\varphi\| = d(\varphi, H_+^\infty)$$

$\hookrightarrow$ ez egy H^∞ tér zárt
altér

Differenciálható sokaságok A FEKETE LEVELES

Térkép, atlasz, sokaság

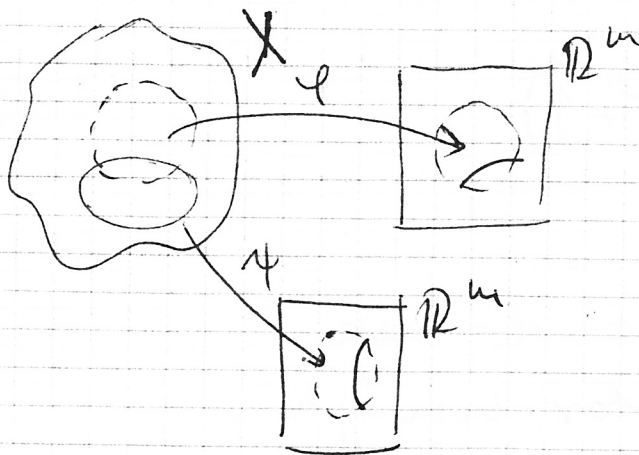
Egy n dimenziós térkép, vagy koordinátarendszer egy X metrikus tér egy nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$ -be képező φ homeomorfizmus. (kölcs. egyért. leképezés amely folyt. és az inverze is folyt.)



A φ és ψ térképek (n - dimenziós)

X -en C^r -összejárhatóak ($0 \leq r \leq \infty$)

ha $\varphi \circ \psi^{-1}$ és $\psi \circ \varphi^{-1}$ C^r leképezések
azaz a φ és ψ értelmezési tartományai metrikus tér képeit képezik egymásra



$$\psi \circ \varphi^{-1}$$
$$\varphi \circ \psi^{-1}$$

Egy m -dimenziós C^r atlasz
 az X m -dimenziós térképeinek
 egy C^r összefüggő $\mathcal{I}$, $i \in I$
 családja, úgy, hogy a $\mathcal{I}$ - ϕ_i -k értel-
 mezési tartományai lefedik X -et

Egy m -dimenziós C^r sokaság egy
 M separábilis metrikus tér
 egy C^r atlaszal. $\rightarrow$ van benne megszá-
 mlható sűrű halmaz

Ha egy atlaszhoz hozzávésszük a
 vele C^r összefüggő térképet akkor
 kellelt atlasznak neveznünk

A C^∞ -en sokaságot sima sokaságnak
 nevezünk

Példa: $\mathbb{R}^n$ bármely nyílt részhalmaza
 az identikus leképezéssel mint
 atlaszal egy sima sokaság

Példa: A $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ intervallumon
 az identikus leképezés, $x \mapsto \sin x$
 leképezések C^∞ összefüggők

Példa: $\mathbb{R}$ -en 3 térképet veszünk

identikus

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$$

$$\psi(x) = x^3$$

- ezek a leképezések párosként nem $\mathbb{C}^\infty$ -re iszre jöhetnek, de egymagóiban egy atlasz

Példa $\mathbb{R}^{n+1}$ -ben

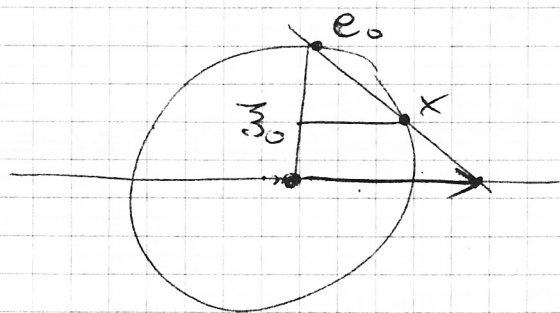
~~$e_0, e_1, \dots, e_n$~~ Tekintsük az $S_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ gömbfelületet. Az

$e_1, \dots, e_n$ által lefedett alteret

$\mathbb{R}^n$ -en azonosítva az $x \in S_n$ koordinátái

$\bar{z}_0, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$, legyen $y = \varphi_1(x) =$

$$= \frac{x - \bar{z}_0 e_0}{1 - \bar{z}_0}, \text{ ha } x \neq e_0.$$



az egys gömbfelület.
feltétel, kivéve
az északi pólust

A leképezésnek az inverze

$$x = \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} e_0 + \frac{2y}{\|y\|^2 + 1}$$

Ha szelődő legyen $\varphi_2(x) = \frac{x + \bar{z}_0 e_0}{1 + \bar{z}_0}$, ha

$x \neq -e_0$. Ekkor a $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(y) = \frac{y}{\|y\|^2}$

~~•~~ $\mathbb{C}^\infty$ -leképezés, az inverze is

A φ_1, φ_2 egy $\mathbb{C}^\infty$ struktúrát definiál S_n -en

↑
gömbfelület

További kérdések

Mennyi

Mit használ - skalár

2 felelős

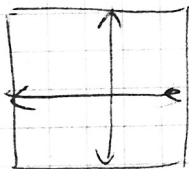
Törvényszék

3 felelős

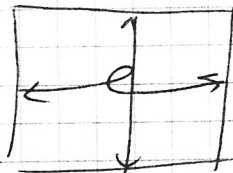
Iskola - kiskorúak



Mit használ
skalár



Törvényszék



Iskola, kiskorúak

2011.11.28.

ZH megoldás

1. feladat

$$F(x) = x^3 + 2x - 2 \quad T_1(x) = \frac{2}{2+x^2} \quad T_2(x) = 1 - \frac{x^3}{2}$$

$$\left| T_1(x)' \right| = \left| \frac{-4x}{(2+x^2)^2} \right| \quad 4x < 4(4+x^2+x^4) \quad x \geq 0$$

↑ abszolútérték kell vizsgálni

- még egyszer leellenőrizni, hogy van maximuma

$$\left| T_2(x)' \right| = -\frac{3}{2} x^2$$

$$|x| < \sqrt{\frac{2}{3}}$$

- a gyökere egy kis környezetében állhat