

Algoritmuselmélet - 2. zárthelyi
2023. június 1.

A munkaidő 90 perc. A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL.

Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

- Egy kupac tömbös reprezentációja 3, 5, y , x , 12, 10, 100, 7, 16, 21.
 - Rajzolja fel a kupacot bináris fa alakban. (Itt indokolni nem kell.)
 - Egy MINTÖR végrehajtása után a gyökérbe y kerül. Rajzolja fel ezt a MINTÖR utáni kupacot is bináris fa alakban. (Itt sem kell indokolni.)
 - Határozza meg x és y összes lehetséges értékét, ha tudjuk, hogy a tárolt elemek mind különböző egész számok (és az eredeti kupacon végrehajtott MINTÖR után y van a gyökérben). (Itt viszont már kell indokolni.)
- Egy bináris keresőfában, melyben csupa különböző egész számot tárolunk, a 11-es szám keresése során a 3, 17, 8, z , 11 kulcsokat látjuk ebben a sorrendben. Adja meg z összes lehetséges értékét.
- Egy kezdetben üres, 11 méretű hash táblába nyílt címzéssel, lineáris próbával szűrünk be hét különböző egész számot, a $h(x) = x \pmod{11}$ hash függvényvel. A beszúrások után egy számot kitöröltünk a táblából, a törölt elem helyét * jelzi, az eljárás végén az alábbi táblát kaptuk:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		14	3		6	18	*	9	20	

- Hogyan zajlik a 19 keresése ebben a táblában? Mely cellákat vizsgáljuk meg a keresés során?
 - Mi lehetett a törölt szám értéke, ha tudjuk, hogy 20-nál kisebb pozitív egész szám volt?
- Egy nagyvárosban jelenleg egyáltalán nincsenek bicikliutak, de a városvezetés szeretné elérni, hogy néhány út külső sávjában biciklisávok kerüljenek felfestésre az út mindkét oldalán, azaz a bicikliutak mindkét irányba használhatóak lesznek. Ez csak úgy lehetséges, hogy ezen utak mentén néhány, de legalább egy parkolóhely megszűnik. A város vezetése szeretné úgy megtervezni a bicikliutakat, hogy a főtérről a város minden csomópontjába el lehessen jutni bicikliúton, de ehhez a lehető legkevesebb parkolóhelyet kelljen megszüntetni (tartva az autósok haragjától). Szomszédossági mátrixával adott a város úthálózatának összefüggő, élsúlyozott, irányítatlan gráfja: a csúcsok a csomópontok (a főtér a T jelű csomópontban van), az élek a csomópontok közötti közvetlen utak, az élek súlya pedig azt mutatja, hogy mennyi parkolóhely szűnik meg, ha ezen a szakaszon bicikliút készül. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust erre a feladatra (a szokásos módon n a csomópontok számát jelöli).
 - A 42-KÖR problémában azt kell eldönteni egy egyszerű, irányítatlan G gráfról, hogy G csúcsait le lehet-e fedni pontosan 42 darab páronként pontdiszjunkt körrel (azaz semelyik két körnek nincsen közös pontja). Lásza be, hogy ez a probléma NP-ben van.
 - Lásza be, hogy a 42-KÖR probléma NP-teljes. (Az felhasználható az előző feladatból, hogy NP-beli.)
 - Diákok pontszámait szeretnék nyilvántartani egy többfordulós verseny során, a diákok Neptun-kóddal vannak azonosítva. Tervezzen adatszerkezetet, amiben a következő műveleteket kell tudni elvégezni:
BESZÚR_DIÁK(x): beilleszt az adatszerkezetbe egy új, x Neptun-kódú diákot 0 ponttal
PONT_NÖVELES(x,y): az x Neptun-kódú diák pontjait y -nal növeli
HÁNY_PONT(x): megadja, hogy az x Neptun-kódú diáknak hány pontja van
KLA_LEGJOBB: visszaadja az összes olyan diák Neptun-kódját, akinek a pontszáma a legmagasabb
A KLA_LEGJOBB művelet lépésszáma $O(k)$ legyen, ahol k a legtöbb ponttal rendelkező diákok száma, a többi művelet lépésszáma $O(\log n)$ legyen, ahol n a résztvevő diákok száma.