

# A Számítástudomány alapjai

1. pótZH 2012. XI. 29. 8<sup>15</sup>

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Kérjük, minden résztvevő **nevét** és **NEPTUN kódját** a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában, valamint **gyakorlatvezetője nevét** és a **tankörének számát vagy gyakorlatának időpontját** a dolgozat *első* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel, mert ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük. Írószeren és összetűzött papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés. Mobiltelefon **még kikapcsolt állapotban sem** lehet a padon vagy a hallgató kezében. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.

## Feladatok

1. A villamosmérnök szak mind az 556 hallgatója két-két ZH-t írt: egyet számítástudományból, egyet pedig analízisből. Számítástudományból senki sem ért el 36 pontnál többet. Bizonyítsuk be, hogy van négy olyan hallgató, akik amellet, hogy ugyanannyi pontot kaptak a számítástudomány ZH-jukra, analízisből is egyforma osztályzatot szereztek.
2. Adjunk olyan eljárást, ami  $2^{n-1} - 1$  összehasonlítással meghatározza egy  $2^n - 1$  különböző rekordot tartalmazó kupacban a legnagyobb elemet.
3. A 

$\sqrt{5}$	2	$\pi$	8	5	$\sqrt{3}$	6	$\sqrt{7}$
------------	---	-------	---	---	------------	---	------------

 tömb összefésüléses rendezéséhez pontosan hány páronkénti összehasonlításra van szükség?
4. Legfeljebb hány olyan egymással nem izomorf, egyszerű, 7 pontú gráf adható meg, amelynek minden csúcsa 4-edfokú?
5. Tegyük fel, hogy a háromszöget nem tartalmazó, irányítatlan, 100 csúcsú  $G$  egyszerű gráf 4-reguláris, azaz minden csúcs fokszáma 4. Hány olyan 3-élű van részgráfja  $G$ -nek, ami út?
6. Legyen  $F$  az a fa, aminek Prüfer-kódja  $(1, 3, 2, 3, 9, 3, 4, 4, 5, 5)$ . Hány komponensre esik szét  $F$ , ha töröljük a 3-as címkéjű csúcsát?

*Gyakorlatvezetők és gyakorlatok* Fleiner Tamás (11, H QBF10), Nguyen Hai (12, H QBF11), Tikosi Kinga (13, H IB134), Pach Péter Pál (21, H E406; 14 K IB138; 16 Cs IB 138), Bérczi Kristóf (22, H E404;27, Cs T605), Vidor Sára (23, H IB146), Páconyi Imre (15, K IB139), Papp Pál András (24, K IB140), Varga Kitty (17, Cs IB139), Drótos Márton (25, Cs IB140), Salánki Ági (26, Cs, IB147), Tassy Gergely (28, Cs R511)

Jó munkát!

# A Számítástudomány alapjai

1. pZH javítókulcs (2011.11.29.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, rész-megoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. A villamosmérnök szak mind az 556 hallgatója két-két ZH-t írt: egyet számítástudományból, egyet pedig analízisből. Számítástudományból senki sem ért el 36 pontnál többet. Bizonyítsuk be, hogy van négy olyan hallgató, akik amellet, hogy ugyanannyi pontot kaptak a számítástudomány ZH-jukra, analízisből is egyforma osztályzatot szereztek.

A feltétel szerint egy hallgató 37 féle pontszámot szerezhett SzA-ból, és ötféle osztályzatot analízisből, (2 pont)

így legfeljebb  $5 \cdot 37 = 185$ -féle lehet e két eredmény. (2 pont)

Ha egyetlen olyan eredménypár sem lenne, amit háromnál több hallgató ért el, akkor a hallgatók száma legfeljebb  $3 \cdot 185 = 555$ , volna, de tudjuk, hogy 556 a hallgatók száma. (5 pont)

Ezért van négy olyan hallgató, akik azonos SzA pontszámot és Analízis érdemjegyet szereztek, nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (1 pont)

2. Adjunk olyan eljárást, ami  $2^{n-1} - 1$  összehasonlítással meghatározza egy  $2^n - 1$  különböző rekordot tartalmazó kupacban a legnagyobb elemet.

A kupacban tárolt legnagyobb rekord biztosan levél, hiszen ha lenne leszármazottja a bináris fában, az nagyobb lenne, egész pontosan nem lehetne nála kisebb. (3 pont)

Elegendő tehát a kupachoz tartozó bináris fa leveleiben tárolt rekordok között megkeresni a legnagyobbat. (1 pont)

Ezek a levelek egyébként a tömb második felében helyezkednek el. (0 pont)

A  $2^n - 1$  rekordot tartalmazó kupachoz tartozó bináris fának  $n$  szintje van, az egyes szinteken  $1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}$  rekorddal, tehát a fának pontosan  $2^{n-1}$  levele van. (3 pont)

Az órán tanultak szerint  $2^{n-1}$  rekord közül a legnagyobb meghatározásához elegendő  $2^{n-1} - 1$  összehasonlítás. (3 pont)

Megjegyzés: ha a kupacban eggyel több, azaz  $2^n$  rekord lenne, a hozzá tartozó bináris fának akkor is  $2^{n-1}$  levele volna, így ugyanennyi összehasonlításra volna szükség a legnagyobb rekord meghatározásához.

3. A  $\boxed{\sqrt{5}} \boxed{2} \boxed{\pi} \boxed{8} \boxed{5} \boxed{\sqrt{3}} \boxed{6} \boxed{\sqrt{7}}$  tömb összefésüléses rendezéséhez pontosan hány páronkénti összehasonlításra van szükség?

A rendezés a  $\boxed{\sqrt{5}} \boxed{2} \boxed{\pi} \boxed{8}$  résztömb összefésüléses rendezésével kezdődik. (1 pont)

Ebben először egy-egy összehasonlítással rendezzük az első két ill. harmadik és negyedik elemeket, majd összefésüljük a kapott  $\boxed{2} \boxed{\sqrt{5}}$  és  $\boxed{\pi} \boxed{8}$  tömböket, amihez két összehasonlítás kell. (2 pont)

A másodiknak rendezett  $\boxed{5} \boxed{\sqrt{3}} \boxed{6} \boxed{\sqrt{7}}$  tömb esetében két összehasonlítás után a  $\boxed{\sqrt{3}} \boxed{5}$  és  $\boxed{\sqrt{7}} \boxed{6}$  tömböket fésüljük össze a  $\boxed{\sqrt{3}} \boxed{\sqrt{7}} \boxed{5} \boxed{6}$  tömbbé 3 összehasonlítással. (3 pont)

Végül a kapott  $\boxed{2} \boxed{\sqrt{5}} \boxed{\pi} \boxed{8}$  és  $\boxed{\sqrt{3}} \boxed{\sqrt{7}} \boxed{5} \boxed{6}$  tömböket fésüljük össze, amihez legvégül a 6 és 8 elemeket kell összehasonlítani, tehát „egyszerre” fogynak el a tömbök, így ehhez 7 összehasonlítás kell. (3 pont)

A teljes eljárás tehát  $2 + 2 + 2 + 3 + 7 = 16$  páronkénti összehasonlítást használ. (1 pont)

Ha a leírásból látszik, hogy a hallgató pontosan érti, hogyan működik az összefésüléses rendezés, de úgy számol, hogy két  $k$  méretű tömb összefésüléséhez  $2k - 1$  összehasonlítás kell (még ha az egyik tömb hamarabb el is fogy), akkor a megoldás legfeljebb 7 pontot ér.

4. Legfeljebb hány olyan egymással nem izomorf, egyszerű, 7 pontú gráf adható meg, amelynek minden csúcsa 4-edfokú?

Egy egyszerű  $G$  gráf komplementere az a  $\overline{G}$  gráf, amiben két pont pontosan akkor szomszédos, ha  $G$ -ben nem szomszédosak. Az izomorfia definíciójából azonnal adódik, hogy két gráf pontosan akkor izomorf, ha komplementereik izomorfak. (1 pont)

Ezek szerint nekünk elegendő megszámolni, hányféle nemizomorf módon adható meg a kért gráfok komplementere. (2 pont)

E komplementerben minden csúcs fokszáma pontosan 2 lesz, (1 pont)

tehát a komplementer gráf diszjunkt körök uniója. (2 pont)

Azt kell tehát leszámolnunk, hogy hányféleképpen adható meg néhány diszjunkt kör 7 ponton, (2 pont)

azaz, hányféleképpen lehet a 7-et előállítani olyan pozitív egészek összegeként, amelyek mindegyike legalább 3. (1 pont)

Erre pontosan két lehetőségünk van: 7 ill.  $3 + 4$ . Eszerint a feladatbeli kérdésre a válasz pontosan kettő, (1 pont)

konkrétan a  $C_7$  komplementre ill. az a  $G$  gráf, amit a  $K_{3,4}$  teljes páros gráfból úgy kapunk, hogy behúzzunk két diszjunkt élt a 4 pontú színosztályba. (0 pont)

5. Tegyük fel, hogy a háromszöget nem tartalmazó, irányítatlan, 100 csúcsú  $G$  egyszerű gráf 4-reguláris, azaz minden csúcs fokszáma 4. Hány olyan 3-élű van részgráfja  $G$ -nek, ami út?

A  $G$  gráf minden 3-élű sétája út, mivel  $G$  egyszerű és nincs benne háromszög. (1 pont)

Ezért elegendő megszámolni, hány 3-élű séta van  $G$ -ben: a kért utak száma ennek pontosan a fele lesz, hiszen minden útból pontosan két sétát lehet alkotni. (2 pont)

A séta első csúcsa 100-féle lehet, hisz bármely csúcs szóba jön. A második csúcs a 4-regularitás miatt 4-féle lehet, (2 pont)

míg a harmadik csúcs, az iménti három maradék szomszédjának valamelyike, így ez 3-féleképp választható, hasonlóan a 4-dikhez. (3 pont)

A 3-élű séták száma tehát pontosan  $100 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 3600$ -nak adódik, így kért részgráfok száma kerekén  $\frac{3600}{2} = 1800$ . (2 pont)

6. Legyen  $F$  az a fa, aminek Prüfer-kódja  $(1, 3, 2, 3, 9, 3, 4, 4, 5, 5)$ . Hány komponensre esik szét  $F$ , ha töröljük a 3-as címkéjű csúcsát?

Tanultuk, hogy minden csúcs foka 1-gyel több, mint ahányszor a Prüfer-kódban szerepel. (3 pont)

A 3-as címkéjű csúcs a kódban 3-szor fordul elő, így a fokszáma 4 (2 pont)

Ha tehát a 3-as címkéjű csúcsot elhagyjuk  $F$ -ből, akkor a maradék gráfnak pontosan 4 komponense lesz (5 pont)

Nem tilos persze  $F$  meghatározása sem. Járjon 7 pont a fa helyes felrajzolásáért, 3 pont pedig a 3-as csúcs fokának megszámlálásáért és a válaszáért.

