Jelek és rendszerek

1. házi feladat

Érvényes:2012/2013.tavaszifélév

Név
Neptun kód
Házi feladat kódja
Beadási határidő Lásd a "Számonkérés rendje" c. táblázatban
Gyakorlatvezető neve: . . . . (**kitöltendő!**)

Megjegyzések: *A házi feladat megoldását a* ***feladatlappal együtt*** *kell beadni. Ügyeljen az áttekinthető és világos külalakra! A teljes megoldást minden esetben részletesen le kell írni,* ***nem elegendő a végeredményeket közölni!*** *A numerikus számításokra és az ábrák elkészítésére természetesen alkalmazhat számítógépi programokat (MATLAB, DERIVE, stb.), de* ***a megoldás elvi lépéseit*** *ekkor is* ***részletesen*** *ismertetni kell.*

	a	b	c	d	$\sum$	Javító
1.1	/ 0,4	/ 0,4	/ 0,6	/ 1,6	/ 3	
1.2	/ 2,4	/ 0,6	/ 1,6	–	/ 4,6	
1.3	/ 1,6	/ 0,8	–	–	/ 2,4	
					/ 10*	

* a házi feladat végső pontszáma a részpontok összegéből kerekített egész szám.

1.1 Tekintse az alábbi impulzusválasszal adott *FI* illetve *DI* rendszert!

$$h(t) = 6\varepsilon(t)e^{-0{,}3t}\cos(5t + (0{,}2))$$
$$h[k] = 3\delta[k] + \varepsilon[k-1]\left\{2(-0{,}8)^k + (-3)\cdot(0{,}5)^k\right\}$$

(a) Gerjesztés-válasz stabilis-e a *FI* illetve az *DI* rendszer? Indokolja válaszát! (0,2+0,2 pont)

(b) Változtasson meg egyetlen paramétert úgy, hogy a rendszer stabilitása ellenkezőjére változzon! (0,2+0,2 pont)

(c) A *DI* rendszer gerjesztése az alábbi bemeneti jel. Számítsa ki a válaszjelet $k = 0$-ra, $k = 1$-re és $k = 2$-re! (0,6 pont)

$$u[k] = 4\{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-6]\}$$

(d) Számítsa ki a *FI* illetve a *DI* rendszer válaszjelének formuláját, ha a gerjesztés az alábbi bemeneti jel! (0,8+0,8 pont)

$$\begin{aligned} u(t) &= 4e^{0{,}5t} \\ u[k] &= 2 \end{aligned}$$

1.2 Tekintse az alábbi állapotváltozós leírással adott *FI* illetve *DI* rendszert!
A *FI* rendszer állapotváltozós leírása:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 0{,}7 \\ -2 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}9 \\ -0{,}8 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1{,}7 & -1{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + (0{,}7)u(t) \end{aligned}$$

A *DI* rendszer állapotváltozós leírása:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1{,}2 & -2 \\ 0{,}1 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} u[k] \\ y[k] &= \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} + (-1{,}1)u[k] \end{aligned}$$

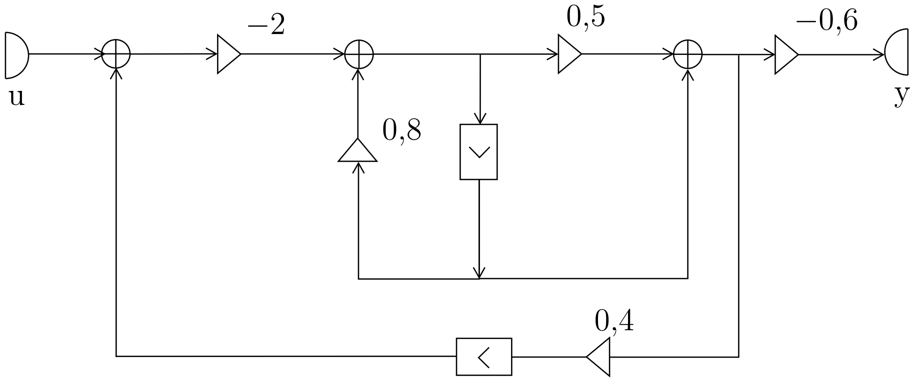
(a) Számítsa ki és ábrázolja mindkét rendszer impulzusválaszát! (1,2+1,2 pont)

(b) Az állapotegyenlet lépésről lépésre történő megoldásával számítsa ki a *DI* rendszer impulzusválaszának numerikus értékét $k = 0, 1$ és 2-ra, és vesse össze a formulából behelyettesítéssel kapott értékekkel! (0,6 pont)

(c) Számítsa ki és ábrázolja a válaszjelet, ha a rendszerek gerjesztése az alábbi bemeneti jel! (0,8+0,8 pont)

$$\begin{aligned} u(t) &= \varepsilon(t)\left\{2 + (-1) \cdot e^{-0{,}4t}\right\} \\ u[k] &= 4\left\{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-6]\right\} \end{aligned}$$

1.3 Tekintse az alábbi közös jelfolyam hálózattal adott *DI* illetve *FI* rendszert!



(a) Adja meg mindkét rendszer állapotváltozós leírását normál alakban! (0,8+0,8 pont)

(b) Vizsgálja meg a DI illetve az FI hálózat stabilitását! (0,4+0,4 pont)

1.1.a)

- FI rendszer akkor GV-stabil, ha $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| < \infty$

$\boxed{h(t) = 6 \cdot \varepsilon(t) \cdot e^{-0,3t} \cdot \cos(5t+0,2)}$

- $\varepsilon(t) = 1$, $t \geq 0$ miatt 0-tól integrálunk
- Mivel $0 \leq \cos\alpha \leq 1$, így a $\cos(5t+0,2)$ nem rontja el a GV-stabilitást.

$6 \cdot \int_0^{\infty} |e^{-0,3t}| \, dt = 6 \cdot \left| \frac{e^{-0,3t}}{-0,3} \right|_0^{\infty} = 20|0-1| = \underline{\underline{20 < \infty}}$; Tehát a rendszer GV-stabil.

- DI rendszer akkor GV-stabil, ha $\sum_{-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$

$\boxed{h[k] = 3\delta[k] + \varepsilon[k-1]\left(2 \cdot (-0,8)^k - 3 \cdot 0,5^k\right)}$

$\sum_{-\infty}^{\infty} \left| 3\delta[k] + \varepsilon[k-1]\left(2 \cdot (-0,8)^k - 3 \cdot 0,5^k\right) \right|$

$\underbrace{\sum_{-\infty}^{\infty} 3\delta[k]}_{3 / \delta[k]=1, k=0 /} + \left| \sum_{-\infty}^{\infty} \varepsilon[k-1]\left(2 \cdot (-0,8)^k - 3 \cdot 0,5^k\right) \right| \Longrightarrow \varepsilon[k-1]$ miatt 1-től szummázunk.

$3 + \left| \sum_1^{\infty} 2(-0,8)^k - \sum_1^{\infty} 3 \, 0,5^k \right| = 3 + \left| 2\underbrace{\left(\frac{1}{1-(-0,8)} - 1 \right)}_{-\frac{4}{9}} - 3\underbrace{\left(\frac{1}{1-0,5} - 1 \right)}_{1} \right|$

$3 + |-3,89| = \underline{\underline{6,89 < \infty}}$; Tehát a rendszer GV-stabil.

1.1.b

FI esetén $e^{-0,3t}$ helyett $e^{0,3t}$, DI esetén $0,5^k$ helyett $1,5^k$

1.1.c

$\boxed{h[k] = 3\delta[k] + \varepsilon[k-1]\left(2 \cdot (-0,8)^k - 3 \cdot 0,5^k\right)}$ $\boxed{u[k] = 4\left(\varepsilon[k] - \varepsilon[k-6]\right)}$

$y[k] = u[k] * h[k] = \sum_{-\infty}^{\infty} h[k-i] \cdot u[i]$

$u[k] = 4$, $0 \leq k \leq 5$ esetén

- $\underline{y[0]} = h[0] \cdot u[0] = 3 \cdot 4 = \underline{12}$
- $\underline{y[1]} = h[0] \cdot u[1] + h[1] \cdot u[0] = \overbrace{3 \cdot 4}^{12} + \overbrace{(2 \cdot (-0,8) - 3 \cdot 0,5) \cdot 4}^{-12,4} = \underline{-0,4}$
- $y[2] = h[0] \cdot u[2] + h[1] \cdot u[1] + h[2] \cdot u[0] = 3 \cdot 4 + (-12,4) + \overbrace{(2 \cdot (-0,8)^2 - 3 \cdot 0,5^2) \cdot 4}^{2,12}$

$\underline{y[2] = 1,72}$

1,1.d (F1)

$$\boxed{u(t)=4\cdot e^{0,5t}} \quad \boxed{h(t)=6\cdot\varepsilon(t)\cdot e^{-0,3t}\cdot\cos(5t+0,2)}$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot u(t-\tau)\,d\tau$$

$$6\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(\tau)\cdot e^{-0,3\tau}\cdot\cos(5\tau+0,2)\cdot 4\cdot e^{0,5(t-\tau)}\,d\tau$$; $\varepsilon(\tau)$ miatt 0-tól integrálunk.

$$24\cdot e^{0,5t}\int_0^{\infty}\underbrace{e^{-0,8\tau}}_{u}\cdot\underbrace{\cos(5\tau+0,2)}_{v'}\,d\tau=24\cdot e^{0,5t}\left[\underbrace{\left[e^{-0,8\tau}\cdot\frac{\sin(5\tau+0,2)}{5}\right]_0^{\infty}}_{-0,0397}-\int_0^{\infty}\underbrace{-0,8\cdot e^{-0,8\tau}}_{u}\cdot\underbrace{\cos(5\tau...}_{v'}\right.$$

$$-0,8\cdot e^{-0,8\tau}=u' \qquad v=\frac{\sin(5\tau+0,2)}{5}$$

$$=24\cdot e^{0,5t}\left[-0,0397-\left\{\underbrace{\left[-0,8\cdot e^{-0,8\tau}\cdot\frac{-\cos(5\tau+0,2)}{25}\right]_0^{\infty}}_{-0,0314}-\int_0^{\infty}0,64\cdot e^{-0,8\tau}\cdot\frac{-\cos(5\tau+0,2)}{25}\right\}\right]=$$

$$=24\cdot e^{0,5t}\left(-0,0084-\underbrace{\frac{0,64}{25}}_{0,0256}\cdot\int_0^{\infty}e^{-0,8\tau}\cdot\cos(5\tau+0,2)\,d\tau\right)=(-0,2016)\cdot e^{0,5t}-0,0256\int_0^{\infty}(\ldots)\,d\tau$$

$$\int_0^{\infty}24\cdot e^{0,5t}\cdot e^{-0,8\tau}\cdot\cos(5\tau+0,2)\,d\tau=\frac{-0,0246}{1,0256}\cdot e^{0,5t}=(-0,1967)\cdot e^{0,5t}=y(t)$$

1,1.d (D1)

$$\boxed{u[k]=2} \quad \boxed{h[k]=3\delta[k]+\varepsilon[k-1]\left(2\cdot(-0,8)^k-3\cdot 0,5^k\right)} \quad y[k]=\sum_{-\infty}^{\infty}u[k-i]\cdot h[i]$$

$$y[k]=\sum_{-\infty}^{\infty}\left(6\delta[i]+\varepsilon[i-1]\left(4\cdot(-0,8)^i-6\cdot 0,5^i\right)\right)$$; $\varepsilon[i-1]$ miatt $i=1\ldots\infty$

$$6+4\sum_1^{\infty}(-0,8)^i-6\sum_1^{\infty}0,5^i=6+4\left(\frac{1}{1-(-0,8)}-1\right)-6\left(\frac{1}{1-0,5}-1\right)=\frac{-16}{9}=y[k]$$

1.2.a. F1

$$\underline{x}' = \overset{A}{\begin{bmatrix} -2 & 0,7 \\ -2 & 0,4 \end{bmatrix}} \cdot \underline{x} + \overset{B}{\begin{bmatrix} 0,9 \\ -0,8 \end{bmatrix}} \cdot u(t) \qquad y(t) = \overset{c'}{[1,7 \quad -1,5]} \cdot \underline{x} + \overset{D}{0,7}\, u(t)$$

• $\det|\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}| = \begin{vmatrix} (\lambda+2) & -0,7 \\ 2 & (\lambda-0,4) \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-0,4) - 2\cdot(-0,7) = \lambda^2 + 1,6\lambda + 0,6$

$\lambda_1 = -0,6 \; ; \; \lambda_2 = -1$

• $\underline{\underline{L}}_1 = \dfrac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot (\underline{\underline{A}} - \lambda_2 \underline{\underline{E}}) \Longrightarrow 2,5 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0,7 \\ -2 & 1,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,5 & 1,75 \\ -5 & 3,5 \end{bmatrix} = \underline{\underline{L}}_1$

• $\underline{\underline{L}}_1 + \underline{\underline{L}}_2 = \underline{\underline{E}} \Longrightarrow \underline{\underline{L}}_2 = \begin{bmatrix} 3,5 & -1,75 \\ 5 & -2,5 \end{bmatrix}$

• $h(t) = D\cdot\delta(t) + \varepsilon(t)\cdot \underline{c}^T \cdot e^{\underline{\underline{A}}\cdot t} \cdot \underline{B} \; ; \; e^{\underline{\underline{A}}\cdot t} = e^{\lambda_1 \cdot t}\cdot \underline{\underline{L}}_1 + e^{\lambda_2 \cdot t}\cdot \underline{\underline{L}}_2 = e^{-0,6t}\cdot \underline{\underline{L}}_1 + e^{-t}\cdot \underline{\underline{L}}_2$

$\underline{c}^T \cdot e^{\underline{\underline{A}}\cdot t} \cdot \underline{B} = [1,7 \quad -1,5] \cdot \left(e^{-0,6t} \cdot \begin{bmatrix} -2,5 & 1,75 \\ -5 & 3,5 \end{bmatrix} + e^{-t} \cdot \begin{bmatrix} 3,5 & -1,75 \\ 5 & -2,5 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 0,9 \\ -0,8 \end{bmatrix} =$

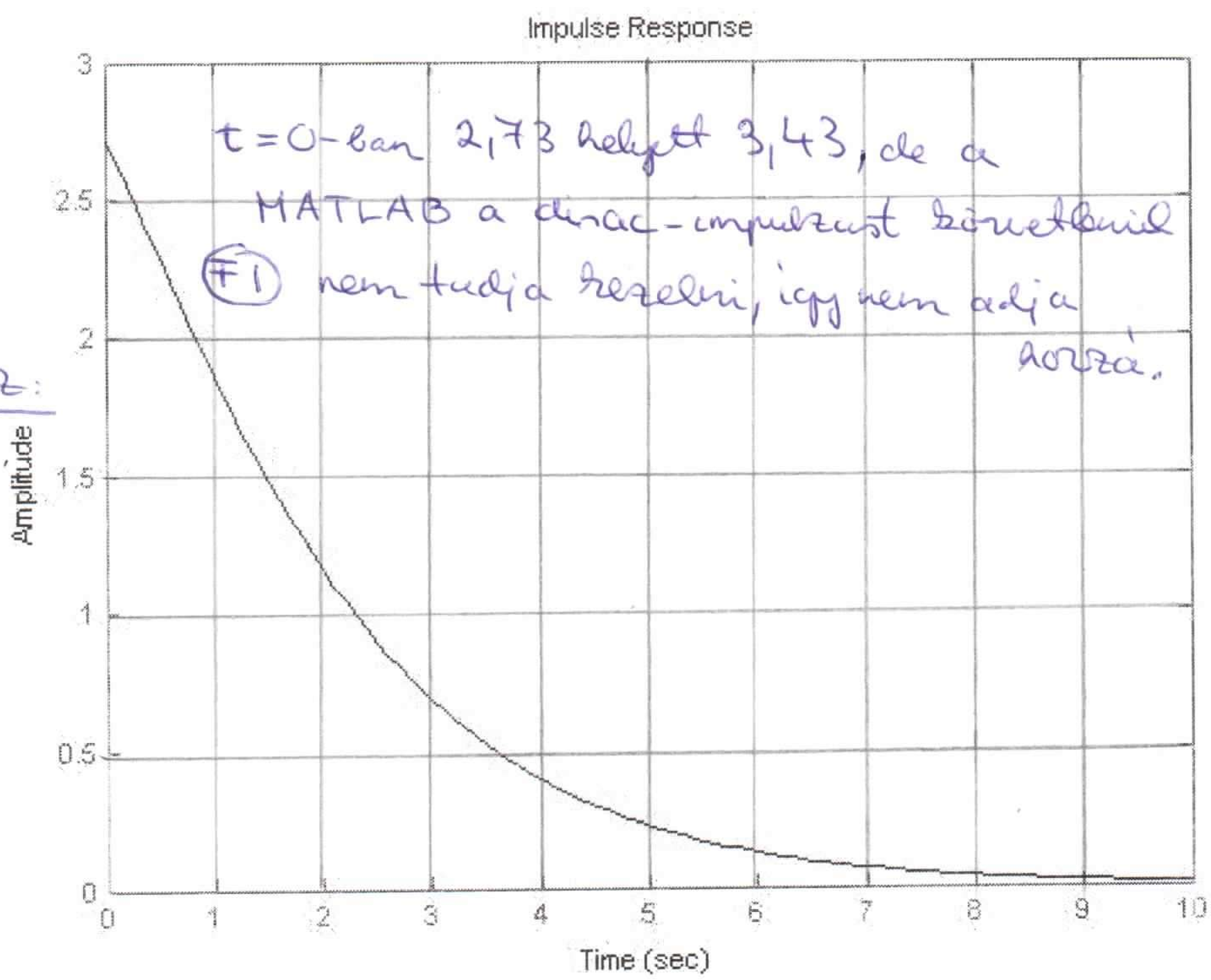
$= [1,7 \quad -1,5] \cdot \left(e^{-0,6t} \cdot \begin{bmatrix} -3,65 \\ -7,3 \end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix} 4,55 \\ 6,5 \end{bmatrix} \right) = 4,745 \cdot e^{-0,6t} - 2,015 \cdot e^{-t} = \underline{c}^T \cdot e^{\underline{\underline{A}}\cdot t} \cdot \underline{B}$

$h(t) = 0,7\,\delta(t) + \varepsilon(t) \cdot \left(4,745 \cdot e^{-0,6t} - 2,015 \cdot e^{-t}\right.$

• MATLAB kód az ábrához:

```
clear all;
A = [-2 0.7; -2 0.4]
B = [0.9; -0.8]
C = [1.7 -1.5]
D = 0.7

rd=ss(A,B,C,D)
impulse(rd,10)
```



1.2.a. D1

$$\underline{x}[k+1]=\overset{A}{\begin{bmatrix}1,2 & -2\\ 0,1 & 0,4\end{bmatrix}}\cdot\underline{x}[k]+\overset{B}{\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix}}\cdot u[k]$$

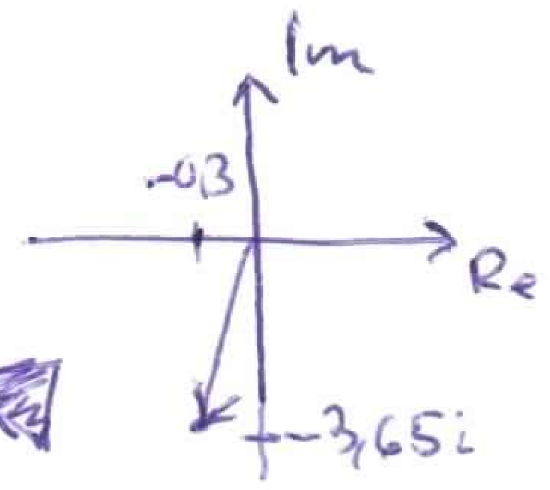
$$y[k]=\overset{c^T}{\begin{bmatrix}0,2 & 0,5\end{bmatrix}}\cdot\underline{x}[k]+\underset{D}{(-1,1)}u[k]$$

$$\bullet\ \det|\lambda\cdot\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}}|=\begin{vmatrix}(\lambda-1,2) & 2\\ -0,1 & (\lambda-0,4)\end{vmatrix}=(\lambda-1,2)(\lambda-0,4)-2\cdot(-0,1)=\lambda^2-1,6\lambda+0,68$$

$$\lambda_1=0,8+0,2i$$
$$\lambda_2=0,8-0,2i$$

$$\bullet\ \underline{\underline{L}}_1=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot(A-\lambda_2\cdot\underline{\underline{E}})=\frac{1}{0,4i}\cdot\begin{bmatrix}(0,4+0,2i) & -2\\ 0,1 & (-0,4+0,2i)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(0,5-i) & 5i\\ -0,25i & (0,5+i)\end{bmatrix}=\underline{\underline{L}}_1$$

$$\bullet\ \underline{\underline{L}}_1+\underline{\underline{L}}_2=\underline{\underline{E}}\Longrightarrow\underline{\underline{L}}_2=\begin{bmatrix}(0,5+i) & -5i\\ 0,25i & (0,5-i)\end{bmatrix}$$



$$\bullet\ h[k]=D\cdot\delta[k]+\varepsilon[k-1]\cdot\underline{c}^T\cdot\underline{\underline{A}}^{k-1}\cdot\underline{B}\ ;\ \underline{\underline{A}}^{k-1}=\lambda_1^{k-1}\cdot\underline{\underline{L}}_1+\lambda_2^{k-1}\cdot\underline{\underline{L}}_2$$

$$h[k]=D\cdot\delta[k]+\varepsilon[k-1]\cdot\left(\underline{c}^T\cdot\underline{\underline{L}}_1\cdot\underline{B}\cdot\lambda_1^{k-1}+\underline{c}^T\cdot\underline{\underline{L}}_2\cdot\underline{B}\cdot\lambda_2^{k-1}\right)$$

$$\underline{c}^T\cdot\underline{\underline{L}}_1\cdot\underline{B}=\begin{bmatrix}0,2 & 0,5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}(0,5-i) & 5i\\ -0,25i & (0,5+i)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix}=-0,3-3,65i=\sqrt{0,3^2+3,65^2}\cdot e^{j\cdot\left[\mathrm{arct}\left(\frac{3,65}{0,3}\right)\right.}$$

$$=3,6623\cdot e^{j\cdot 4,6304}=\underline{c}^T\cdot\underline{\underline{L}}_1\cdot\underline{B}$$

$$\underline{c}^T\cdot\underline{\underline{L}}_2\cdot\underline{B}=(\underline{c}^T\cdot\underline{\underline{L}}_1\cdot\underline{B})^*=3,6623\cdot e^{-j\cdot 4,6304}$$

$$\lambda_1=0,8+0,2i=\sqrt{0,8^2+0,2^2}\cdot e^{j\cdot\mathrm{arct}\left(\frac{0,2}{0,8}\right)}=0,8246\cdot e^{j\cdot 0,2450}\ ;\ \lambda_2=(\lambda_1)^*=0,8246\cdot e^{-j\cdot 0,2450}$$

$$h[k]=(-1,1)\delta[k]+\varepsilon[k-1]\left[3,6623\cdot e^{j\cdot 4,6304}\cdot\left(0,8246\cdot e^{j\cdot 0,2450}\right)^{k-1}+\left(3,6623\cdot e^{-j\cdot 4,6304}\cdot 0,8246\cdot e^{-j\cdot\ldots}\right.\right.$$

$$h[k]=(-1,1)\delta[k]+\varepsilon[k-1]\cdot 2\cdot\mathrm{Re}\left\{3,6623\cdot e^{j\cdot 4,6304}\cdot\left(0,8246\cdot e^{j\cdot 0,2450}\right)^{k-1}\right\}$$

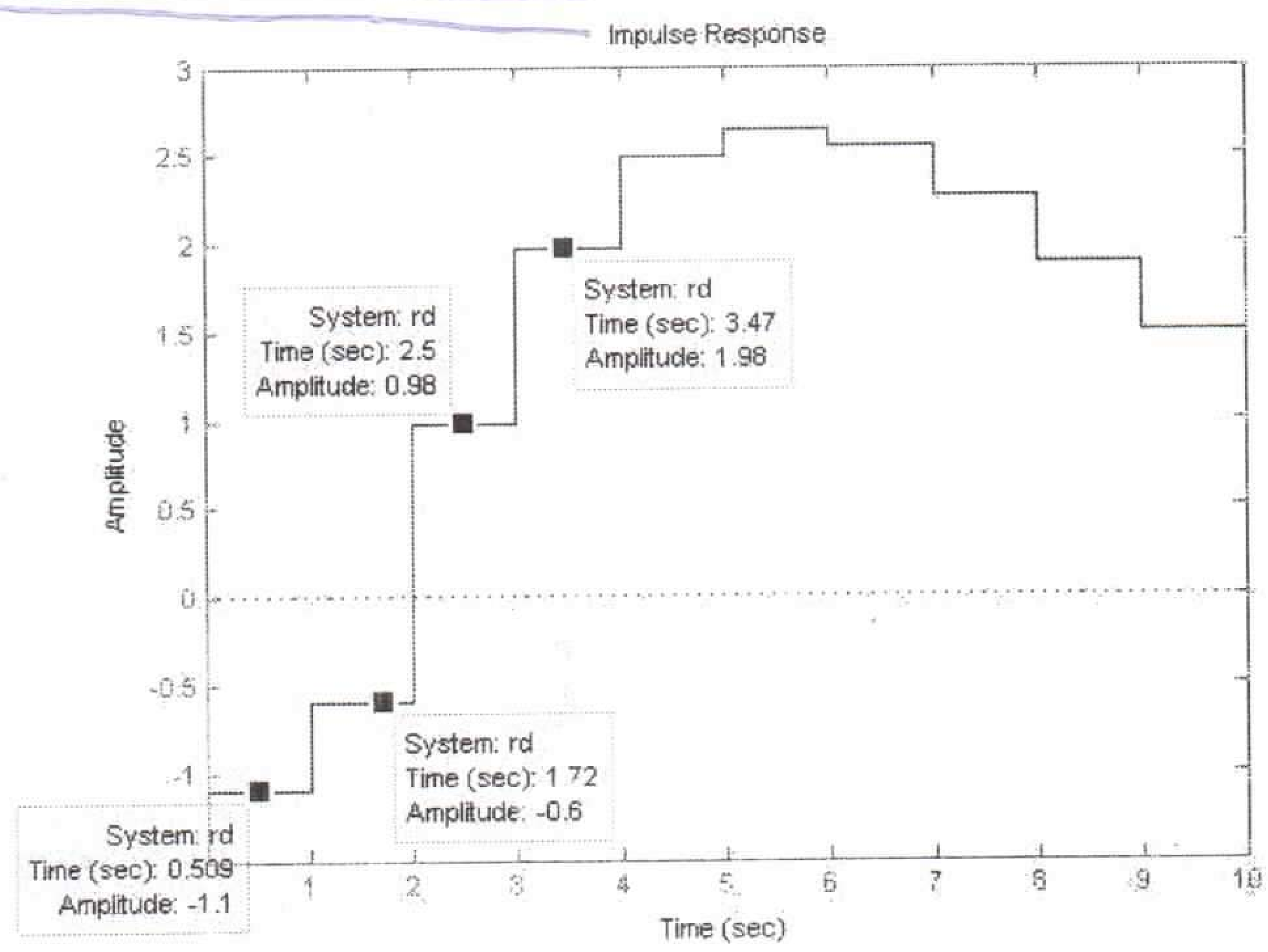
$$h[k]=(-1,1)\delta[k]+\varepsilon[k-1]\cdot 2\cdot 3,6623\cdot\mathrm{Re}\left\{0,8246^{k-1}\cdot e^{j[0,2450(k-1)+4,6304]}\right\}$$

$$h[k]=(-1,1)\delta[k]+\varepsilon[k-1]\cdot 8,8826\cdot 0,8246^k\cdot\cos(0,2450k+4,3854)$$

MATLAB kód az ábrához:

```
clear all;
A = [1.2 -2; 0.1 0.4]
B = [2; -2]
C = [0.2 0.5]
D = -1.1

rd=ss(A,B,C,D,1)
impulse(rd,10)
```



1.2.b

k	$u[k]$	$y[k]=h[k]$	$x_1[k]$	$x_2[k]$
-1	0	0	0	0
0	1	-1,1	0	0
1	0	-0,6	2	-2
2	0	0,98	+6,4	-0,6
3	0	1,976	8,880	0,400

$$\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,2 & -2 \\ 0,1 & 0,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} u[k]$$

$$y[k] = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} + (-1,1)\, u[k]$$

$$h[k] = (-1,1)\,\delta[k] + \varepsilon[k-1] \cdot 8,8826 \cdot 0,8246^k \cdot \cos(0,2450k + 4,3854)$$

$h[0] = -1,1$ ✓

$h[1] = -0,6$ ✓

$h[2] = 0,98$ ✓

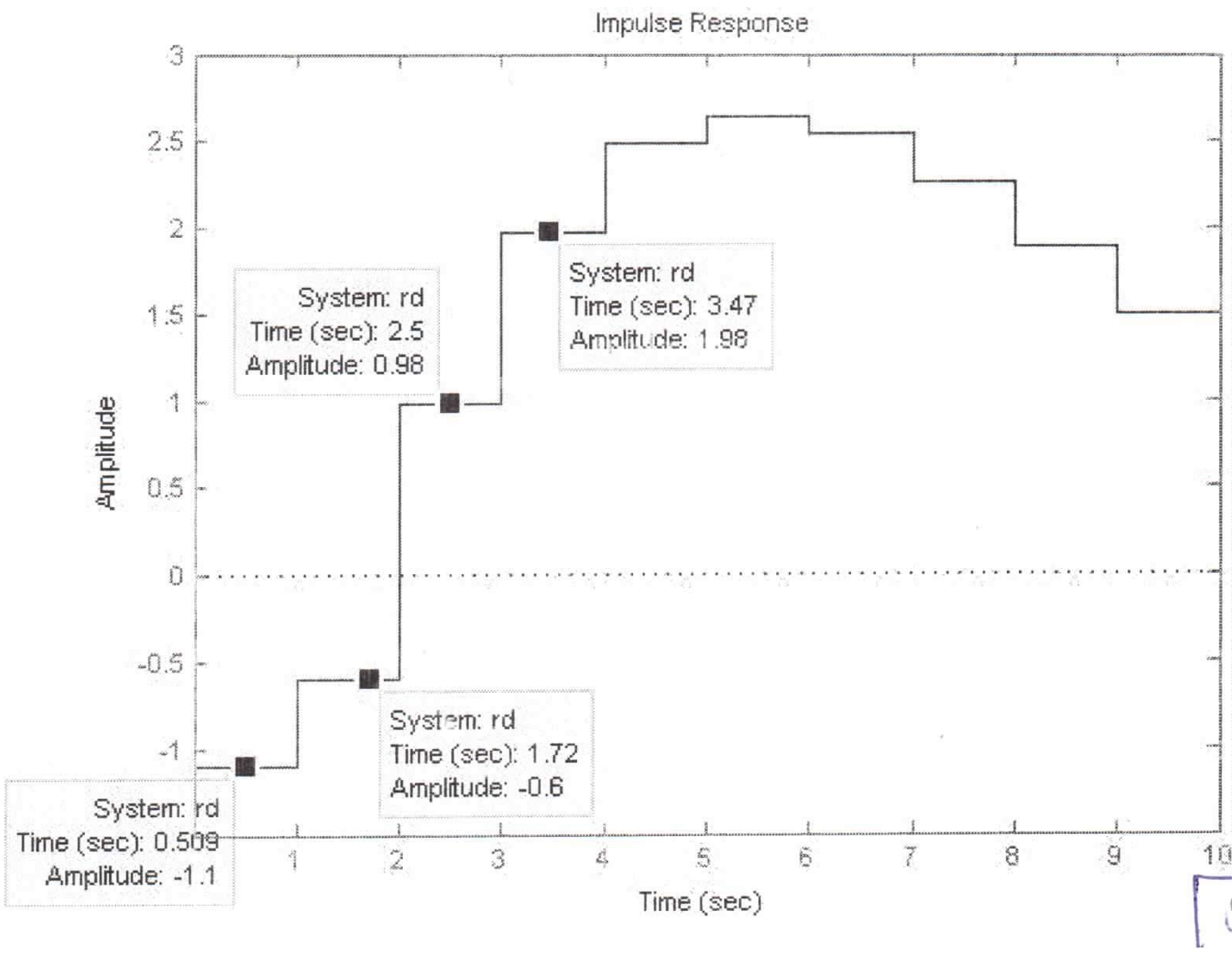
$(h[3] = 1,976$ ✓$)$

• MATLAB kód a táblázathoz:

```
clear all;
A = [1.2 -2; 0.1 0.4]
B = [2; -2]
C = [0.2 0.5]
D = -1.1
x = [0;0]
kmax = 4; % k = 15-ig számolunk, de a MATLAB 1-től indexel...
h = zeros(1, kmax); % előre foglalunk az impulzusválasz vektorának
k = 1;
% egységugrás, a MATLAB 1-től indexel!!!
6
u = zeros(1, kmax);
u(1) = 1;
while k <= kmax,
h(k) = C * x + D * u(k);
x = A * x + B * u(k)
k = k + 1;
end
h
```

x [0] = [0 ; 0]
x [1] = [2 ; -2]
x [2] = [6.4 ; -0.6]
x [3] = [8.880 ; 0,400]

h [0] = -1.1000
h [1] = -0.6000
h [2] = 0.9800
h [3] = 1.9760



$$\boxed{u(t)=\varepsilon(t)\left(2-e^{-0,4t}\right)} \quad \boxed{h(t)=0,7\delta(t)+\varepsilon(t)\left(4,745\cdot e^{-0,6t}-2,015\,e^{-t}\right)}$$

$$\bullet\; y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot u(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\left[0,7\delta(\tau)+\varepsilon(\tau)\left(4,745\cdot e^{-0,6\tau}-2,015\,e^{-\tau}\right)\right]\varepsilon(t-\tau)\left(2-e^{-0,4(t-\tau)}\right)d\tau=$$

$$=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} 0,7\delta(\tau)\cdot\varepsilon(t-\tau)\left(2-e^{-0,4t}\cdot e^{0,4\tau}\right)d\tau}_{1}+\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(\tau)\cdot\varepsilon(t-\tau)\cdot\left(2-e^{-0,4t}\cdot e^{0,4\tau}\right)\left(4,745\cdot e^{-0,6\tau}-2,015\,e^{-\tau}\right)d\tau}_{2}$$

(1) $\delta(\tau)$ miatt $\tau=0 \Rightarrow 0,7\cdot\varepsilon(t)\left(2-e^{-0,4t}\right)=\varepsilon(t)\left[1,4-0,7\cdot e^{-0,4t}\right]$

(2) $\varepsilon(\tau)$ miatt 0-tól, $\varepsilon(t-\tau)$ miatt t-ig integrálunk.

$$\int_0^t\left(2-e^{-0,4t}\cdot e^{0,4\tau}\right)\left(4,745\cdot e^{-0,6\tau}-2,015\cdot e^{-\tau}\right)d\tau=$$

$$=9,49\int_0^t e^{-0,6\tau}d\tau-4,03\cdot\int_0^t e^{-\tau}d\tau-4,745\cdot e^{-0,4t}\cdot\int_0^t e^{-0,2\tau}d\tau+2,015\cdot e^{-0,4t}\cdot\int_0^t e^{-0,6\tau}d\tau=$$

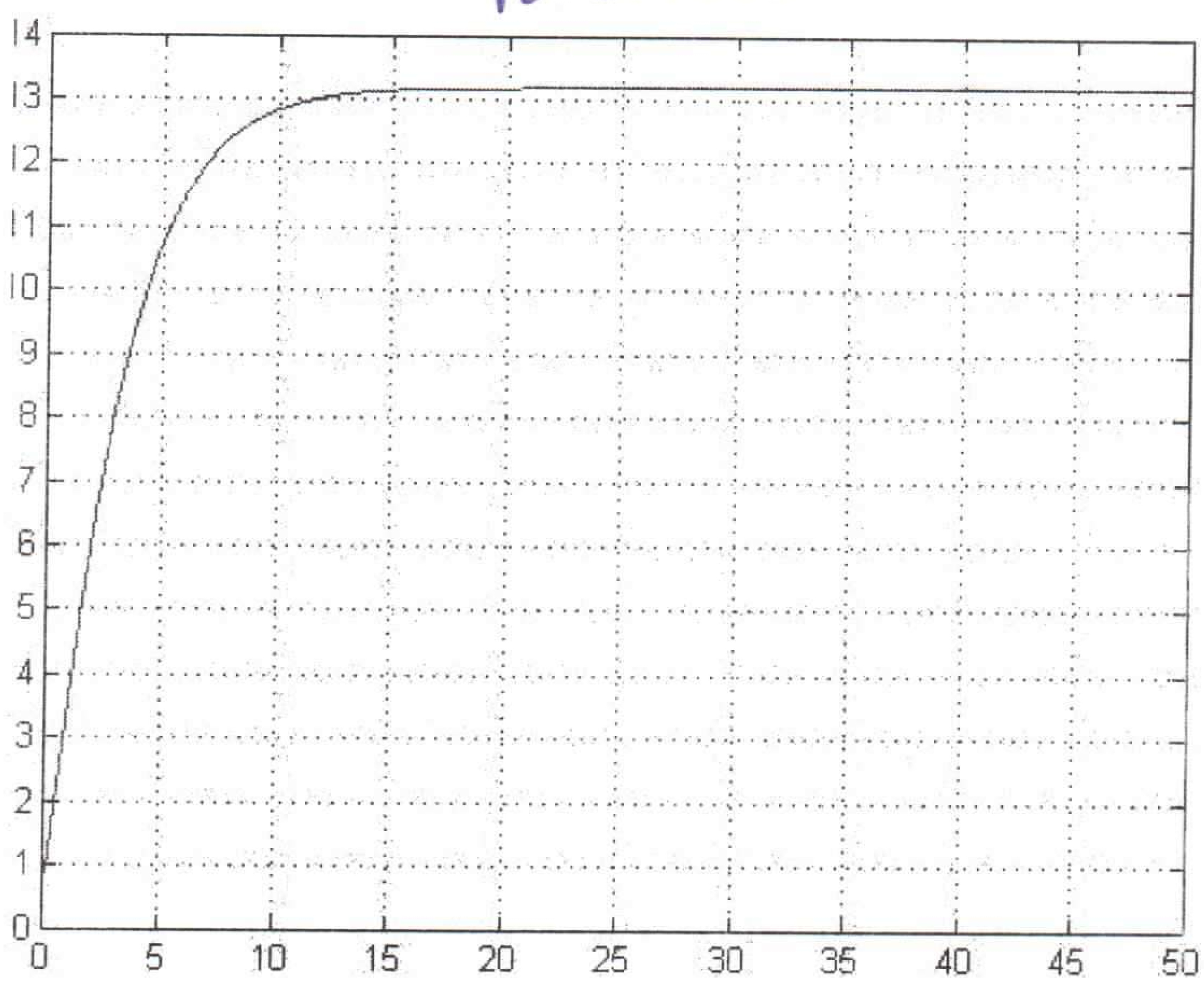
$$=\left[\frac{9,49}{(-0,6)}\left(e^{-0,6t}-1\right)-\frac{4,03}{(-1)}\left(e^{-t}-1\right)-\frac{4,745\cdot e^{-0,4t}}{(-0,2)}\left(e^{-0,2t}-1\right)+\frac{2,015\cdot e^{-0,4t}}{(-0,6)}\left(e^{-0,6t}-1\right)\right]\cdot\varepsilon(t)$$

$$\underline{y(t)}=(1)+(2)=\underline{\varepsilon(t)\left[0,6717\cdot e^{-t}+7,9083\cdot e^{-0,6t}-21,0667\cdot e^{-0,4t}+13,1867\right]}$$

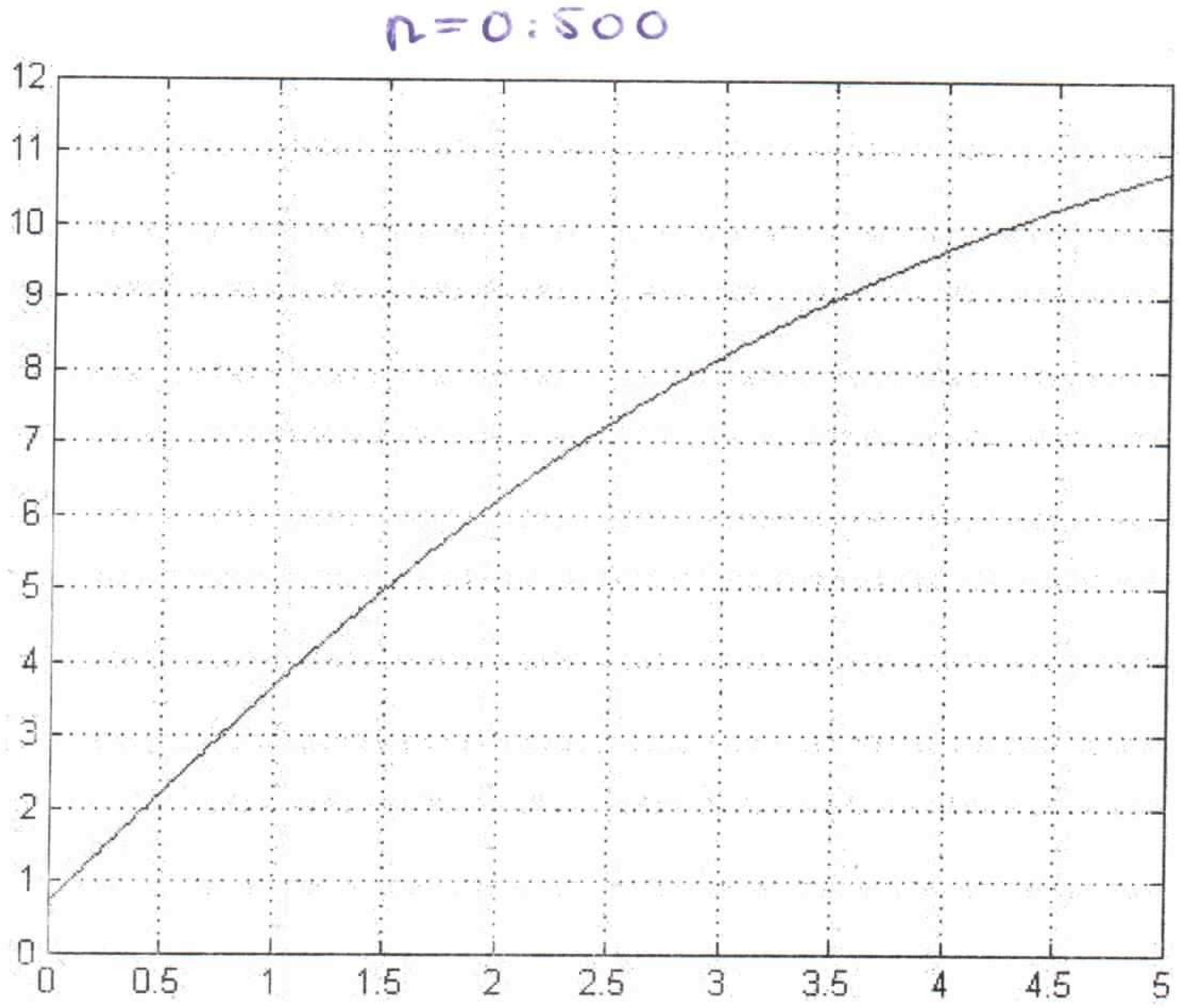
• A bal oldali ábráról leolvasható, hogy $\approx 13,1867$-be beáll, a jobb oldalin meg hogy $t=0$-ban 0,7, ami egyezik a képlettel. ✓

```
clear all;
A = [-2 0.7; -2 0.4] ; B = [0.9; -0.8] ; C = [1.7 -1.5] ; D = 0.7
rf=ss(A, B, C, D)
dt=0.01 ; p=0:500 ; t=p*dt ; u(p+1)=2-exp(-0.4*t)
y=lsim(rf, u, t)
[t', y]
plot(t, y)
```

n=0:5000



n=0:500



1.2.c. (D1) $\quad \bullet\; y[k]=\sum\limits_{-\infty} u[k-i]\cdot h[i]$

$$\boxed{u[k]=4\left(\varepsilon[k]-\varepsilon[k-6]\right)} \quad \boxed{h[k]=(-1{,}1)\,\delta[k]+\varepsilon[k-1]\cdot 8{,}8826\cdot 0{,}8246^{k}\cdot\cos(0{,}245\cdot k+4{,}3854)}$$

$$y[k]=\sum_{-\infty}^{\infty}\left[4\left(\varepsilon[k-i]-\varepsilon[k-i-6]\right)\right]\left[(-1{,}1)\,\delta[i]+\varepsilon[i-1]\cdot 8{,}8826\cdot 0{,}8246^{i}\cdot\cos(0{,}245\cdot i+4{,}3854)\right]$$

$$y[k]=\sum_{-\infty}^{\infty}4\cdot\left(\varepsilon[k-i]-\varepsilon[k-i-6]\right)\left(-1{,}1\,\delta[i]\right)+\sum_{-\infty}^{\infty}4\cdot\left(\varepsilon[k-i]-\varepsilon[k-i-6]\right)\cdot\varepsilon[i-1]\cdot(\ldots)$$

$\delta[i]$ miatt $i=0$, $\Rightarrow \underline{-4{,}4\left(\varepsilon[k]-\varepsilon[k-6]\right)}$

① $\varepsilon[k-i]$ miatt k-ig szummázunk.
② $\varepsilon[k-i-6]$ miatt $(k-6)$-ig szummázunk $\Big\}$ $\varepsilon[i-1]$ miatt $i=1$-től szummázunk.

$$① \; 4\cdot 8{,}8826\cdot\sum_{1}^{k}0{,}8246^{i}\cdot\frac{e^{j(0{,}245\cdot i+4{,}3854)}+e^{-j(0{,}2450\cdot i+4{,}3854)}}{2}$$

$$② \; -4\cdot 8{,}8826\cdot\sum_{1}^{k-6}0{,}8246^{i}\cdot\frac{e^{j(0{,}245\cdot i+4{,}3854)}+e^{-j(0{,}245\cdot i+4{,}3854)}}{2}$$

$$① \; 17{,}7652\cdot\sum_{1}^{k}\left(0{,}8246\cdot e^{j\cdot 0{,}245}\right)^{i}\cdot e^{j\cdot 4{,}3854}+17{,}7652\cdot\sum_{1}^{k}\left(0{,}8246\cdot e^{-j\cdot 0{,}245}\right)^{i}\cdot e^{-j\cdot 4{,}3854}$$

$$\boxed{\bullet\sum_{k=m}^{n}a\cdot r^{k}=\frac{a\cdot\left(r^{m}-r^{n+1}\right)}{1-r}} \Rightarrow 17{,}7652\cdot\left(\frac{e^{j\cdot 4{,}3854}\cdot\left[0{,}8246\cdot e^{j\cdot 0{,}245}-\left(0{,}8246\cdot e^{j\cdot 0{,}245}\right)^{i+1}\right]}{1-\left(0{,}8246\cdot e^{j\cdot 0{,}245}\right)}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}a&=62{,}8037\cdot e^{j\cdot 5{,}1708}\\ b&=62{,}8037\cdot e^{-j\cdot 5{,}1708}\\ b&=a^{*}\end{aligned}} \quad +17{,}7652\cdot\left(\frac{e^{-j\cdot 4{,}3854}\cdot\left[+0{,}8246\cdot e^{-j\cdot 0{,}245}-\left(0{,}8246\cdot e^{-j\cdot 0{,}245}\right)^{i+1}\right]}{1-\left(0{,}8246\cdot e^{-j\cdot 0{,}245}\right)}\right)$$

$$(33{,}4963-39{,}4967i)+(33{,}4963+39{,}4967i)=\underline{66{,}9926}$$

$$-\left[\overbrace{(27{,}7902-56{,}3206i)}^{a}\cdot\left(0{,}8246\cdot e^{j\cdot 0{,}245}\right)^{i+1}+\overbrace{(27{,}7902+56{,}3206i)}^{b}\left(0{,}8246\cdot e^{-j\cdot 0{,}245}\right)^{i+1}\right]$$

$$-62{,}8037\cdot 0{,}8246^{i+1}\left(e^{j\cdot 5{,}1708}\cdot e^{j\cdot 0{,}245\cdot(i+1)}+e^{-j\cdot 5{,}1708}\cdot e^{-j\cdot 0{,}245\cdot(i+1)}\right)$$

$$2\cdot\mathrm{Re}\left\{e^{j\cdot 5{,}1708}\cdot e^{j\cdot 0{,}245(i+1)}\right\}=2\cdot\mathrm{Re}\left\{e^{j(0{,}245\cdot i+5{,}4158)}\right\}=2\cos(0{,}245\cdot i+5{,}4158)$$

$$① \; \underline{66{,}9926-103{,}5759\cdot 0{,}8246^{i}\cdot\cos(0{,}245\cdot i+5{,}4158)}$$

1.2.c.(D1). feladat

(2)

Ugyan azt eljátsszuk, mint előbb, csak itt van egy (−1)-es szorzó, és $n=k$ helyett $n=k-6$ van.

[...]

$$-66{,}9926+62{,}8037\cdot 0{,}8246^{i-5}\Big(\underbrace{e^{j\cdot 5{,}1708}\cdot e^{j\cdot 0{,}245(i-5)}+e^{-j\cdot 5{,}1708}\cdot e^{-j\cdot 0{,}245(i-5)}}_{2\cdot \mathrm{Re}\{e^{j\,5{,}1708}\cdot e^{j\cdot 0{,}245(i-5)}\}=2\cdot\mathrm{Re}\{e^{j(0{,}245\cdot i+3{,}9458)}\}=2\cdot\cos(0{,}245 i+3{,}9458)}$$

(2) $\underline{-66{,}9926+329{,}4569\cdot 0{,}8246^{i}\cdot\cos(0{,}245\cdot i+3{,}9458)}$

(1)+(2) $=\varepsilon[k-1]\cdot 0{,}8246^{k}\cdot\big[329{,}4569\cdot\cos(0{,}245\cdot k+3{,}9458)-103{,}5759\cdot\cos(0{,}245\cdot k+5{,}415$

$$\underline{y[k]=-4{,}4(\varepsilon[k]-\varepsilon[k-6])+\varepsilon[k-1]\cdot 0{,}8246^{k}\cdot\big[329{,}4569\cdot\cos(0{,}245\cdot k+3{,}9458)-103{,}5759\cdot\cos(0{,}245\cdot k+5{,}4158)\big]}$$

VAGY

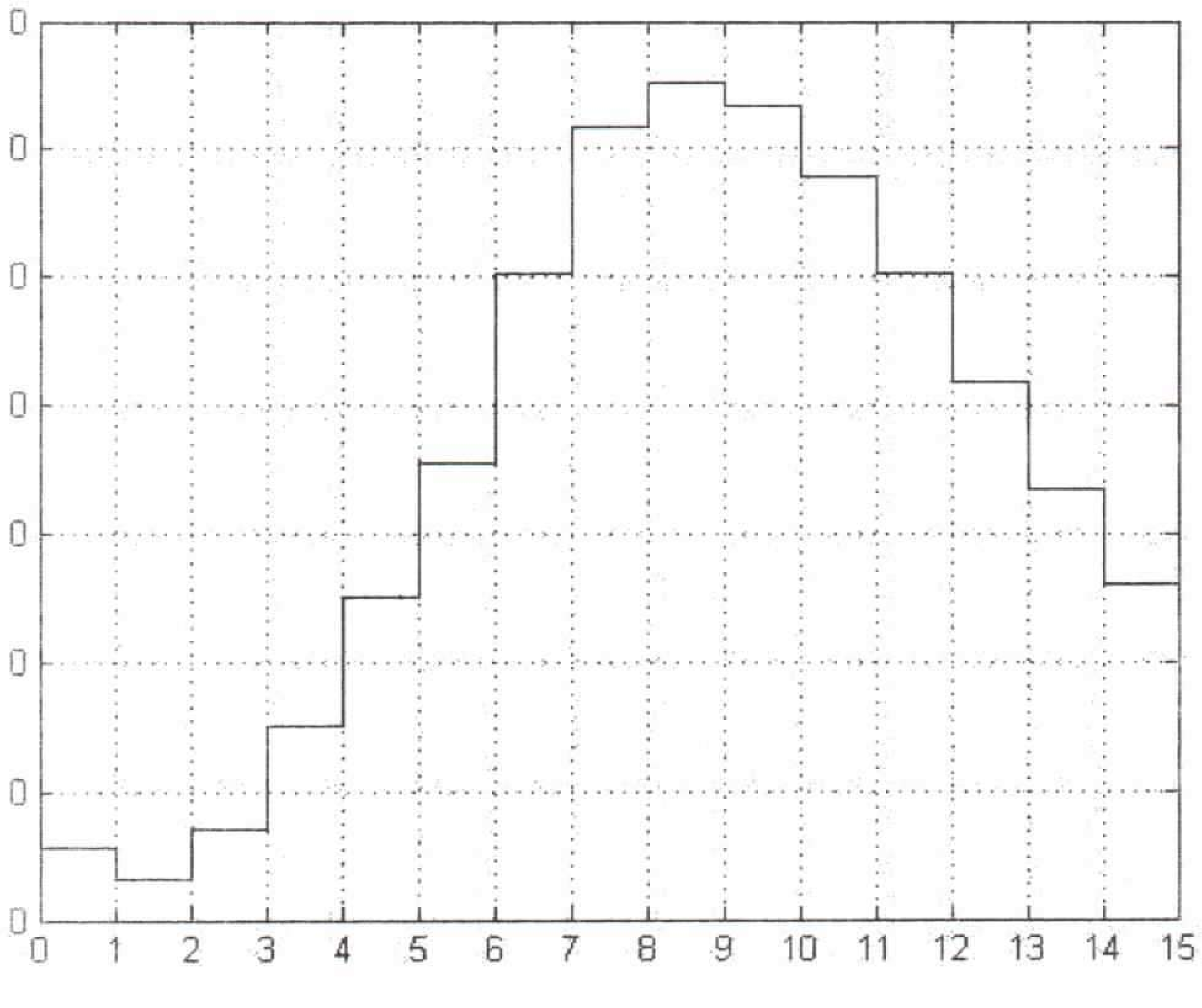
$$y[k]=-4{,}4(\delta[k])+\varepsilon[k-1]\cdot 125{,}6074\cdot\big[0{,}8246^{k-5}\cdot\cos(0{,}245k+3{,}9458)-0{,}8246^{k+1}\cdot\cos(0{,}245k+5{,}4158)\big]$$

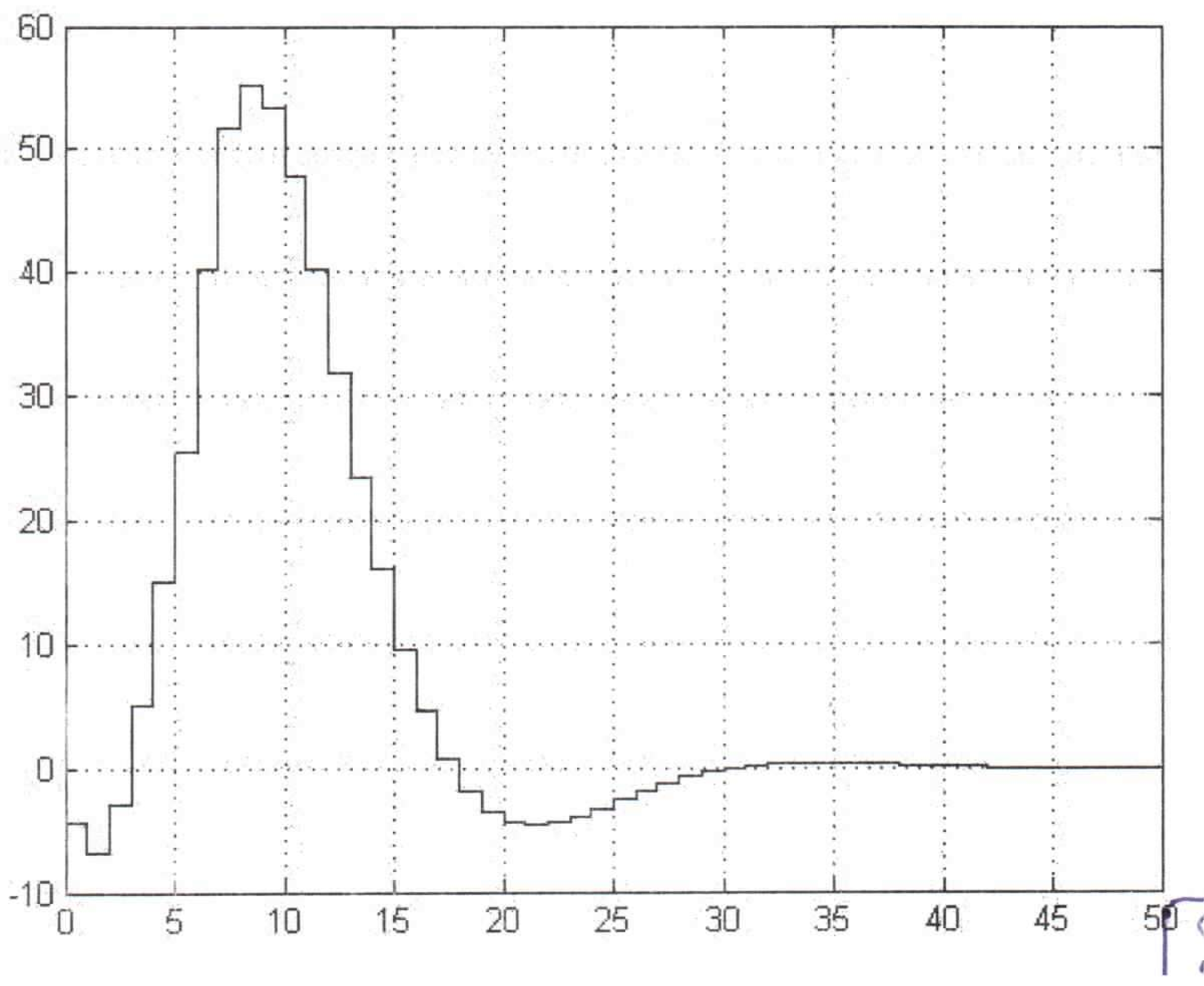
De valami hiba van, $k\geq 7$-re (meg $k=0$-ra) ad jó eredményt!!!

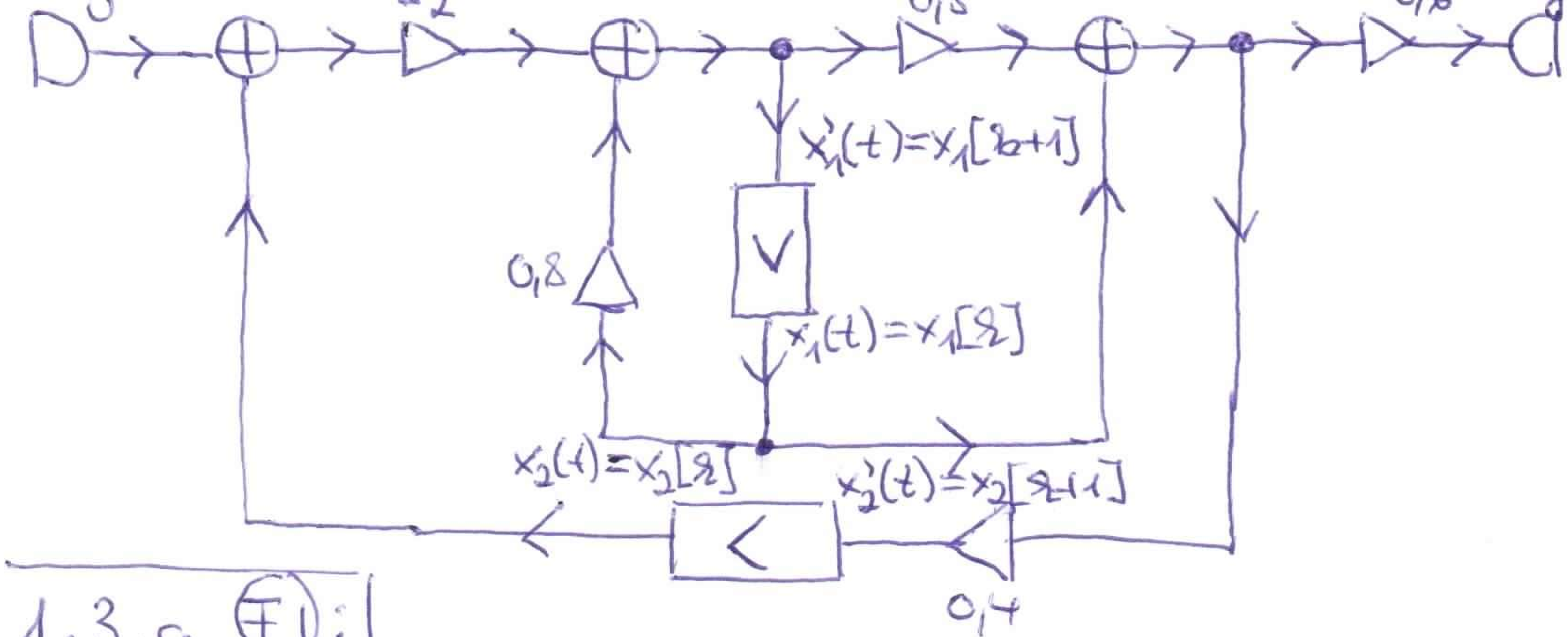
```
clear all;
A = [1.2 -2; 0.1 0.4] ; B = [2; -2] ; C = [0.2 0.5] ; D = -1.1
rd=ss(A, B, C, D, 1)

k=0:5 ; u(k+1)=4 ; k=6:15 ; u(k+1)=0

k=0:15 ; y=lsim(rd, u, k) ; [k', y] ; bar(k, y, 0.2)
```







1.3.a. FI:

$x_1'(t)=0{,}8x_1(t)-2x_2(t)-2u(t)$

$x_2'(t)=(0{,}5x_1'(t)+x_1(t))\cdot 0{,}4 = 0{,}56x_1(t)-0{,}4x_2(t)-0{,}4u(t)$

$y(t)=\dfrac{(-0{,}6)\cdot x_2'(t)}{0{,}4} = -0{,}84x_1(t)+0{,}6x_2(t)+0{,}6u(t)$

1.3.a. DI: Az előző feladat alapján ⟶

$x_1[k+1]=0{,}8x_1[k]-2x_2[k]-2u[k]$

$x_2[k+1]=0{,}56x_1[k]-0{,}4x_2[k]-0{,}4u[k]$

$y[k]=-0{,}84x_1[k]+0{,}6x_2[k]+0{,}6u[k]$

$\underline{A}=\begin{bmatrix}0{,}8 & -2\\ 0{,}56 & -0{,}4\end{bmatrix}$ $\underline{B}=\begin{bmatrix}-2\\ -0{,}4\end{bmatrix}$ $\underline{c}^T=[-0{,}84\ \ 0{,}6]$ $D=0{,}6$ Mindkét rendszer esetén

1.3.b. FI • Hurwitz kritérium szükséges, hogy az FI rendszer GV stabil legyen.

$\lambda^2+a\lambda+b=0;\ a,b>0$

$\det|\lambda\underline{E}-\underline{A}|=\begin{vmatrix}(\lambda-0{,}8) & 2\\ -0{,}56 & (\lambda+0{,}4)\end{vmatrix}=\lambda^2-0{,}4\lambda+0{,}8$; $a=-0{,}4$ → tehát NEM GV stabil a rendszer ; $b=0{,}8$

• ASZ stabil a rendszer, ha $Re\{\lambda_i\}<0$; $\left.\begin{array}{l}\lambda_1=0{,}2+0{,}87i\\ \lambda_2=0{,}2-0{,}87i\end{array}\right\}$ → tehát NEM ASZ stabil a rendszer

1.3.b. DI • Jury kritérium szükséges, hogy a DI rendszer GV stabil legyen.

$\left.\begin{array}{l}1+a_1+a_2>0 \Longrightarrow 1-0{,}4+0{,}8>0\ ✓\\ 1-a_1+a_2>0 \Longrightarrow 1+0{,}4+0{,}8>0\ ✓\\ |a_2|<1 \Longrightarrow |0{,}8|<1\ ✓\end{array}\right\}$ GV stabil a rendszer

• ASZ stabil a rendszer, ha $|\lambda_i|<1$ (vagyis a sajátértékek az egységsugarú körbe esnek). Ez fennáll, tehát ASZ stabil a rendszer