Tömegkiszolgálás
házi feladatok megoldásai, 2020 tavasz

Minden héten összesen 2 pontot érnek a kitűzött feladatok.

1.HF: (Beadási határidő: 2020.03.02.)

HF 1.1 a.) Pistike 9-szer dob egy szabályos dobókockával. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobások közül pont 5 lesz hatos?

b.) Móricka addig dobál egy szabályos dobókockával, amíg nem sikerül neki hatszor hatost dobni. (A hat darab hatos dobásnak persze nem kell egymás után lenni.) Mennyi a valószínűsége, hogy pont 10 dobásra lesz szüksége?

c.) Legyen X Móricka dobásainak száma. Adjuk meg X eloszlását (vagyis a lehetséges értékeket és azok valószínűségeit)!

d.) Számoljuk ki X várható értékét és szórását! *(Tipp: ehhez nem kell az előző részfeladatot megoldani.)*

Megoldás:

a.) Legyen Y a dobott hatosok száma 9 próbálkozásból. Így Y binomiális eloszlású $n = 9$ és $p = \frac{1}{6}$ paraméterekkel, ezért

$$\mathbb{P}(Y = 5) = \binom{9}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{9-5} \approx 0.0078 = 0.78\%$$

b.) Ehhez az kell, hogy az első 9 dobásból pont 5 legyen hatos (mint az előző feladatban), és a tizedik dobás is hatos legyen. Vagyis a függetlenség miatt, az előző feladat-beli Y jelöléssel

$$\mathbb{P}(\text{pont 10 dobás kell}) = \mathbb{P}(Y = 5)\frac{1}{6} = \binom{9}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.0013 = 0.13\%$$

c.) X lehetséges értékei persze $k = 6, 7, 8, 9, \ldots$. Ezek valószínűségei az előző feladat mintájára

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^{k-6}$$

d.) Legyen ξ_1 az első hatoshoz szükséges dobások száma. Legyen ξ_2 a második hatoshoz szükséges dobások száma *az első hatostól számítva.* Legyen ξ_3 a harmadik hatoshoz szükséges dobások száma *a második hatostól számítva.* És így tovább: legyen ξ_n az n-edik hatoshoz szükséges dobások száma *az $n-1$-edik hatostól számítva.* Így $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ azonos, $Geom(\frac{1}{6})$ eloszlásúak, amiből $\mathbb{E}\xi_i = \frac{1}{1/6} = 6$ és $\mathbb{V}ar\xi_1 = \frac{5/6}{(1/6)^2} = 30$. És persze a lényeg, hogy

$$X = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_6.$$

A várható érték összeadódik, ezért

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\xi_1 + \cdots + \mathbb{E}\xi_6 = 6 \cdot 6 = 36.$$

Ezen felül a ξ_i-k *függetlenek is*, ezért a szórásnégyzetük is összeadódik:

$$\mathbb{V}arX = \mathbb{V}ar\xi_1 + \cdots + \mathbb{V}ar\xi_6 = 6 \cdot 30 = 180.$$

Ebből a szórás

$$DX = \sqrt{\mathbb{V}arX} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \approx 13.4$$

(Megjegyzés: Persze igaz, hogy

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=6}^{\infty} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=6}^{\infty} k\binom{k-1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^{k-6} = \cdots = 36,$$

de ezt sokkal macerásabb kiszámolni. Arról nem is beszélve, hogy milyen macerás az

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \sum_{k=6}^{\infty} k^2\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=6}^{\infty} k^2\binom{k-1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^{k-6} = \cdots = 1476$$

számolás, amiből $\mathbb{V}arX = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}X)^2 = 1476 - 36^2 = 180$. *A tanulság az, hogy a várható értéket és a szórást sokszor nem közvetlenül az eloszlásból célszerű számolni.)*

HF 1.2 Egy villanykörte élettartama exponenciális eloszlású. A felezési idő 69.31 nap, ami azt jelenti, hogy ha sok körtét nézünk, akkor ennyi idő alatt ég ki a fele.

a.) Mennyi az élettartam eloszlásának λ paramétere (rátája)

i.) ha az időt években mérjük?

ii.) ha az időt napokban mérjük?

b.) Veszünk egyetlen ilyen villanykörtét. Mennyi a valószínűsége, hogy

i.) egy napon belül kiég?

ii.) két napon belül kiég?

iii.) három napon belül kiég?

(Figyelem: nem csak képleteket kérek, hanem konkrét számokat!)

Megoldás:

a.) Az egyszerűség kedvéért úgy számolok, hogy 1év = 365nap. Legyen az élettartam X, ennek eloszlásfüggvénye F, a felezési idő pedig $T_{1/2} = 69.31$nap. Ez azt jelenti, hogy

$$\frac{1}{2} = \mathbb{P}(X < T_{1/2}) = F(T_{1/2}) = 1 - e^{\lambda T_{1/2}},$$

amiből

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \approx \frac{0.6931}{69.31\text{nap}} = 0.01\frac{1}{\text{nap}} = 3.65\frac{1}{\text{év}},$$

tehát

i.) ha az időt években mérjük, akkor $\lambda \approx 3.65$,

ii.) ha az időt napokban mérjük, akkor $\lambda \approx 0.01$.

b.) Az időt napokban mérve

i.) $\mathbb{P}(X < 1) = F(1) \approx 1 - e^{-0.01} \approx 0.00995$

ii.) $\mathbb{P}(X < 2) = F(2) \approx 1 - e^{-0.02} \approx 0.01980$

iii.) $\mathbb{P}(X < 3) = F(3) \approx 1 - e^{-0.03} \approx 0.02955$

Figyelemre méltó, hogy még két értékes jegyre kerekítve is

i.) $\mathbb{P}(X < 1) \approx 0.010$

ii.) $\mathbb{P}(X < 2) \approx 0.020$

iii.) $\mathbb{P}(X < 3) \approx 0.030$

vagyis rövid t időre jó közelítéssel $\mathbb{P}(X < t) \approx \lambda t$.

2.HF: (Beadási határidő: 2020.03.16.)

HF 2.1 Egy diszkrét idejű, időben homogén X_n Markov lánc állapottere $S = \{1, 2, 3, 4\}$. A Markov lánc az 1-es állapotból $50-50\%$ valószínűséggel ugrik a 2-es és 3-as állapotba. Ha a 2-es állapotban van, akkor $50-50\%$ valószínűséggel ugrik a 3-as és 4-es állapotba. Ha a 3-as állapotban van, akkor $50-50\%$ valószínűséggel ugrik a 4-es és 1-es állapotba. A 4-es állapotból mindig az 1-esbe ugrik. A Markov lánc X_0 kezdeti állapotát két érmedobással sorsoljuk, egyenlő esélyt adva mind a négy állapotnak.

a.) Rajzoljuk fel a Markov lánc gráf-reprezentációját.

b.) Írjuk fel a Markov lánc átmenetmátrixát.

c.) Írjuk fel a Markov lánc kezdeti eloszlás vektorát.

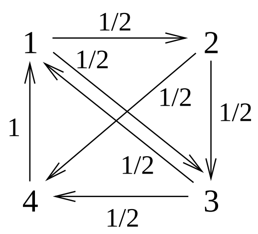
d.) Mennyi a valószínűsége, hogy a folyamat kezdetén a 1341223 állapot-sorozatot figyeljük meg (a 0-dik (kezdő) állapotot is beleértve)?

e.) Mennyi a $\mathbb{P}(X_4 = 1 \mid X_0 = 1)$ átmenetvalószínűség?

f.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait.

Megoldás:

a.) A gráf-reprezentáció



b.) Az átmenetmártix $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c.) A kezdeti eloszlás vektor $\pi(0) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, mert mind a négy állapotnak azonos esélyt adtunk.

d.)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(1341223) &= \mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 3, X_2 = 4, X_3 = 1, X_4 = 2, X_5 = 2, X_6 = 3) \\ &= \pi_1(0) P_{13} P_{34} P_{41} P_{12} P_{22} P_{23} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

e.) Az 1-es állapotból az 1-esbe négy lépésben visszajutni csak kétféleképpen lehet: $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$, vagy $1 \to 3 \to 1 \to 3 \to 1$. Ezek feltételes val.sége (feltéve, hogy $X_0 = 1$) $P_{12} P_{23} P_{34} P_{41} = \frac{1}{8}$, illetve $P_{13} P_{31} P_{13} P_{31} = \frac{1}{16}$, így

$$\mathbb{P}(X_4 = 1 \mid X_0 = 1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$$

f.) Minden π stacionárius eloszlás (sorvektor) a

$$(P^T - I)\pi^T = 0$$

lineáris egyenletrendszer olyan megoldása, ahol a sorösszeg 1. (Itt I az egységmátrix.) Jelen esetben

$$P^T - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

vagyis a lineáris egyenletrendszer a szokásos mátrix-reprezentációval

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Ezt megoldjuk pl. Gauss eliminációval:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -3/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -5/8 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 5/8 & -3/4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -5/8 & 3/4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6/5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 8/5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6/5 & 0 \end{array}\right)$$

amiből

$$\pi_1 = \frac{8}{5}\pi_4 \quad , \quad \pi_2 = \frac{4}{5}\pi_4 \quad , \quad \pi_3 = \frac{6}{5}\pi_4.$$

Így pl. a $\pi_4 := 5$ önkényes választással megkapjuk a lineáris egyenletrendszer egy megoldását, aminek minden más megoldás a számszorosa: $\tilde{\pi} = (8\,4\,6\,5)$. Ez még nem az, amit keresünk, mert az elemek összege nem 1, hanem $8 + 4 + 6 + 5 = 23$, ezért a keresett egyetlen normált megoldást úgy kapjuk, hogy ezt a $\tilde{\pi}$-t lenormáljuk, vagyis leosztjuk 23-mal:

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{8}{23} & \frac{4}{23} & \frac{6}{23} & \frac{5}{23} \end{pmatrix}.$$

HF 2.2 Egy fagyis bácsi előtt gyerekek állnak sorba. Ő minden sorra kerülő gyereket véletlen idő alatt szolgál ki, és az új gyerekek is véletlenszerűen érkeznek, de szigorúan egyesével. Egy megfigyelő mindig feljegyzi a sor hosszát, amikor az *változik*, vagyis miután eggyel csökken (mert egy gyereket kiszolgáltak), vagy eggyel nő (mert egy új gyerek érkezik). Legyen X_0 a sor kezdeti hossza, X_n pedig a sor hossza az n-edik változás után ($n = 1, 2, 3\ldots$). A megfigyelő azt tapasztalja, hogy X_n valamilyen p valószínűséggel 1-gyel nő, a maradék $q = 1 - p$ valószínűséggel pedig eggyel csökken, az előzményektől függetlenül, kivéve, ha a sor üres (mert akkor persze csak nőni tud), vagy ha a sor hossza elér egy K maximumot, mert akkor több gyerek nem állhat be (az apukája elvonszolja), így onnan a sorhossz csak csökkenhet. (Így X_n Markov lánc.)

Írjuk fel a Markov lánc állapotterét és átmenetmátrixát, keressük meg a stacionárius eloszlásait, valamint döntsük el, hogy a Markov lánc periodikus-e illetve pozitív rekurrens-e vagy sem,

a.) Ha $p = \frac{1}{3}$ és $K = 4$,

b.) Ha $p = \frac{2}{3}$ és $K = 4$,

c.) Ha $p = \frac{1}{3}$ és $K = \infty$,

d.) Ha $p = \frac{2}{3}$ és $K = \infty$.

Megoldás:

Az állapottér az a.) és b.) esetben $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, a c.) és d.) esetben $S = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, dots\}$. A gráf-reprezentáció $q := 1 - p$ jelöléssel az a.) és b.) estben

$$0 \underset{q}{\overset{1}{\rightleftarrows}} 1 \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} 2 \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} 3 \underset{1}{\overset{p}{\rightleftarrows}} 4$$

a c.) és d.) esetben

$$0 \underset{q}{\overset{1}{\rightleftarrows}} 1 \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} 2 \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} 3 \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} 4 \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \cdots\cdots\cdots$$

Így az átmenetmátrix az a.) és b.) esetben

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A π stacionárius eloszlás (sorvektor) keresésének egyik módja, hogy megoldjuk a $(P_I^T)\pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszert. A Gauss eliminációt csak odáig csináljuk, hogy a főátló alatt csupa nulla legyen: ehhez a főátló minden eleme segítségével csak egy nemnulla elemet kell eliminálni (a közvetlenül alatta lévőt):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & -1 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & -1 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Az egyenleteket kiolvasva azt látjuk, hogy

(1) $$1\pi_0 = q\pi_1 \quad , \quad p\pi_1 = q\pi_2 \quad , \quad p\pi_2 = q\pi_3 \quad , \quad p\pi_3 = 1\pi_4$$

vagyis megvan a megoldás rekurzívan:

(2) $$\pi_1 = \frac{1}{q}\pi_0 \quad , \quad \pi_2 = \frac{p}{q}\pi_1 \quad , \quad \pi_3 = \frac{p}{q}\pi_2 \quad , \quad \pi_4 = p\pi_3.$$

Például $\pi_0 = 1$ önkényes választással megkapjuk a lineáris egyenletrendszer egy megoldását, aminek minden más megoldás a számszorosa:

$$\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{q} & \frac{p}{q^2} & \frac{p^2}{q^3} & \frac{p^3}{q^3} \end{pmatrix}$$

a.) Mivel $p = \frac{1}{3}$ és $q = \frac{2}{3}$,

$$\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Ebben a sorösszeg $1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{30}{8}$, vagyis a normáláshoz ennyivel kell leosztani:

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{8}{30} & \frac{12}{30} & \frac{6}{30} & \frac{3}{30} & \frac{1}{30} \end{pmatrix}.$$

Látható, hogy a vége felé erősen csökken – hát persze: ez a folyamat lefelé szeret ugrani.

b.) Mivel $p = \frac{2}{3}$ és $q = \frac{1}{3}$,

$$\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

Ebben a sorösszeg $1 + 3 + 6 + 12 + 8 = 30$, vagyis a normáláshoz ennyivel kell leosztani:

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{30} & \frac{3}{30} & \frac{6}{30} & \frac{12}{30} & \frac{8}{30} \end{pmatrix}.$$

Hát persze: Ez a Markov lánc pont ugyanaz, mint az előző, csak az állapotok vannak fordított sorrendben számozva.

A c.) és d.) esetben a mátrix végtelen:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \\ 0 & 0 & q & 0 & p & \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

de $(P^T - I)\pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszer megoldása ugyanúgy megy, mint eddig:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & q & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & q & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & p & -1 & q & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & p & -1 & q & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & -1 & & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & q & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -p & q & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & -p & q & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p & q & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -p & & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \end{array}\right)$$

Az egyenleteket kiolvasva azt látjuk, hogy

$$(3) \qquad 1\pi_0 = q\pi_1 \quad , \quad p\pi_1 = q\pi_2 \quad , \quad p\pi_2 = q\pi_3 \quad , \quad \dots \quad , \quad p\pi_k = q\pi_{k+1} \quad , \quad \dots$$

vagyis megvan a megoldás rekurzívan:

$$(4) \qquad \pi_1 = \frac{1}{q}\pi_0 \quad , \quad \pi_2 = \frac{p}{q}\pi_1 \quad , \quad \pi_3 = \frac{p}{q}\pi_2 \quad , \quad \dots \quad , \quad \pi_{k+1} = \frac{p}{q}\pi_k \quad , \quad \dots$$

amiből egyből látszik a zárt alak:

$$\pi_k = \frac{1}{q}\left(\frac{p}{q}\right)^{k-1}\pi_0 \quad , \quad k = 1, 2, \dots$$

Például $\pi_0 = 1$ önkényes választással megkapjuk a lineáris egyenletrendszer egy megoldását, aminek minden más megoldás a számszorosa:

$$\tilde{\pi} = \left(1 \quad \frac{1}{q} \quad \frac{p}{q^2} \quad \frac{p^2}{q^3} \quad \frac{p^3}{q^4} \quad \dots \quad \frac{1}{q}\left(\frac{p}{q}\right)^{k-1} \quad \dots\right)$$

c.) Mivel $p = \frac{1}{3}$ és $q = \frac{2}{3}$,

$$\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{16} & \dots & \frac{3}{2^k} & \dots \end{pmatrix}.$$

Ebben a soröszeg $1 + 3 * \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) = 1 + 3 \cdot 1 = 4$, vagyis a normáláshoz ennyivel kell leosztani:

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{16} & \frac{3}{32} & \frac{3}{64} & \dots & \frac{3}{4 \cdot 2^k} & \dots \end{pmatrix}.$$

Hogy teljesen precízek legyünk:

$$\pi_k = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{, ha } k = 0 \\ \frac{3}{4 \cdot 2^k} & \text{, ha } k = 1, 2, 3 \dots \end{cases}$$

d.) Mivel $p = \frac{2}{3}$ és $q = \frac{1}{3}$,

$$\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 12 & 24 & \dots & 3 \cdot 2^{k-1} & \dots \end{pmatrix}.$$

Ebben a sorösszeg $1 + 3 + 6 + 12 + 24 + \dots = \infty$, vagyis a lineáris egyenletrendszer megoldásai *nem normálhatók*. Ennek megfelelően ennek a Markov láncnak **nincs stacionárius eloszlása**. *(Megj: Stacionárius **mérték** van, hiszen épp most találtuk meg, de **eloszlás** csak úgy lehetne, ha az össz-súly* 1.*)*

Végül az utolsó két kérdésre a válasz:

- A Markov lánc mind a négy esetben periodikus, mert pl. a 0-ból a 0-ba csak páros sok lépésben lehet visszajutni: a periódus 2.
- A Markov lánc mind a négy esetben irrebucibilis. Irreducibilis Markov láncról tudjuk, hogy akkor és csak akkor van stacionárius **eloszlása**, ha pozitív rekurrens. Ennek megfelelően az a.) b.) és c.) eset pozitív rekurrens, a d.) eset viszont nem.

3.HF: (Beadási határidő: 2020.04.15.) **FIGYELEM! A HF megoldásokat kérem rendesen leírni:**

- **Minden használt jelölés legyen bevezetve.**
- **Minden állítás legyen megindokolva.**
- **Sehol ne álljon képlet vagy szám egymagában: mindig legyen ott, hogy mi van kiszámolva. (Avagy: minden képlet és szám egy állítás része legyen.)**
- **Legyen áttekinthető logikai sorrend!**

HF 3.1 Mórickáék házához 3 lépcső vezet fel, Móricka ezeken ugrál. Lehetséges pozíciói $\{0, 1, 2, 3\}$ attól függően, hogy hány lépcsőfok van alatta. Percenként pontosan egyet ugrik. Minden ugrás előtt dob egy szabályos dobókockával, az eredményből kivon 3-at, és annyi lépcsőt ugrik (egyetlen ugrással) *felfelé*. (Ha a kivonás után kapott szám nulla, akkor helyben ugrik; ha negatív, akkor lefelé.) Ha ezzel túlugrana a legfelső vagy legalsó szinten, akkor persze csak odáig ugrik. (Pl. ha az 1-es szinten van és 4-et dob, akkor a $4 - 3 = 1$ szintet ugrik felfelé, vagyis a 2-esre ugrik. Ha viszont az 1-es szinten van és 1-et dob, akkor $1 - 3 = -2$ miatt 2 szintet kéne lefelé ugrania, de annyi nincs, ezért a 0-s szintre ugrik.)

a.) Legyen $X_n \in S = \{0, 1, 2, 3\}$ Móricka pozíciója n perc elteltével. Írjuk fel az X_n Markov lánc átmenetmátrixát!

b.) Tegyük fel, hogy Móricka pont most érkezett a 2-es állapotba. Legyen T_2 az ott eltöltött idő percben (ami tehát legalább 1). Neve „tartózkodási idő". (Ez akkor lesz 1-nél nagyobb, ha néhányszor helyben ugrik.) Adjuk meg T_2 eloszlását és számoljuk ki az $a_2 := \mathbb{E}T_2$ várható értékét!

c.) Végezzük el ugyanezt a többi állapotra is, és írjuk táblázatba:

i	0	1	2	3
a_i				

d.) Legyen Y_k Móricka pozíciója az k-adik *változás* után. Vagyis k „módosított idő" azt számolja, hogy hányszor ugrott Móricka *nem helyben*: ha helyben ugrik, akkor az Y_k folyamat órája „nem kettyen". Írjuk fel az Y_k Markov lánc átmenetmátrixát! *(Tipp: azt kell nézni, hogy Móricka az i-edik állapotból mekkora valószínűséggel ugrik a j-edik állapotba, **feltéve**, hogy nem helyben ugrik. Vagyis*

$$\mathbb{P}(Y_1 = j \mid Y_0 = i) = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i \text{ } \textit{és} \text{ } X_1 \neq i).$$

)

e.) Keressük meg az Y_k Markov lánc egyetlen π_Y stacionárius eloszlását! *(A számolás közepesen szörnyű. A lineáris egyenletrendszer megoldásához szabad számítógépet használni, de csúnya tizedes törtek helyett szeretnék pontos értéket látni!)* Honnan tudjuk előre, hogy pontosan egy van?

i	0	1	2	3
$\pi_{Y,i}$				

f.) Hosszú távon a „módosított idő” mekkora hányadában lesz Móricka a legfelső szinten? (Avagy, ami ugyanez: hosszú távon az új helyre való érkezések mekkora hányada történik a 3-as állapotba?) Miért? Adjuk meg ugyanezt a többi állapotra is!

g.) Számoljuk ki az f.) és c.) pontok eredménye alapján (**és nem másból**), hogy Móricka a *tényleges idő* mekkora r_i hányadát tölti az egyes állapotokban:

i	0	1	2	3
r_i				

h.) Ellenőrizzük le a.) alapján, hogy az $\{r_i\}$ az X_n Markov lánc stacionárius eloszlása!

Megoldás:

a.) Jelölje az átmenetmátrixot $P^{(X)}$. 0-ból indulva 6-os dobással 3-ba jutunk, 5-össel 2-be, 4-essel 1-be, a többi dobással 0-ba, vagyis

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = 3|X_0 = 0) &= \frac{1}{6}\\ \mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = 0) &= \frac{1}{6}\\ \mathbb{P}(X_1 = 1|X_0 = 0) &= \frac{1}{6}\\ \mathbb{P}(X_1 = 0|X_0 = 0) &= \frac{3}{6}\end{aligned}$$

Ugyanígy végiggondolva az ugrási valószínűségeket a többi helyről, az átmenetmátrix

$$P^{(X)} = \begin{pmatrix} 3/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6\\ 2/6 & 1/6 & 1/6 & 2/6\\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 3/6\\ 0 & 1/6 & 1/6 & 4/6 \end{pmatrix}.$$

b.) Minden alkalommal, az előzményektől függetlenül, $1 - P^{(X)}_{22} = \frac{5}{6}$ valószínűséggel sikerül elugrania a 2-es állapotból, T_2 pedig pontosan az elugráshoz szükséges próbálkozások száma, vagyis $T_2 \sim Geom(5/6)$, amiből $a_2 = \frac{1}{5/6} = \frac{6}{5}$.

c.) Ugyanígy minden $i \in \{0, 1, 2, 3\}$-ra $a_i = \mathbb{E}Geom(1 - P^{(X)}_{ii}) = \frac{1}{1-P^{(X)}_{ii}}$:

i	0	1	2	3
a_i	$6/3$	$6/5$	$6/5$	$6/2$

d.) Jelölje az átmenetmátrixot $P^{(X)}$. Ennek főátlójában csupa nulla van, mert az Y^k folyamatban helyben ugrás nincs. A főátlón kívüli elemeket a $P^{(X)}$ főátlón kívüli elemeinek lenormálásával kapjuk, úgy, hogy minden sorösszeg 1 legyen. Pl.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_1 = 1 \,|\, Y_0 = 0) &= \mathbb{P}(X_1 = 1 \,|\, X_0 = 0 \text{ és } X_1 \neq 0) = \frac{P^{(X)}_{01}}{P^{(X)}_{01} + P^{(X)}_{02} + P^{(X)}_{03}}\\ &= \frac{1/6}{1/6 + 1/6 + 1/6} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Ennek mintájára

$$P^{(Y)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

e.) Stacionárius eloszlásból pontosan egy van, mert az $Y^{(k)}$ Markov-lánc véges állapotterű és irreducibilis. π_Y kereséséhez a $(P^{(Y)} - I)^T {\pi_Y}^T = 0$ lineáris egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1 & 1/5 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/5 & -1 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 2/5 & 3/5 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Ezt mindenki úgy oldja meg, hogy akarja: most egy lehetséges kézi számolást mutatok. Az épeszű kézi számolás kedvéért több helyen eltérek a szokványos Gauss eliminációtól:

- először végigszorzom az első sort 5-tel, a másodikat és a harmadikat 30-cal, az utolsót 15-tel.
- A második oszlop eliminációja előtt kivonom a 4. sorból a 3.-at, majd felcserélem a 2. és 4. sort és az egyiket végigszorzom -1-gyel.
- Végül nem $\pi_{Y,4}$-et hagyom meg szabad változónak, hanem $\pi_{Y,3}$-at, vagyis a 3. oszlopban nem csinálok visszahelyettesítést, a 4.-ben viszont igen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1 & 1/5 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/5 & -1 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 2/5 & 3/5 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & -30 & 6 & 15 & 0 \\ 10 & 6 & -30 & 15 & 0 \\ 5 & 6 & 9 & -15 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -26 & 8 & 15 & 0 \\ 0 & 10 & -28 & 15 & 0 \\ 0 & 8 & 10 & -15 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -26 & 8 & 15 & 0 \\ 0 & 10 & -28 & 15 & 0 \\ 0 & -2 & 38 & -30 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 38 & -30 & 0 \\ 0 & 10 & -28 & 15 & 0 \\ 0 & 26 & -8 & -15 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 38 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 162 & -135 & 0 \\ 0 & 0 & 486 & -405 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 38 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 19 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

Innen pl. $\pi_{Y,3} := 5$ választással $\pi_{Y,1} = 3$, $\pi_{Y,2} = 5$, $\pi_{Y,4} = 6$, vagyis a homogén lineáris egyenletrendszer egy megoldása

$$\tilde{\pi}_Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Az összes többi megoldás ennek számszorosa, minket pedig az az egy érdekel, amiben a sorösszeg 1:

i	0	1	2	3
$\pi_{Y,i}$	$3/19$	$5/19$	$5/19$	$6/19$

f.) Az Y_k Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis, ezért az ergodtétel értelmében

$$\lim_{K\to\infty} \frac{\#\{k\,:\,0\le k<K\,,\,Y_k=3\}}{K} = \pi_{Y,3},$$

vagyis hosszú távon a módosított idő $\pi_{Y,3}=\frac{6}{19}$-ed részében lesz Móricka a legfelső szinten.

Ugyanígy: hosszú távon a módosított idő $\pi_{Y,i}$ hányadát tölti az i-edik szinten.

g.) Hosszú távon az egyes szinteken eltöltött tényleges idők úgy aránylanak egymáshoz, mint

$$\pi_{Y,1}a_1 : \pi_{Y,2}a_2 : \pi_{Y,3}a_3 : \pi_{Y,4}a_4$$
$$=$$
$$\frac{6}{19} : \frac{6}{19} : \frac{6}{19} : \frac{18}{19}$$
$$=$$
$$1:1:1:3$$

Ezt kell lenormálni:

i	0	1	2	3
r_i	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$3/6$

h.) És valóban:

$$\begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 3/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 2/6 & 1/6 & 1/6 & 2/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 3/6 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 4/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 3/6 \end{pmatrix}.$$

Hurrá.

HF 3.2 $X_n = k$ feltétel mellett a kihúzgálást megúszó gyomok száma $\sim Bin(k,p)$, ennek várható értéke kp. X_{n+1} ennek pont kétszerese, vagyis

$$\mathbb{E}(X_{n+1}\,|\,X_n=k) = 2kp.$$

Látható, hogy ha $p>\frac{1}{2}$, akkor a várható érték nő, ha pedig $p<\frac{1}{2}$, akkor csökken, és ilyenkor várható stabil viselkedés.

Ha X_n irreducibilis és aperiodikus *lenne*, akkor $p<\frac{1}{2}$-re a Foster kritérium biztosítaná a stabilitást, hiszen

$$\mathbb{E}(X_{n+1}\,|\,X_n=k) = 2kp = k-k(1-2p) \le k-\delta$$

minden $k\ge I$ -re, ahol $I=1<\infty$ és $\delta=1-2p>0$. (A Foster kritérium pont azt mondja, hogy ha van ilyen $I<\infty$ és $\delta>0$ *és a Markov lánc irreducibilis és aperiodikus*, akkor a Markov lánc stabil.)

Egyetlen pici gond, hogy X_n nem irreducibilis, hiszen a 0 állapot elnyelő: ha nincs gyom, akkor nem is lesz.

Egy lehetséges megoldás, hogy módosítjuk a Markov láncot. Pl: az $\tilde{X}_n$ Markov lánc fejlődjön ugyanúgy, mint X_n mindaddig, amíg el nem éri a 0-t, de ha nincs gyom, akkor $\frac{1}{1000000}$ valószínűséggel elültetünk egyet. Így $\tilde{X}_n$ már irreducibilis és aperiodikus, és a Foster kritérium miatt stabil. viszont ez azt jelenti, hogy bárhonnan indítva 1 valószínűséggel eléri a 0 állapotot. Ebből pedig következik, hogy az X_n is bárhonnan indítva 1 valószínűséggel eléri a 0 állapotot, vagyis kihal, és úgy is marad.

Röviden, amit beláttunk:

Ha $p < \frac{1}{2}$, akkor X_n stabil, és határeloszlása a 0 állapotra koncentrált eloszlás, vagyis az $(1, 0, 0, 0, \dots)$ vektor.

(Megjegyzés 1: Ugyanez abból is kijön, hogy $\mathbb{E}X_{n+1} = 2p\mathbb{E}X_n$, így ha $p < \frac{1}{2}$, akkor $\mathbb{E}X_n \to 0$. Mivel $X_n \geq 0$, ebből következik, hogy $X_n \to 0$.)

*(Megjegyzés 2: Nem teljesen nyilvánvaló, de könnyen hihető, hogy ha $p > \frac{1}{2}$, akkor X_n nem stabil: lehet, hogy kihal, de ennek valószínűsége 1-nél kisebb, a maradék pozitív val.séggel viszont ∞-hez tart. Még kevésbé nyilvánvaló, de igaz, hogy ha $p = \frac{1}{2}$, akkor a X_n stabil, éspedig 1 valószínűséggel kihal (bár a kihalási idő várható értéke végtelen).
)*