

Rendszeresen használt jelek és rövidítések

- a a_i együttható a rendszeregyenletben
 a_i együttható az átviteli karakterisztika és az átviteli függvény nevezőjében
- A **A** rendszermátrix (az állapotegyenletben $A \mathbf{x}$)
AÁ aluláteresztő
- b b_i együttható a rendszeregyenletben
 b_i együttható az átviteli karakterisztika és az átviteli függvény számlálójában
- B **B** az állapotegyenletben $B \mathbf{u}$ vagy $B u$
- C **C** a válasz állapotváltozós kifejezésében $C \mathbf{x}$ vagy $C^T \mathbf{x}$
 y_C diszkrét idejű szimulálandó jel
- d d differenciál, differenciáloperátor
- D **D** a válasz állapotváltozós kifejezésében $D \mathbf{u}$ vagy $D u$
DI diszkrét idejű, diszkrét idő
 y_D diszkrét idejű szimulált jel
- e e a természetes logaritmus alapja
- E E_x az x jel energiája
- f f folytonos idejű frekvencia
 y_f az y jel szabad összetevője
- F **FÁ** felüláteresztő
 $\mathcal{F}$ Fourier-transzformáció operátora (DI és FI)
 $\mathcal{F}^{-1}$ inverz Fourier-transzformáció operátora (DI és FI)
FIR véges impulzusválaszú (Finite Impulse Response)
- g g ugrásválasz
 y_g az y jel gerjesztett összetevője
- G **GV** gerjesztés-válasz (GV stabilis, GV kapcsolat)
- h h impulzusválasz
- H H átviteli együttható, átviteli karakterisztika, átviteli függvény
⁽ⁱ⁾ $x^{(i)}(t)$ az $x(t)$ folytonos idejű jel i -edik deriváltja (illetve integrálja, ha i negatív)
 $x^{(i)}[k] = x[k - i]$ az $x[k]$ jel késleltetettje i idővel (illetve siettetje, ha i negatív)
- I **I** egységmátrix
IIR végtelen impulzusválaszú (Infinite Impulse Response)
 $\mathcal{I}_m$ képzetes rész operátora, $\mathcal{I}_m \{z\}$ a z komplex szám képzetes része
- j $j = \sqrt{-1}$ képzetes egység

k	k diszkrét idő
K	K amplitúdó-karakterisztika K erősítés, erősítési együttható
L	L rögzített diszkrét időtartam (pl. periódusidő) L Lagrange-mátrix $\mathcal{L}$ Laplace-transzformáció operátora $\mathcal{L}^{-1}$ inverz Laplace-transzformáció operátora
m	m átviteli függvény számlálójának fokszáma
M	MIMO sok-gerjesztésű, sok-válaszú (Multiple Input Multiple Output) MISO sok-gerjesztésű, egy-válaszú (Multiple Input Single Output)
n	n rendszeregyenlet rendszáma n átviteli függvény nevezőjének fokszáma
N	N állapotváltozók száma, állapotváltozós leírás rendszáma N a természetes számok halmaza
p	p_i a folytonos idejű átviteli függvény pólusa p hálózati komponens bemeneti változója
P	P_x az x jel teljesítménye
q	q_i a diszkrét idejű átviteli függvény pólusa q hálózati komponens kimeneti változója
R	R a valós számok halmaza R_+ a pozitív valós számok halmaza R_- a negatív valós számok halmaza $\mathcal{R}_e$ valós rész operátora, $\mathcal{R}_e\{z\}$ a z komplex szám valós része
s	s a folytonos idejű komplex frekvencia (a FI Laplace-transzformáció változója) s_i a diszkrét idejű átviteli függvény zérusa
S	SÁ sáváteresztő SZ sávzáró
t	t folytonos idő
T	T rögzített folytonos időköz (pl. periódusidő)
u	u gerjesztés (adott változó)
U	U gerjesztés amplitúdója, Fourier- vagy Laplace-transzformáltja
w	w ablakozó jel (ablak)
W	W ablakozó jel Fourier- vagy Laplace-transzformáltja $\mathcal{W}$ átviteli operátor: $y = \mathcal{W}\{u\}$ gerjesztés-válasz kapcsolat explicit alakja
x	x állapotváltozó
X	X állapotváltozó amplitúdója, Fourier- vagy Laplace-transzformáltja
y	y a válasz (keresett változó)
Y	Y a válasz amplitúdója, Fourier- vagy Laplace-transzformáltja

z	z a diszkrét idejű komplex frekvencia (a DI Laplace-transzformáció változója) z_i a folytonos idejű átviteli függvény zérusa
$\mathcal{Z}$	$\mathcal{Z}$ a diszkrét idejű Laplace-transzformáció (z-transzformáció) operátora $\mathcal{Z}^{-1}$ az inverz DI Laplace-transzformáció (z-transzformáció) operátora $\mathbf{Z}$ az egész számok halmaza $\mathbf{Z}_+$ a pozitív egész számok halmaza $\mathbf{Z}_-$ a negatív egész számok halmaza
δ	$\delta(t)$ Dirac-impulzus $\delta[k]$ egységimpulzus
ε	$\varepsilon(t)$ folytonos idejű egységugrás $\varepsilon[k]$ diszkrét idejű egységugrás
ϑ	ϑ diszkrét idejű körfrekvencia, a DI Fourier-transzformáció változója
Θ	Θ rögzített diszkrét idejű körfrekvencia (pl. sáv szélesség)
λ	λ sajátérték (rendszeregyenleté, állapotmátrixé)
φ	φ fázis-karakterisztika
ρ	ρ kezdőfázis
Φ	Φ nemlineáris erősítő kimeneti változóját megadó függvény
τ	τ futási idő, futási idő karakterisztika
ω	ω folytonos idejű körfrekvencia, a FI Fourier-transzformáció változója
Ω	Ω rögzített FI körfrekvencia (pl. sáv szélesség)
'	$x'(t)$ az $x(t)$ folytonos idejű jel első deriváltja $x'[k] = x[k+1]$ a DI jel siettetett megfelelője
*	konvolúció: $h * u$ a h és az u jelek konvolúciója
*	* konjugált: z^* a z komplex szám konjugáltja

1. Alapfogalmak

Bevezetésként az 1. részben megadjuk a következőkben használandó néhány alapvető fogalom értelmezését.

Az 1.1. fejezetben megadjuk a *változó* és a *jel*, a folytonos és a diszkrét idő értelmezését, bevezetünk a jelekre vonatkozó néhány alapvető műveletet, megadjuk a jelek néhány tipikus osztályát, értelmezünk néhány speciális, számunkra fontos jelet (egységimpulzus, Dirac-impulzus, a diszkrét idejű és folytonos idejű egységugrás). A későbbiekben értelmezni fogunk további műveleteket és jelosztályokat is.

A jeleket a 2. részben a folytonos, illetve a diszkrét idő függvényének tekintjük (időtartománybeli leírás), a 3. részben a folytonos vagy a diszkrét idejű körfrekvencia függvényének (frekvenciartománybeli leírás), míg a 4. részben a folytonos, illetve a diszkrét idejű komplex frekvencia függvényének (komplex frekvenciartománybeli leírás).

Az 1.2. fejezetben megadjuk a *rendszer* értelmezését és a rendszerek néhány osztályát. Megadjuk azt a rendszerosztályt, amelynek tárgyalására a továbbiakban (a 2.5. fejezet kivételével) szorítkozni fogunk: ez a *lineáris, invariáns rendszer*, amelyet ezért gyakran csak „rendszer”-nek nevezünk. A 2.5. fejezetben foglalkozunk a nemlineáris és a variáns rendszerekkel. Többnyire kauzális rendszerek vizsgálatára szorítkozunk. A 3. és a 4. részben kizárólag lineáris, invariáns rendszerekről lesz szó, mert variáns vagy nemlineáris rendszert nem, vagy csak nagyon speciális esetekben lehet a frekvenciartományokban leírni.

Az 1.3. fejezetben megadjuk a *hálózat* értelmezését és a hálózatok néhány osztályát. A részletes tárgyalás során csak a jelfolyam hálózatokkal foglalkozunk. Ha a hálózat adott, akkor a feladat a hálózat által reprezentált rendszer egy matematikai leírásának előállítása (hálózatanalízis), míg ha az utóbbi adott, akkor a feladat a rendszer egy hálózati reprezentációjának meghatározása (hálózatszintézis). Főként a hálózatanalízissel foglalkozunk. Mindkét feladat megoldható az időtartományban, a frekvenciartományban és a komplex frekvenciartományban, de ezek hatékonysága a feladat jellegétől és az alkalmazott módszertől függően nagyon különböző.

Ennek a résznek a lényege a következőkben foglalható össze.

A *rendszer* a rá ható *gerjesztéseit* (bemeneti jeleit, inputjait) átalakítja a *válaszaiba* (kimeneti jeleibe, outputjaiba). Egy rendszer jellemezhető valamelyik explicit vagy implicit *matematikai leírásával* vagy valamelyik *hálózati reprezentációjával*.

Gyakorlati szempontból a rendszer egy létező vagy megvalósítandó *objektum* egy egyszerűsített leírása. Nem foglalkozunk sem a valóságos objektumok modellezésének módszereivel, sem a rendszer megvalósításának technikáival, hiszen ahhoz el kellene mélyedni a mechanikai, termikus, villamos, gazdasági, stb. folyamatok elméletében.

Ennek következtében a továbbiakban tárgyaltak meglehetősen általános érvényűek, de absztrakta is.

Megjegyezzük végül, hogy a változó, a jel, a rendszer, a hálózat és még néhány további, általunk használt fogalom néha más értelemben is használatos. Így például egyesek az objektumot nevezik rendszernek és az általunk rendszernek nevezettet pedig absztrakt rendszernek. A továbbiakban alkalmazottaktól eltérő jelölések is használatosak az irodalomban. A fontosabb eltérő kifejezéseket és jelöléseket meg fogjuk említeni.

1.1. Jelek

Ebben a fejezetben megadjuk a *változó* és a *jel* értelmezését (1.1-1. szakasz), tárgyaljuk a jelek megadásának néhány módját és a rájuk vonatkozó legfontosabb műveleteket (1.1-2. és 1.1-3. szakasz), továbbá a jelek néhány osztályát (1.1-4. szakasz). Ezeket a fogalmakat rendszeresen fogjuk használni a következő részekben.

1.1-1. Jelek osztályozása

1.1-1.1. Változó és jel

A folyamatok mérhető mennyiségeit *fizikai mennyiségeknek* nevezzük. A „fizikai” mennyiség nem csak fizikai folyamatokat, hanem kémiai, biológiai, gazdasági, stb. folyamatokat is jellemezhet. A továbbiakban nem foglalkozunk a mennyiség valódi tartalmával, csak annak absztrakt (matematikai) tartalmával.

Egy *változó* egy fizikai mennyiség matematikai leírása. A változóra alkalmazott jelek például s , u , x .

A továbbiakban egy változó valamely fizikai mennyiségnek egy alkalmas mértékegységben kifejezett számértékét jelenti.

Példaként legyen egy test s helyzetének a t időtől való függése a következő alakban adott:

$$s(t) = S \cos(\omega t + \rho) = (2 \text{ m}) \cdot \cos\left(50 \frac{\text{krad}}{\text{s}} t + 0,4\right) \Rightarrow s(t) = 2 \cos(50 t + 0,4).$$

A második, rövid alak úgy adódik, hogy megállapodunk abban, hogy s a méter (m), t a milliszekundum (ms), ω a kiloradián per másodperc (krad/s) és ρ a radián (rad) mértékegységben kifejezett számértéket jelöli. A továbbiakban a mennyiségek fizikai tartalmával és választott mértékegységével nem foglalkozunk. A változó tehát valamely mennyiségnek rögzített mértékegységre vonatkozó számértékét jelöli, mint a fenti rövid alakban.

Egy változó lehet az idő függvénye (például a hőmérséklet egy rögzített pontban), függhet egy vagy több térbeli változótól (mint egy üzenet egy hangszalagon vagy egy kép) és lehet az időnek és a helynek egyaránt a függvénye (mozgókép). A következőkben arra az esetre szorítkozunk, amikor a változó *egyetlen* független változó által meghatározott, amelynek neve *idő*, bármi is legyen e változó fizikai jelentése. A folytonos idő jele t ($t \in \mathbf{R}_+$), a diszkrét idő jele k ($k \in \mathbf{Z}$).

Egy *jel* a változó azon részének matematikai leírása, amely a számunkra lényeges információt hordozza.

Az u változó és az x jel kapcsolatának megvilágítására legyen az u folytonos idejű változó kifejezése

$$u(t) = a(t) \cos \mathcal{G}(t).$$

A változó által hordozott jel lehet például

- 1) maga a változó : $x_1(t) = u(t)$;
- 2) a szinuszos mennyiség burkolója: $x_2(t) = a(t)$;
- 3) a szinuszos mennyiség fázisa: $x_3(t) = \mathcal{G}(t)$;
- 4) a szinuszos mennyiség körfrekvenciája: $x_4(t) = \mathcal{G}'(t)$.

A változó és a jel közötti fogalmi különbség nem lényeges, ezért a továbbiakban ezeket megegyező értelemben fogjuk használni.

1.1-1.2. Folytonos idejű és diszkrét idejű jelek

Egy x jel rendszerint a t változó minden valós értékére értelmezett, ilyenkor t a folytonos idő. Az x folytonos idejű jel (FI jel) megadásának módja

$$x = x(t), \quad t \in \mathbf{R} \quad \text{vagy} \quad -\infty < t < \infty \quad (1.1-1)$$

Itt $\mathbf{R}$ a valós számok halmazát jelöli. Példaként megadunk két tipikus FI jelet:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X_1 \cos \omega t, \quad t \in \mathbf{R} \quad \text{vagy} \quad -\infty < t < \infty; \\ x_2(t) &= \begin{cases} 0, & t \in \mathbf{R}_-, \text{ vagy } -\infty < t < 0, \\ 1, & t \in \mathbf{R}_+, \text{ vagy } 0 < t < \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

A negatív, illetve a pozitív valós számok halmazát $\mathbf{R}_-$, illetve $\mathbf{R}_+$ jelöli. Az x_1 jel folytonos függvénye a t időnek, míg az x_2 jel nem folytonos, mert a $t = 0$ helyen véges szakadása (ugrása) van. Az $x_2(0)$ érték nem definiált, ez többnyire érdektelen. Ha a szakadásos függvényt a t_i szakadási helyén is értelmezni akarjuk, akkor több lehetőség szokásos, mint például

$$x(t_i) = x(t_i - 0), \quad x(t_i) = x(t_i + 0), \quad x(t_i) = \frac{x(t_i - 0) + x(t_i + 0)}{2}, \quad (1.1-2)$$

vagyis a bal oldali határérték, a jobb oldali határérték, e két határérték számtani közepe. Mindhárom értelmezés a folytonossági helyeken a helyettesítési értéket adja.

Bizonyos típusú jelek csak a független változó diszkrét értékeire értelmezettek. Arra az esetre szorítkozunk, amikor a k független változónak, a diszkrét időnek csak az egész értékei fordulnak elő. Az x diszkrét idejű jel (DI jel) megadásának módja

$$x = x[k], \quad k \in \mathbf{Z} \quad \text{vagy} \quad k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (1.1-3)$$

Itt $\mathbf{Z}$ a valós egész számok halmazát jelöli. Két tipikus DI jel

$$x_1[k] = X_1 \cos \vartheta k, \quad k \in \mathbf{Z} \quad \text{vagy } k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots;$$

$$x_2[k] = \begin{cases} 0, & k \in \mathbf{Z} \quad \text{vagy } k = \dots, -2, -1, \\ 1, & k \in \mathbf{N} \quad \text{vagy } k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

A negatív, illetve a pozitív egész számok halmazát $\mathbf{Z}_-$, illetve $\mathbf{Z}_+$ jelöli, míg $\mathbf{N}$ a természetes (nem-negatív egész) számok halmazát. A következőkben olyan DI jelekre szorítkozunk, amelyek k véges értékeire korlátosak. Ezzel kizártuk például az $1/k$ jelet, de nem zártuk ki a k^2 vagy a 2^k nem korlátos DI jelet.

A k -adik diszkrét időpontra a k -adik *ütem* elnevezést is használjuk.

A $t \in \mathbf{R}$ illetve a $k \in \mathbf{Z}$ megadását gyakran elhagyjuk, mert az $x(t)$ illetve az $x[k]$ jelölés vagy a szöveggörnyezet is egyértelműen mutatja, hogy FI vagy DI jelről van-e szó.

Egy DI jel gyakran egy FI jel által meghatározott. Egy gyakori eset, amikor az $x[k]$ értékek egy $v(t)$ jel értékei (mintái) a $t=t_k$ időpontokban, azaz

$$x[k] = v(t_k), \quad k \in \mathbf{Z}; \quad t_{k+1} > t_k.$$

Az esetek többségében a mintavétel egyenletes, azaz $t_k = kT$, ahol T az adott mintavételi periódusidő. Az $x[k]$ és a $v(t)$ néhány további tipikus kapcsolata:

$$x_1[k] = \max v(t), \quad (k-1)T < t < kT; \quad x_2[k] = \frac{1}{T} \int_{(k-1)T}^{kT} v(t) dt; \quad x_3[k] = \frac{1}{kT} \int_0^{kT} v(t) dt, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Általános esetben nehéz, felesleges vagy lehetetlen egy olyan FI jelet értelmezni, amelyből a DI jel származtatható. Például a kockadobás eredményei egy diszkrét idejű jelet határoznak meg, k a dobás sorszáma, nincs értelme annak a kérdésnek, hogy mennyi a kockadobás „eredménye” két dobás között. Ha k a dobozok sorszámát és $x[k]$ a k -adik doboz által tartalmazott mennyiséget (tömeg, darabszám) jelenti, akkor a „ k diszkrét időpontok” közötti „ t folytonos idő” értelmezhetetlen, a k változó fizikailag nem is idő jellegű.

Amikor valódi folyamatokat modellezünk, akkor gyakran alkalmazunk DI modellt FI folyamatra vagy fordítva.

1.1-1.3. Folytonos értékű és diszkrét értékű jelek

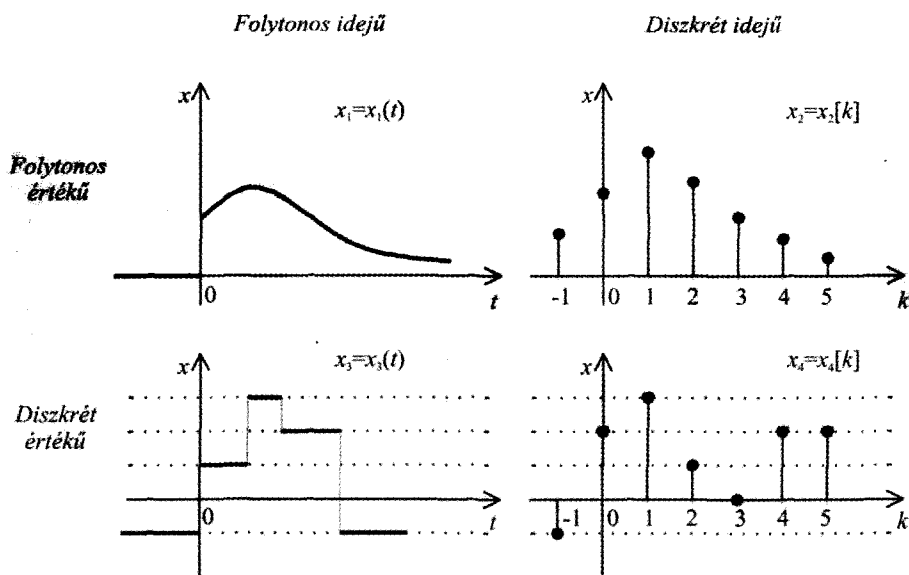
Egy x jel *folytonos értékű*, ha x bármilyen valós vagy komplex szám lehet - esetleg bizonyos megszorításokkal. Ilyen megszorítás lehet, hogy x csak valós és pozitív értékű lehet, az x nem lehet nagyobb egy felső korlátnál, stb.

Egy x jel *diszkrét értékű*, más néven *kvantált*, ha x csak bizonyos $a_0, a_1, a_2, \dots$ valós vagy komplex értékeket vehet fel. Ezek az a_i értékek lehetnek tetszőlegesen vagy követhetnek bizonyos szabályszerűséget (például $a_i = i$ vagy $a_i = 2^i$).

Bizonyos mennyiségek eleve diszkrét értékűek (például darabszám), másokat folytonos értékűeknek tekintünk (sebesség, hőmérséklet). Az utóbbiak mért értékei is diszkrét értékűek a mérés módja és a kerekítés által meghatározottan.

Mind a folytonos értékű, mind a diszkrét értékű jel lehet folytonos idejű vagy diszkrét idejű. A négy lehetőséget szemlélteti az 1. ábra.

A folytonos idejű és folytonos értékű jeleket szokásos analóg jeleknek, a diszkrét idejű és diszkrét értékű jeleket szokás digitális jeleknek nevezni. Ezeknek a kifejezéseknek azonban más jelentésük is használatos.



1.1-1. ábra Jelek négy alapvető típusa; a továbbiakban folytonos értékű jelekre szorítkozunk (felső sor)

A következőkben csak folytonos értékű jelekkel foglalkozunk, vagyis figyelmen kívül hagyjuk az esetleges kvantálást. Az alábbi rövidítéseket fogjuk használni:

FI jel: folytonos idejű, folytonos értékű jel;

DI jel: diszkrét idejű, folytonos értékű jel.

Sok valódi folyamat kielégítő pontossággal leírható folytonos értékű jelként. A kvantálás hatását gyakran zajként veszik figyelembe. Ezzel a kérdéssel a továbbiakban nem foglalkozunk.

*1.1-1.4. Determinisztikus és sztochasztikus jelek

Egy jelet *determinisztikus jelnek* nevezünk, ha értéke minden időpontban (kielégítő pontossággal) ismert vagy meghatározható. Ez rendszerint azt jelenti, hogy a jel (kielégítő pontossággal) megismételhető folyamatot ír le. Lehetséges és hasznos bevezetni egy $x[k]$ illetve $x(t)$ jelet, mert az minden k_i illetve t_i időpontban értelmezett és ugyanazt jelenti.

Egy adott tömeggel mindig ugyanazt az állandó erőt hozhatjuk létre, ha azt mindig azonos módon alkalmazzuk (például lassan kell letennünk, nem szabad ejtenünk vagy dobnunk, a gravitációnak változatlanul kell lennie, stb.). Egyszerűen állíthatunk elő egy szinuszos feszültséget ugyanazzal az amplitúdóval és frekvenciával, de ezek a feszültségek csak akkor jelentenek azonos jelet, ha a kezdőfázisuk is megegyezik.

Ha nem tudjuk a jelet megismételni, mert az azonosnak tűnő eljárás különböző eredményekre vezet, akkor a jelet *sztochasztikus jelként* célszerű kezelni. Ebben az esetben nem az $x[k]$ vagy $x(t)$ érték érdekel bennünket - hiszen azt nem is tudhatjuk előre - hanem annak statisztikus tulajdonságai, például az átlaga (várható értéke, középértéke). Ilyen statisztikus jellemzők vagy a folyamat modelljének ismeretében elméleti úton határozhatók meg, vagy kellő számú tapasztalati adat ismeretében a matematikai statisztika módszereivel. Előfordulhat, hogy a jelet még statisztikus módszerekkel sem tudjuk jellemezni.

Tipikus sztochasztikus jel egy dobókocka dobásának eredményei (1, 2,..., 6). Az eredmények egy $x_i[k]$ sorozata (egy diszkrét idejű és diszkrét értékű jel) nem ismételhető. Ha a dobókocka „szabályos”, akkor előre tudhatjuk, hogy a 10-edik dobás eredményének, vagyis az $x_i[10]$ középértéke 3,5. Ugyanez igaz bármely $x_i[k_p]$ értékre.

Ha nem tudjuk, hogy kockánk szabályos-e, akkor nagyon sok (elméletileg végtelenül sok) azonos fajtájú kocka kísérleti vizsgálatára van szükségünk, hogy a vizsgált fajtájú kocka statisztikus tulajdonságait fel tudjuk tární. Bizonyos esetekben a vizsgált kockafajta egyetlen példányának vizsgálata is célravezető lehet.

Sok gyakorlati esetben a jel egy determinisztikus és egy sztochasztikus jel összege. Tipikus eset, amikor a hasznos jelet determinisztikusnak, a hozzá adódó zajt sztochasztikus jelként írjuk le. Ezek szétválasztása (a zaj kiszűrése) statisztikai módszerekkel lehetséges.

A folyamatnak determinisztikus vagy sztochasztikus jelként történő leírása lehet kényszerű, de lehet választásunk következménye is. A fizikából ismert, hogy sok jelenséget leírhatunk determinisztikusan és statisztikusan is.

A továbbiakban csak determinisztikus jeleket és hatásaikat vizsgáljuk. Sok, ezekre bevezetett módszer alkalmazható sztochasztikus jelek vizsgálatára is.

1.1-1.F. Feladatok

Sem itt, sem a továbbiakban nem adjuk meg, hogy a jel milyen fizikai mennyiséget vagy annak egy választott mértékegységre vonatkozó számértékét jelenti, és hogy a t folytonos idő milyen mértékegységben értendő.

F-1. Egy folytonos idejű, determinisztikus jelet a következő függvény írja le:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \in \mathbf{R}_-, \\ e^{-0,4t}, & t \in \mathbf{R}_+. \end{cases}$$

Adja meg e folytonos idejű jel által meghatározott

$$u[k] = x(kT+0), \quad v[k] = \frac{3x(kT+0) + x(kT-T+0)}{4}; \quad T = 0,5$$

diszkrét idejű jeleket!

F-2. Legyen $x(t)$ az előző feladat szerinti FI jel. Határozza meg az

$$y[k] = \frac{1}{T} \int_{kT-T}^{kT} x(t) dt, \quad k \in \mathbf{Z}$$

által definiált DI jelet, ha $T = 0,5$.

***F-3.** Milyen típusú jellel írná le lakásának energiafogyasztását, ha

- (a) w_a a valóságos fogyasztás?
- (b) w_b a fogyasztásmérő által mutatott érték?
- (c) w_c a számláján megjelenő fogyasztás?

1.1-1.M. Megoldások

M-1. Rövid számolással adódik, hogy $(e^{-0,2} = 0,819)$

$$u[k] = \begin{cases} 0, & k \in \mathbf{Z}_-, \\ (0,819)^k, & k \in \mathbf{N}; \end{cases} \quad v[k] = \begin{cases} 0, & k \in \mathbf{Z}_-, \\ 0,75, & k = 0, \\ 0,864 (0,819)^{k-1}, & k \in \mathbf{Z}_+. \end{cases}$$

M-2. Az integrál számításával adódik, hogy

$$y[k] = \begin{cases} 0, & k = \mathbf{Z}_-, \quad k = 0, \\ 0,906 (0,819)^k, & k \in \mathbf{Z}_+. \end{cases}$$

***M-3.** A w_a folytonos idejű, folytonos értékű (ha eltekintünk az energia kvantált természetétől). A w_b folytonos idejű, diszkrét értékű (a fogyasztásmérő meghatározott számú számjegyet jelez). A w_c diszkrét idejű és diszkrét értékű. Egy ütem például egy hónap, de ez folytonos időben nem pontos időköz.

A fogyasztásmérő és a számlázó elfogadható működése esetén a három jel között szoros kapcsolat van.

1.1-2. Néhány diszkrét idejű jel

1.1-2.1. Diszkrét idejű jelek leírása

Különböző eljárások vannak diszkrét idejű jelek, vagyis számsorozatok megadására. Ha az ellenkezőjét nem hangsúlyozzuk, akkor következőkben a jel valós értékű. Ha u és v egyaránt valós értékű jel, akkor $w = u + jv$ komplex értékű jel (a továbbiakban $j \equiv \sqrt{-1}$ a képzetes egység jele, erre a matematikában az i jel használatos).

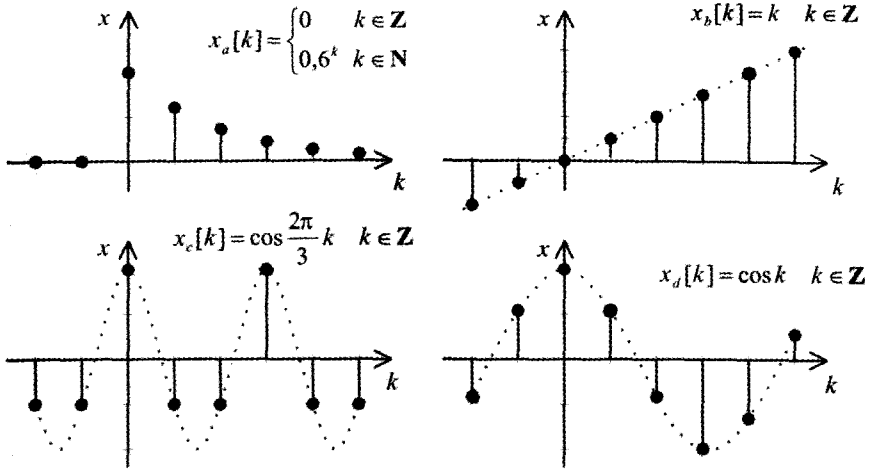
Gyakran egy *képlet* adja meg az x jel értékét a k bármely egész értékére. Három egyszerű példa:

$$x_a[k] = \begin{cases} 0, & k \in \mathbf{Z}_-, \\ Aq^k, & k \in \mathbf{N}; \end{cases} \quad x_b[k] = Ak, \quad k \in \mathbf{Z}; \quad x_c[k] = A \cos \vartheta k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

E jelek grafikonja a 2. ábrán látható. A szaggatott vonalú görbe - amely a minden valós k -ra értelmezett függvényt mutatja - felesleges, de gyakran segíti az ábrázolt függvény felismerését vagy az ábra vázlatos elkészítését.

A *grafikus ábrázolás* a jel megadásának egy további módja, amely azonban korlátozott pontosságú és természetesen nem tartalmazza a valamennyi k értékre vonatkozó információt. Az ábra hiányzó része gyakran kitalálható. Ez a helyzet például, ha vélhetően $x[k]$ állandó (speciálisan nulla) k nagy negatív vagy nagy pozitív értékeire.

A $\cos \vartheta k$ vagy $\sin \vartheta k$ csak akkor periodikus függvénye a k diszkrét időnek, ha $\vartheta / 2\pi$ racionális, tehát $\vartheta / 2\pi = M / L$; $(M, L \in \mathbf{Z}_+)$, és ekkor L a diszkrét periódusidő (rendszerint L legkisebb értékét választjuk). Ebből következően $u[k] = \cos 2k$ nem periodikus, de $w[k] = \cos(4\pi k/3)$ periodikus $L = 3$ periódusidővel (de $L_2 = 9$ is periódusideje a jelnek). Periodikus jelekkel a 3.1. fejezetben foglalkozunk majd részletesebben.



1.1-2. ábra. Egyszerű képlettel leírt diszkrét idejű jelek grafikus megadása

Megadhatunk egy DI jelet egy rá vonatkozó *rekurzív összefüggéssel* is. Két példa:

$$\begin{aligned} y_a[k+1] &= 3y_a[k], & k \in \mathbb{N}, & y_a[0] = 2; \\ y_b[k+1] &= (k+1)y_b[k], & k \in \mathbb{N}, & y_b[0] = 2. \end{aligned}$$

Az adott értékből indulva „lépésről lépésre” számíthatjuk a többi értéket. Így például

$$\begin{aligned} k=0: & y_b[1] = (0+1) \cdot 2 = 2, \\ k=1: & y_b[2] = (1+1) \cdot 2 = 4, \\ k=2: & y_b[3] = (2+1) \cdot 4 = 12, \end{aligned}$$

és így tovább. Hasonló módon számítható $y_a[k]$ is. Könnyen belátható, hogy $k \in \mathbb{Z}$ minden értékére $y_a[k] = 2(3)^k$. Némi fejtöréssel hasonló képlet található az $y_b[k]$ jelre.

A DI jel egy véges hosszúságú szegmense megadható értékeinek *felsorolásával* is a következő alakban:

$$x_p[k] = \{x_p[0]; x_p[1]; \dots; x_p[L]\}; \quad x_q[k] = \{x_q[0]; x_q[1]; x_q[2]; \dots\}. \quad (1.1-4)$$

Az x_p jel véges idejű, éspedig $L+1$ ütem hosszúságú. Konkrét számértékeket választva

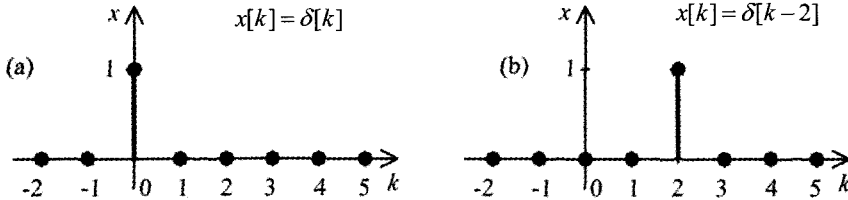
$$x_p[k] = \{1,5; 1,8; 1,2; 0,9\}; \quad x_q[k] = \{1,5; 1,8; 1,2; 0,9; \dots\}.$$

Ezek szerint $x_p[0] = x_q[0] = 1,5$; $x_p[1] = x_q[1] = 1,8$; $x_p[2] = x_q[2] = 1,2$; $x_p[3] = x_q[3] = 0,9$. Ha $k = 4, 5, 6, \dots$, akkor $x_p[k] = 0$, míg $x_q[k]$ értékeit ez a leírás nem adja meg. Az előzőekben hallgatólágoosan feltételeztük, hogy $x_p[k] = 0$, $x_q[k] = 0$, ha $k \in \mathbb{Z}_-$. Ha ez nincs így, akkor meg kell valamilyen módon jelölni a $k=0$ (vagy valamilyen más rögzített k) ütemhez tartozó értéket. Ez a leírásmód nagyon célszerű számítógépes tárolásra, de a továbbiakban nem fogjuk használni.

Ezzel egyenértékű általános (képletet nem igénylő) leírásmód alkalmazásához bevezetünk egy speciális DI jelet.

A diszkrét idejű *egységimpulzus* jele $\delta[k]$, értelmezése (3a ábra);

$$\delta[k] = \begin{cases} 0, & k \in \mathbb{Z}_-, \\ 1, & k = 0, \\ 0, & k \in \mathbb{Z}_+. \end{cases} \quad (1.1-5)$$



1.1-3. ábra. (a) Az egységimpulzus és (b) az eltolt (2 ütemmel késleltetett) egységimpulzus ábrája

Ebből már következik az i ütemmel eltolt egységimpulzus értelmezése (3b ábra):

$$\delta[k-i] = \begin{cases} 0, & -\infty < k \leq i-1, \quad i+1 \leq k < \infty; \\ 1, & k = i; \quad k, i \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (1.1-6)$$

Bármely DI jel megadható eltolt *egységimpulzusok szuperpozíciójaként*. Így például az előzőekben szereplő x_a , x_b , x_p és x_q jelek egy más megadása:

$$x_a[k] = \sum_{i=0}^{\infty} A q^i \delta[k-i] = A \delta[k] + A q \delta[k-1] + A q^2 \delta[k-2] + \dots,$$

$$x_b[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} A i \delta[k-i] = \dots - 2 A \delta[k+2] - A q \delta[k+1] + A \delta[k-1] + 2 A \delta[k-2] + \dots,$$

$$x_p[k] = 1,5 \delta[k] + 1,8 \delta[k-1] + 1,2 \delta[k-2] + 0,9 \delta[k-3],$$

$$x_q[k] = 1,5 \delta[k] + 1,8 \delta[k-1] + 1,2 \delta[k-2] + 0,9 \delta[k-3] + \dots$$

A DI jelet - vagyis a jel $x[k]$ értékét egy tetszőleges k ütemre - kifejezhetjük a jel $x[i]$ értékeivel az egységimpulzus felhasználásával a következő alakban:

$$x[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \delta[k-i], \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.1-7)$$

Első pillantásra ez az $x[k] = x[k]$ azonosság egy körülményes formájának tűnik. Később látni fogjuk, hogy mire használható ez az alak, továbbá hogy (7) a $\delta[k]$ egységimpulzus és $x[k]$ konvolúciója. (2.1-1.2. pont).

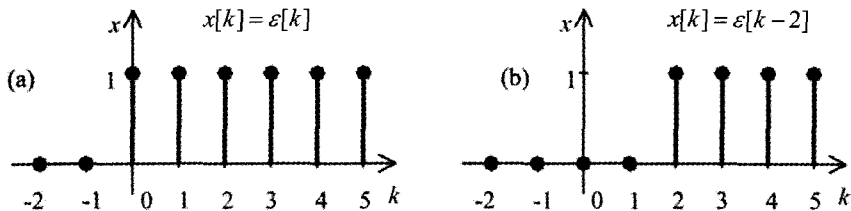
1.1-2.2. Az egységugrás

A diszkrét idejű *egységugrás* jele $\varepsilon[k]$, értelmezése (grafikonja a 4a ábrán látható):

$$\varepsilon[k] = \begin{cases} 0, & k \in \mathbf{Z}_-, \\ 1, & k \in \mathbf{N}. \end{cases} \quad (1.1-8)$$

Az eltolt egységugrás kifejezése (4b ábra)

$$\varepsilon[k-i] = \begin{cases} 0, & -\infty < k \leq i-1, \\ 1, & i \leq k < \infty; \quad k, i \in \mathbf{Z}. \end{cases} \quad (1.1-9)$$



1.1-4. ábra. (a) A diszkrét idejű egységugrás és (b) az eltolt (2 ütemmel késleltetett) egységugrás

Az egységugrás kifejezhető az egységimpulzussal:

$$\varepsilon[k] = \sum_{i=0}^{\infty} \delta[k-i] \equiv \delta[k] + \delta[k-1] + \delta[k-2] + \dots \quad (1.1-10)$$

Az egységimpulzus a következő módon fejezhető ki az egységugrással:

$$\delta[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-1]. \quad (1.1-11)$$

Az eltolt egységugrás felhasználásával tömör alakban megadhatunk olyan jeleket, amelyek szakaszonként leírhatók elemi függvényekkel. Így például

$$x[k] = \begin{cases} 0, & -\infty < k \leq -1, \\ 2^k, & 0 \leq k \leq 5, \\ 2^{10-k}, & 6 \leq k < \infty \end{cases} \quad x[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-6]\} 2^k + \varepsilon[k-6] 2^{10-k}.$$

ugyanazt a jelet írja le, a második alak egyszerűbb.

A $w[k; k_1, k_2] \equiv \varepsilon[k-k_1] - \varepsilon[k-k_2]$ jel a (derékszögű vagy állandó) *ablak*. Az *ablak* értéke nulla, ha $k \leq k_1 - 1$ és ha $k \geq k_2$.

1.1-2.3. Az eltolt diszkrét idejű jel

Legyen $x[k]$ egy diszkrét idejű jel. Az $i \in \mathbf{Z}$ ütemmel eltolt jelle az $x^{(i)}$ jelölést fogjuk alkalmazni, vagyis

$$x^{(i)}[k] \equiv x[k-i]; \quad i \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}. \quad (1.1-12)$$

Például $u = \varepsilon^{(2)}$ jelentése $u[k] = \varepsilon[k-2]$. Többnyire $i \in \mathbf{Z}_+$, ami késleltetést jelent, a jel ábrája jobbra (pozitív k értékek felé) tolódik el. A 3. és 4. ábrán láthattunk erre példákat.

Ha $i \in \mathbf{Z}_-$, akkor a negatív késleltetés a jel siettetését (balra, negatív k értékek felé eltolását) jelenti. Speciális jelet fogunk alkalmazni az $i = -1$ ütemmel történő késleltetésre, vagyis az 1 ütemmel történő siettetésre (balra tolásra):

$$x' \equiv x^{(-1)}; \quad x'[k] \equiv x[k+1], \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (1.1-13)$$

Például $v = \delta'$ jelentése $v[k] = \delta[k+1]$. Az x' ábrája megegyezik x ábrájával egy ütemmel balra tolva.

E jelölésekkel egyszerűsíthetjük az írásmunkát. Így például az egységimpulzus és az egységugrás kapcsolatait megadhatjuk a következő alakban is:

$$\varepsilon = \delta + \delta^{(1)} + \delta^{(2)} + \dots; \quad \delta = \varepsilon - \varepsilon^{(1)}; \quad \delta' = \varepsilon' - \varepsilon.$$

E jelölések egy további hasznát a folytonos idejű jelek tárgyalása után fogjuk látni: sok alapvető összefüggés megfogalmazható közös formában.

1.1-2.F. Feladatok

F-1. Válassza fel a következő DI jeleket:

$$x_a[k] = \varepsilon[k] 2^k, \quad x_b[k] = \varepsilon[k] 0,5^{-k}, \quad x_c[k] = \{1 - \varepsilon[-k-1]\} 2^k, \\ x_d[k] = \delta[k] + 2\delta[k-1] + 4\delta[k-2] 2^{k-2}$$

F-2. Válassza fel a $v[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-5]\} 2^k$ DI jel grafikonját!

F-3. Határozza meg a következő DI jelek L periódusidejét (ha a jel periodikus):

$$u_a[k] = 3 \cos \frac{3\pi}{7} k, \quad u_b[k] = 4 \cos(0,4\pi k), \quad u_c[k] = 5 \cos(\sqrt{2}\pi k), \quad u_d[k] = 6 \cos 2k.$$

F-4. Fejezze ki az $y[k] = \sum_{i=-\infty}^0 \delta[k-i]$ jelet más formában!

1.1-2.M. Megoldások

M-1. Mind a négy alak ugyanannak a DI jelnek különböző leírása. A jel egy további alakja: $x[k] = \delta[k] + 2\delta[k-1] + 4\delta[k-2] + 8\delta[k-3] + \dots$. A jel grafikonja ennek alapján könnyen felvázolható.

M-2. A jel egy másik, tömör alakja $v = 2\delta^{(1)} + 4\delta^{(2)} + 6\delta^{(3)} + 8\delta^{(4)}$. Részletesebben felírva $v[k] = 2\delta[k-1] + 4\delta[k-2] + 6\delta[k-3] + 8\delta[k-4]$. A jel grafikonja ennek alapján könnyen felvázolható.

M-3. A jel akkor periodikus, ha $\vartheta/2\pi$ racionális szám. A legkisebb L értéket tekintjük periódusidőnek. (a) $L = 14$. (b) $L = 5$. A (c) és (d) feladat jelei nem periodikusak.

M-4. Két egyenértékű megoldás $y[k] = \varepsilon[-k]$, $y[k] = 1 - \varepsilon[k-1]$.

A példákából és a fenti feladatok megoldásából is látható, hogy egy diszkrét idejű jel többnyire sokféle formában is megadható.

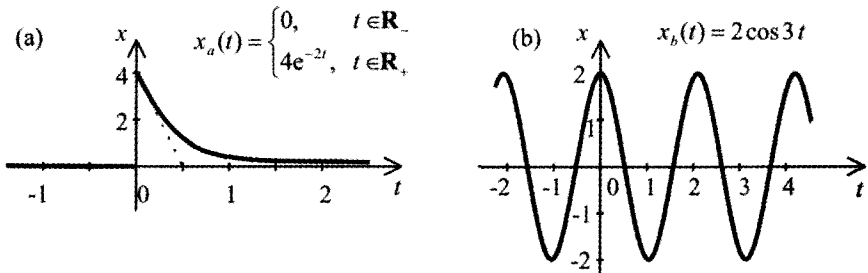
1.1-3. Néhány folytonos idejű jel

1.1-3.1. Folytonos idejű jelek leírása

Egy folytonos idejű (FI) jelet többnyire egy *képlet* segítségével írunk le, amely megadja az x jel valós vagy komplex értékét minden $t \in \mathbf{R}$ értékre (esetleg egyes pontok kivételével, ahol a jel nem értelmezett). Két egyszerű példa:

$$x_a(t) = \begin{cases} 0, & t \in \mathbf{R}_-, \\ Ae^{-at}, & t \in \mathbf{R}_+; \end{cases} \quad x_b(t) = A \cos \omega t, \quad t \in \mathbf{R}.$$

A jelek grafikonja a paraméterek ott megadott értékére az 5. ábrán látható. A *grafikus reprezentáció* egy másik módja egy jel megadásának korlátozott pontossággal és terjedelemben. Néha az ábra alapján sejthetjük a jel viselkedését a nem ábrázolt tartományban is (a t nagy negatív és nagy pozitív értékeire).



1.1-5. ábra Képlettel megadott két folytonos idejű jel grafikonja

Egy FI jel megadható a differenciálegyenletével és egy rögzített pontbeli értékével is. Két egyszerű példa:

$$\begin{aligned} \frac{dy_a(t)}{dt} &= 3y_a(t) + 4e^{-2t}, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad y_a(+0) = 2; \\ \frac{dy_b(t)}{dt} &= [t+1]y_b^2(t) + 4e^{-2t}, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad y_b(+0) = 2. \end{aligned}$$

Eltérően a DI jelek rekurzív megadásmódjától, a FI jelekre nincs pontos „lépésről lépésre” módszerünk a jel meghatározására. Az első, illetve a második differenciálegyenlet által meghatározott jel pontos, illetve közelítő előállításával később még részletesen foglalkozunk (2.3-3.8. és 2.5-2.5. pont).

Egy FI jel egy szakasza *közelítően* leírható e szakaszba eső rögzített t_k értékeinek *felsorolásával* például a következő alakban:

$$x(t_k) = \{x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)\}. \quad (1.1-14)$$

Többször $t_0 = 0$ és $t_k = kT$, ahol T rögzített időköz. Például $T = 0,5$ esetén

$$x(t_k) = \{x(0) = 1,00; x(0,5) = 0,78; x(1) = 0,61; x(1,5) = 0,37; x(2) = 0,08\}.$$

Ebből a leírásból nincs ismeretünk $x(t)$ viselkedéséről a $t < t_0$ és a $t > t_N$ tartományban. Gyakran tudjuk, hogy itt értéke nulla. A megadott időpontok között $x(t)$ közelítőleg valamilyen interpolációs képlettel számítható, mint például

$$\begin{aligned} x(t) &\approx x(t_k), & t_k < t < t_{k+1}; \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \\ x(t) &\approx x(t_k) + \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{t_{k+1} - t_k} [t - t_k], & t_k < t < t_{k+1}; \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (1.1-15)$$

Később megismerkedünk majd nem polinom típusú interpolációs eljárással is (például a sávkorlátozott közelítés, 3.2-1.5. pont).

1.1-3.2. Az egységugrás és a Dirac-impulzus

Ebben a pontban két speciális folytonos idejű jelet értelmezünk.

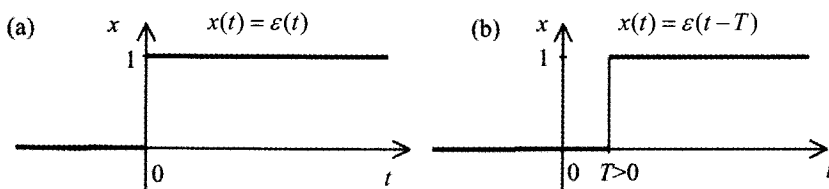
A FI *egységugrás* jele $\varepsilon(t)$, értelmezése (6a ábra)

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \in \mathbf{R}_-, \\ 1, & t \in \mathbf{R}_+. \end{cases} \quad (1.1-16)$$

Az $\varepsilon(0)$ értéke érdektelen. Tekinthető nem definiáltnak, rendelhetjük hozzá a 0,5 vagy az 1 vagy bármilyen más 0 és 1 közötti értéket. A 6b ábrán látható $T > 0$ esetére az

$$\varepsilon(t-T) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < T, \\ 1, & T < t < \infty \end{cases} \quad (1.1-17)$$

eltolt egységugrás grafikonja. Egy valódi fizikai mennyiség értéke nem változhat ugrásszerűen, de ha rövid idő alatt elég gyorsan változik, akkor leírása egy szakadásos jellel elfogadható közelítés lehet.



1.1-6. ábra (a) Az egységugrás és (b) az eltolt (T idővel késleltetett) egységugrás grafikonja

Eltolt egységugrások felhasználásával tömör alakban is megadhatunk szakaszonként elemi függvényekkel leírható jeleket. Például az

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -\infty < t < 0, \\ t, & 0 < t < 5, \\ 10t^{-1}, & 5 < t < \infty \end{cases}$$

módon megadott jel felírható a következő alakban is:

$$x(t) = [1 - \varepsilon(t)] + [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-5)]t + \varepsilon(t-5)10t^{-1}.$$

Az itt szereplő $w(t; t_1, t_2) \equiv \varepsilon(t-t_1) - \varepsilon(t-t_2)$ jelet négyszögletes (derékszögű vagy állandó) ablaknak is nevezik.

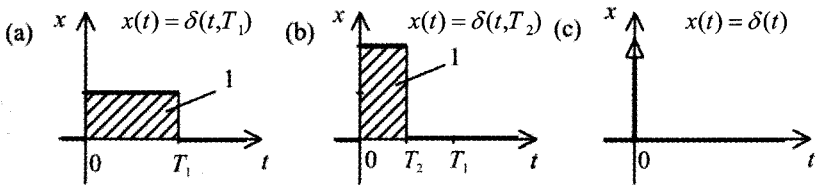
Egy másik fontos FI jel a $\delta(t, T)$ négyszögletes (vagy állandó) impulzus, amelynek szélessége T , magassága $1/T$, tehát intenzitása egységnyi (7a és b ábra):

$$\delta(t, T) = \frac{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)}{T}. \quad (1.1-18)$$

Ez azt jelenti, hogy $\delta(t, T) = 1/T$, ha $0 < t < T$ és értéke nulla egyébként. Minél rövidebb az impulzus, annál nagyobb az amplitúdója, miközben az intenzitása (a görbe alatti terület) állandó marad: $T \times (1/T) = 1$. Ez azt jelenti, hogy a $\delta(t, T)$ integrálja egységnyi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t, T) dt = 1. \quad (1.1-19)$$

Az integrál alsó határaként bármilyen $t_1 < 0$, a felső határaként bármilyen $t_2 > T$ is írható.



1.1-7. ábra. Az egységnyi intenzitású impulzus (a) T_1 hosszúsággal, (b) T_2 hosszúsággal, (c) az elhanyagolható hosszúságú Dirac-impulzus szemléltetése

Legyen $f(t)$ egy FI jel, amely mindenütt - de legalább a $[t_0, t_0+T]$ zárt intervallumban - folytonos. Az integrálszámítás középértéktétele értelmében ekkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-t_0, T) dt \equiv \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \frac{1}{T} dt = f(t_0 + \eta T), \quad 0 \leq \eta \leq 1. \quad (1.1-20)$$

Tekintsük azt az esetet, amikor T sokkal kisebb, mint az a T_0 érték, amely a vizsgált folyamat legkisebb jellemző idejének tekinthető. (Később megismerkedünk néhány jellemző idővel, mint például a rendszer legkisebb időállandója, sávszélességének reciproka, a gerjesztés valamilyen jellemző ideje.) Az olyan egységnyi intenzitású $\delta(t, T)$ impulzus, amelyre T kellően kicsi, neve *Dirac-impulzus*, jele $\delta(t)$ és értelmezése (7c ábra)

$$\delta(t) \approx \frac{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)}{T}, \quad 0 < T \ll T_0. \quad (1.1-21)$$

Azt mondhatjuk, hogy $\delta(t)$ mindenütt nulla, kivéve a $t = 0$ helyet, ahol nagyon nagy (végtelen) úgy, hogy (19)-ből következően

$$\delta(t) = 0, t \neq 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (1.1-22)$$

Ha $f(t)$ folytonos a t_0 helyén, akkor (20)-ból következik, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0). \quad (1.1-23)$$

Az $A\delta(t)$ jel grafikonja egy nyíl a $t = 0$ helyen, melynek hossza A -val arányos, felfelé mutat, ha A pozitív és lefelé, ha A negatív (7c ábra).

Gyakorlati szempontból a $\delta(t)$ Dirac-impulzus egy nagyon rövid impulzust ír le, amelynek tényleges lefolyása érdektelen, csak az intenzitása (idő szerinti integrálja) jellemzi. Ez a helyzet például egy kalapácsütés jellegű erő (az intenzitás az erő impulzusa) vagy egy rövid elektromos áramlökés (az intenzitás az elektromos töltés) esetén. Ha t térbeli koordinátát jelöl, akkor $\delta(t)$ egy megoszló erőként leírt koncentrált erőt vagy töltéssűrűségként leírt pontszerű töltést jelent. (Egyébként P. Dirac éppen az utóbbi célból vezette be.)

Matematikai szempontból a $\delta(t)$ jel nem függvény a klasszikus értelemben, hiszen nem értelmezett a $t = 0$ helyen. Az $\varepsilon(t)$ egységugrás sem értelmezett a $t = 0$ helyen, de bármilyen véges értéket elfogadhatunk erre. Ugyanezt nem tehetjük meg a Dirac-impulzusra, mert akkor (22) vagy (23) már nem lesz érvényes. A matematikusok a Dirac-impulzusra és számos vele rokon képződményre az általánosított függvény, a disztribúció vagy az operátor elnevezést használják. A rájuk vonatkozó szigorú matematikai elméletek alátámasztják azokat a szemléletesen megindokolt állításokat, amelyeket eddig tettünk, és amelyeket a következőkben még tárgyalunk. Ezek azonban nem szükségesek a szabályok megértéséhez és alkalmazásához.

Megjegyezzük, hogy a Dirac-impulzus nem csak a négyszögletes impulzusból származtatható, hanem bármilyen olyan $\delta(t, T)$ függvényből, amelyre (19) érvényes, továbbá $\delta(t, T) \rightarrow 0$, ha $T \rightarrow 0$ és $t \neq 0$.

Míg a DI jel, DI függvény és DI sorozat ugyanazt jelentik, a FI jel nem mindig függvény, hiszen lehet általánosított függvény is, mint a Dirac-impulzus. Más általánosított függvényt (például a Dirac-impulzus deriváltját) nem fogunk alkalmazni.

1.1-3.3. A jel deriváltja

Egy folytonos idejű $x = x(t)$ jel derivált jelének vagy röviden *deriváltjának* jele $x^{(1)} = x^{(1)}(t)$ vagy $x' = x'(t)$. Ha $x(t)$ differenciálható függvény, akkor $x'(t)$ az $x(t)$ differenciálhányadosa:

$$x'(t) \equiv x^{(1)}(t) = \frac{dx(t)}{dt}. \quad (1.1-24)$$

Ha $x(t)$ folytonos, akkor a gyakorlatban előforduló esetekben legalább szakaszonként differenciálható, de $x'(t)$ nem feltétlenül folytonos. Ismeretes, hogy $x'(t)$ az $x(t)$ változási

sebességét adja meg t minden értékére, grafikusan $x'(t)$ arányos $x(t)$ grafikonjának meredekségével minden t helyen.

Ha $x^{(1)}(t)$ legalább szakaszonként differenciálható függvény, akkor képezhetjük az $x^{(2)}(t) = \{x^{(1)}(t)\}^{(1)}$ deriváltját, és így tovább.

Ha $x(t)$ egy függvény, akkor kapcsolata $x'(t)$ deriváltjával kifejezhető a következő alakban is:

$$x(t) = \int_{t_0}^t x'(\tau) d\tau + x(t_0). \quad (1.1-25)$$

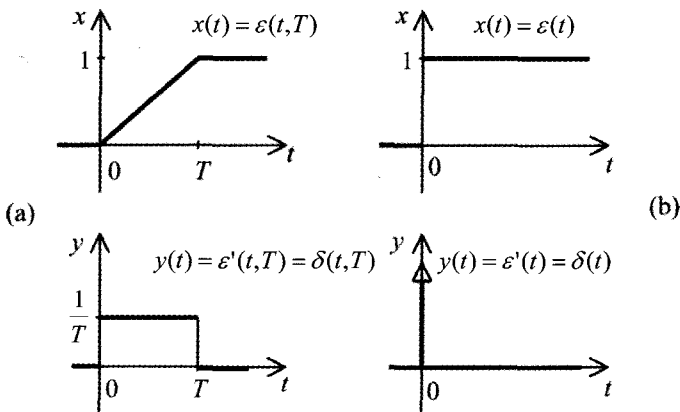
Rendszerint a $t_0 = -\infty$ választással élünk, különösen $x(-\infty) = 0$ esetén. Tekintsük (25)-öt az $x'(t)$ általánosított derivált definíciójának arra az esetre is, amikor $x(t)$ nem folytonos és ezért nem is differenciálható az ugráshelyein. Ez azt jelenti, hogy egy $x(t)$ jel deriváltja egy olyan $x'(t)$ jel, amelyből (25) alakjában rekonstruálható az eredeti $x(t)$ jel.

A 8a ábrán láthatjuk az egységugrás egy folytonos függvényű közelítését és deriváltját, amely ugrással bíró függvény. Ezekre (24) és (25) érvényes. A 8b ábra a 8a ábra speciális esetének tekinthető, amikor T nagyon kicsi. Ekkor az $x(t)$ az $\varepsilon(t)$ egységugrással és $x'(t)$ a $\delta(t)$ Dirac-impulzussal azonosítható. A $\delta(t)$ definíciójából következik, hogy

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau, \quad (1.1-26)$$

mivel $t < 0$ esetén az integrál értéke 0, míg $t > 0$ esetén az integrál értéke 1. Ebből következik, hogy az egységugrás deriváltja a Dirac-impulzus:

$$\varepsilon'(t) = \delta(t). \quad (1.1-27)$$



1.1-8. ábra Egy jel deriváltjának értelmezése: (a) folytonos jel és (b) ugrással bíró jel esetén

Szavakban megfogalmazva: az $\varepsilon(t)$ egységugrás (egy nem folytonos függvény) általánosított deriváltja a $\delta(t)$ Dirac-impulzus (egy általánosított függvény). Ez az

értelmezés összhangban van a derivált grafikus értelmezésével: az egységugrás meredeksége mindenütt nulla, kivéve a $t = 0$ helyet, ahol végtelenül nagy.

Egy nem folytonos és a végesben nem korlátos jelnek általában nincs (általánosított) deriváltja. Például az $u(t) = 1/t$ jelhez nem található olyan $u'(t)$ jel, amelyre (25) érvényes lenne. Célszerű, ha ilyen függvényeket nem alkalmazunk fizikai folyamatok leírására, vagyis nem tekintjük jelnek őket.

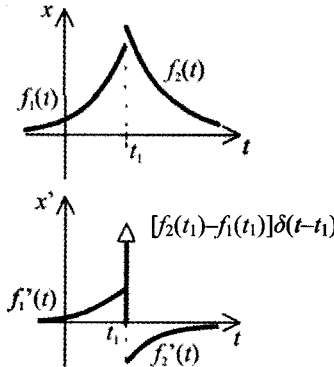
Ezzel szemben az előzőhöz hasonló módon értelmezhető a $\delta'(t) = \varepsilon^{(2)}(t)$ általánosított függvény, valamint a további általánosított deriváltak. Közelítsük ehhez a $\delta(t)$ Dirac-impulzust például a 7. ábrán látható $\delta(t, T)$ jellel. Ennek a jelnek képezhető az általánosított deriváltja. Képezzük $\delta(t, T) = [\delta(t) - \delta(t - T)]/T$ függvényt, és tekintsük ezt T nagyon kis értékénél a $\delta'(t)$ deriváltjának, az $\varepsilon^{(2)}(t)$ jelnek. Ha t térbeli koordináta, akkor $\delta'(t)$ jelenthet erőnyomatéktot (mint megoszló terhelést) vagy elektromos dipólust (mint töltéssűrűséget). A következőkben a Dirac-impulzust gyakran fogjuk használni, deriváltjait azonban nem, ezért ezeket nem is részletezzük.

Tekintsünk most egy olyan $x(t)$ jelet, amely egy olyan függvénnyel írható le, amelyik mindenütt folytonos, kivéve a t_1 helyet, ahol véges ugrása van:

$$x(t) = [1 - \varepsilon(t - t_1)]f_1(t) + \varepsilon(t - t_1)f_2(t) = \begin{cases} f_1(t), & -\infty < t < t_1, \\ f_2(t), & t_1 < t < \infty. \end{cases} \quad (1.1-28)$$

Feltételezzük, hogy $f_1(t)$ és $f_2(t)$ differenciálható függvény. A 9. ábrából követhető, hogy e jel általánosított deriváltja

$$x'(t) = [1 - \varepsilon(t - t_1)]f_1'(t) + [f_2(t_1) - f_1(t_1)]\delta(t - t_1) + \varepsilon(t - t_1)f_2'(t). \quad (1.1-29)$$



1.1-9. ábra. Véges ugrással bíró jel és általánosított deriváltja

Fejezzük ki most az $x'(t)$ deriváltat a szorzatra vonatkozó differenciálási szabály formális alkalmazásával az $x(t)$ jel (28) szerinti kifejezésére:

$$x'(t) = [1 - \varepsilon(t - t_1)]f_1'(t) + [1 - \varepsilon(t - t_1)]f_1(t) + \varepsilon'(t - t_1)f_2(t) + \varepsilon(t - t_1)f_2'(t).$$

Itt $[1 - \varepsilon(t - t_1)] = -\delta(t - t_1)$ és $\delta(t - t_1)f_1(t) = \delta(t - t_1)f_1(t_1)$, mivel $\delta(t - t_1) = 0$ mindenütt, kivéve a $t = t_1$ helyet. Ebből következik, hogy a formális számítás a (29) helyes eredményt adja. Az eljárás általánosítható arra az esetre, amikor a jelnek több véges ugrása van.

A fenti differenciálási szabály nem ad helyes eredményt, ha az $f_i(t)$ függvények nem folytonosak. Tekintsük például az $u(t) = \varepsilon(t) \cdot \varepsilon(t)$ jelet. Nyilvánvaló, hogy $u(t) = \varepsilon(t)$ és $u'(t) = \delta(t)$. A szorzatra vonatkozó szabályt az $\varepsilon(t) \cdot \varepsilon(t)$ jelre (nem jogosan) alkalmazva $\varepsilon(t) \cdot \varepsilon'(t) + \varepsilon'(t) \cdot \varepsilon(t) = 2\varepsilon(t)\delta(t)$ hibás eredmény adódik, amelynek még a jelentése sem egyértelmű.

A következőkben egy jel deriváltján mindig az előzőekben értelmezett általánosított deriváltját értjük. A differenciálható függvény általánosított deriváltja megegyezik a hagyományos értelmű differenciálhányadosával.

1.1-3.F. Feladatok

F-1. Mutassa meg, hogy $\delta(t)$ értelmezhető mint a

$$(a) \delta_1(t, T) = \frac{1}{T} \varepsilon(t) e^{-t/T} \quad (b) \delta_2(t, T) = \frac{T}{\pi(t^2 + T^2)}$$

jel határeseteként amikor T nagyon kicsi!

F-2. Határozza meg a következő jelek (általánosított) deriváltját:

$$\begin{aligned} (a) u(t) &= \varepsilon(t) e^{-\alpha t} . \\ (b) v(t) &= [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)] e^{-\alpha t} . \\ (c) x(t) &= [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)] \sin \frac{\pi t}{T} . \\ (d) y(t) &= \varepsilon(t) - \varepsilon(t-T) + \varepsilon(t-2T) - \varepsilon(t-3T) + \varepsilon(t-4T) - \dots \end{aligned}$$

Vázolja fel a jelet és a derivált jelet a szemléletes ellenőrzés érdekében!

F-3. Mutassa meg, hogy az előző példában meghatározott deriváltak integrálásával visszajuk az eredeti jelet feltételezve, hogy az integrál értéke nulla a $t = -\infty$ helyen!

1.1-3.M. Megoldások

M-1. Mindkét $\delta_i(t, T)$ integrálja egységnyi és ha T tart nullához akkor mindkettő nullához tart, kivéve a $t = 0$ helyet, ahol $\delta_i(t, T)$ végtelenhez tart.

M-2. Akár a szemlélet alapján, akár formális számítással

$$\begin{aligned} (a) u'(t) &= \delta(t) - \alpha \varepsilon(t) e^{-\alpha t} . & (b) v'(t) &= \delta(t) - \alpha [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)] e^{-\alpha t} - \delta(t-T) e^{-\alpha T} . \\ (c) x'(t) &= \frac{\pi}{T} [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)] \cos \frac{\pi t}{T} . \\ (d) y'(t) &= \delta(t) - \delta(t-T) + \delta(t-2T) - \delta(t-3T) + \delta(t-4T) - \dots \end{aligned}$$

M-3. Az (a) szerinti jel deriváltját integrálva, kapjuk

$$u(t) = \int_{-\infty}^t [\delta(\tau) - \alpha \varepsilon(\tau) e^{-\alpha\tau}] d\tau = 0, \text{ ha } t < 0; \quad u(t) = 1 - \alpha \left[\frac{e^{-\alpha\tau}}{-\alpha} \right]_0^t = e^{-\alpha t}, \text{ ha } t > 0,$$

ami éppen az eredetileg adott $u(t)$. Hasonló a megoldás a másik három jelre, ezért nem is részletezzük.

1.1-4. Jelek néhány osztálya

1.1-4.1. Belépő jelek

Egy jelet *belépő jelnek* nevezünk, ha értéke t vagy k negatív értékeire azonosan nulla:

$\text{FI: } x(t) = 0, t \in \mathbf{R}_-; \quad \text{DI: } x[k] = 0, k \in \mathbf{Z}_-.$	(1.1-30)
---	----------

Ha egy jel felírható $x(t) = \varepsilon(t)f(t)$ vagy $x[k] = \varepsilon[k]f[k]$ alakban, ahol f tetszőleges jel, akkor x belépő jel. Megjegyezzük, hogy $\delta(t)$ vagy $\delta[k-2]$ belépő jel, de alakja nem ilyen, a (30) tehát elegendő, de nem szükséges feltétel. (A belépő jel angolul causal signal, aminek magyarázatát később látni fogjuk).

Néhány példa *nem belépő* jelekre:

$$\begin{aligned} \text{FI: } x(t) &= \varepsilon(t+1), & u(t) &= \sin \omega t, & w(t) &= \delta(t+2); \\ \text{DI: } x[k] &= 1, & u[k] &= a^{|k|}, & w[k] &= \delta[k+2] + \delta[k-2]. \end{aligned}$$

Általánosabban $x(t)$ a t_0 illetve $x[k]$ a k_0 helyen belépő jel, ha

$$\text{FI: } x(t) = 0, \text{ ha } -\infty < t < t_0; \quad \text{DI: } x[k] = 0, \text{ ha } -\infty < k < k_0. \quad (1.1-31)$$

Egy fizikai folyamatot leíró jel mindig valamilyen t_0 vagy k_0 helyen belépő jel. Néha azonban kényelmes lehet azt mondani, hogy t_0 vagy k_0 olyan régen volt, hogy negatív végtelennek tekinthető. Ekkor a jel általánosított értelemben sem belépő. Egyes feladatoknál bonyodalmakat okoz, ha a jelet nem tekintjük belépőnek.

1.1-4.2. Páros és páratlan jelek

Egy u jelet *páros jelnek* nevezünk, ha

$$\text{FI: } u(-t) = u(t), \quad \text{DI: } u[-k] = u[k]. \quad (1.1-32)$$

Egy v jelet *páratlan jelnek* nevezünk, ha

$$\text{FI: } v(-t) = -v(t), \quad \text{DI: } v[-k] = -v[k]. \quad (1.1-33)$$

A páros jelek szimmetrikusak a $t = 0$ vagy a $k = 0$ tengelyre. Néhány gyakran előforduló páros jel:

$$\begin{aligned} \text{FI: } u(t) &= 1, & u(t) &= e^{a|t|}, & u(t) &= \delta(t); \\ \text{DI: } u[k] &= \cos \vartheta k, & u[k] &= |k|, & u[k] &= \delta[k]. \end{aligned}$$

Páros jelek csak kivételesen belépők. A $\delta[k]$ és a $\delta(t)$ érdekes kivétel.

A páratlan jelek szimmetrikusak az origóra, ahol értékük nulla. Néhány gyakran előforduló páratlan jel:

$$\begin{aligned} \text{FI: } v(t) &= \sin \omega t, & v(t) &= -\delta(t+1) + \delta(t-1), \\ \text{DI: } v[k] &= k, & v[k] &= 3\delta[k+2] - 3\delta[k-2]. \end{aligned}$$

Páratlan jel nem lehet belépő is a $g(t) = 0$, illetve a $g[k] = 0$ jel kivételével.

Bármely x jel egyértelműen *felbontható* egy $x^{(e)}$ páros jel és egy $x^{(o)}$ páratlan jel összegére (a felső indexek az angol *even*, illetve *odd* szavakra utalnak):

$$x = x^{(e)} + x^{(o)} \quad (1.1-34)$$

Könnyen belátható, hogy

$$\begin{aligned} x^{(e)}(t) &= \frac{1}{2} \{x(t) + x(-t)\}, & x^{(o)}(t) &= \frac{1}{2} \{x(t) - x(-t)\}; \\ x^{(e)}[k] &= \frac{1}{2} \{x[k] + x[-k]\}, & x^{(o)}[k] &= \frac{1}{2} \{x[k] - x[-k]\}. \end{aligned} \quad (1.1-35)$$

Ha x páros jel, akkor ebből $x^{(e)} = x$, $x^{(o)} = 0$, ha x páratlan jel, akkor $x^{(e)} = 0$, $x^{(o)} = x$ következik, amint annak lennie is kell.

A 10. ábrán látható az $x(t) = \varepsilon(t)$ és az $x[k] = \{\varepsilon[k-1] - \varepsilon[k]\} \{k-1\}$ jel felbontása páros és páratlan összetevőjére.

Az itt szereplő sgn jelű páratlan „előjelfüggvény” értelmezése:

$$\text{sgn } t \equiv \begin{cases} -1, & t \in \mathbf{R}_-, \\ 0, & t = 0, \\ +1, & t \in \mathbf{R}_+; \end{cases} \quad \text{sgn } k \equiv \begin{cases} -1, & k \in \mathbf{Z}_-, \\ 0, & k = 0, \\ +1, & k \in \mathbf{Z}_+. \end{cases} \quad (1.1-36)$$

Használatos a sgn helyett a sign jel is (mindkettő a „szignum” szóra utal).

1.1-4.3. Véges tulajdonságú jelek

Egy fizikai mennyiség értéke természetesen mindig véges. Ha a fizikai mennyiséghez kapcsolódik energia vagy teljesítmény, akkor az ugyancsak véges. A mennyiséget leíró jel azonban nem feltétlenül rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal. Speciális osztályokat alkotnak azok a jelek, amelyek valamilyen „véges” tulajdonsággal bírnak.

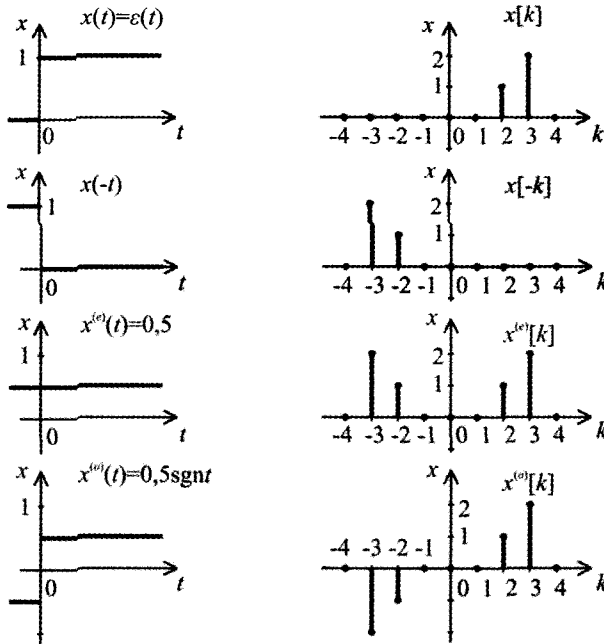
Az x jel *korlátos*, ha létezik olyan véges M érték, amelyre $|x| < M$ teljesül $t \in \mathbf{R}$ illetve $k \in \mathbf{Z}$ minden értékére.

Az x jel *véges időkre korlátos*, ha korlátos t vagy k minden véges értékére. Ilyenkor az M korlát a t illetve k értékétől függhet.

A folytonos idejű $x(t)$ jel *abszolút integrálható*, illetve a diszkrét idejű $x[k]$ jel *abszolút összegezhető*, ha a jel abszolút értékének integrálja, illetve összege véges:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| < \infty. \quad (1.1-37)$$

Az $x(t)$ jel négyzetesen integrálható, illetve az $x[k]$ jel négyzetesen összegezhető, más szóval e jelek *véges E_x energiájúak*, ha



1.1-10. ábra Egy folytonos idejű és egy diszkrét idejű jel felbontása páros és páratlan összevőjére.

$$E_x \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty, \quad E_x \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 < \infty. \quad (1.1-38)$$

Az x jelnek véges P_x teljesítménye van, ha

$$P_x \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt < \infty, \quad P_x \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{k=-L}^L |x[k]|^2 < \infty. \quad (1.1-39)$$

Ha E_x véges, akkor P_x nulla. Ha P_x véges, akkor E_x végtelen.

A fenti összefüggésekben x komplex értékű is lehet.

A véges idejű jelek nulla értékűek a $t_1 < t < t_2$ illetve a $k_1 < k < k_2$ intervallumon kívül. A véges idejű korlátos jelek abszolút integrálhatók illetve összegeezhetők, véges energiájúak, nulla teljesítményűek. A véges idejű jel teljesítményét célszerűbb lehet a fentitől eltérő módon a jel energiájának és a jel hosszának hányadosaként értelmezni.

Az $x(t)$ illetve a $\text{sgn } t$ illetve az $x[k]$ és a $\text{sgn } k$ jelek korlátosak, nem abszolút, integrálhatók vagy összegeezhetők, végtelen energiájúak, de véges teljesítményűek.

A periodikus jelek és korlátos jelek teljesítménye véges, energiája végtelen.

Az $x(t)e^{-2t}$ illetve az $x[k]0.4^k$ jel korlátos, abszolút integrálható vagy összegeezhető, véges energiájú és nulla teljesítményű.

Az $x(t)e^{2t}$ és az e^{-2t} illetve az $x[k]4^k$ és a 0.4^k jel nem korlátos, de véges időkre korlátos, végtelen energiájú és végtelen teljesítményű.

Az $x(t)[1+t]^{-1}$ illetve az $x[k](1+k)^{-1}$ jel korlátos, nem abszolút integrálható vagy nem abszolút összegeezhető, de véges energiájú és nulla teljesítményű. Ilyen jeleket ritkán alkalmazunk egy folyamat leírására.

A $\delta[k]$ DI jel korlátos, abszolút összegezzhető, véges energiájú, nulla teljesítményű. A $\delta(t)$ FI jel nem korlátos, abszolút integrálható, de nem véges energiájú és teljesítményét célszerű nem értelmezettnek tekinteni. E két hasonló jellegű FI illetve DI jel tehát energiája és teljesítménye szempontjából eltérő tulajdonságú.

1.1-4.4. Ablakozott jelek

Egy fizikai mennyiség csak véges ideig figyelhető meg. Ez a következőképpen is megfogalmazható: a jelet egy „falba vágott ablakon keresztül látjuk”. A jelnek a fal által „eltakart” részét nulla értékűnek tekintjük. Az ablak nem feltétlenül egyenletesen „átlátszó”. Az ablakozott jelet gyakran az „eredeti” jel és egy ablakozó jel - röviden: *ablak* - szorzataként állítjuk elő. Mind az ablak, mind az ablakozott jel véges idejű jel.

A négyyszögletes ablak jele $p(t, T)$ illetve $p[k, L]$, vagyis az ablak szélessége $2T$ illetve $2L + 1$, értelmezése

$$p(t, T) = \varepsilon(t+T) - \varepsilon(t-T), \quad p[k, L] = \varepsilon[k+L] - \varepsilon[k-L-1]. \quad (1.1-40)$$

A négyyszögletes ablak páros jel (a 11. ábra felső sora). Az ablak természetesen eltolható. A belépő négyyszögletes ablak $p(t-T, T)$ illetve $p[k-L, L]$ alakban állítható elő. Ez nulla, ha $t < 0$ és $t > 2T$ vagy $k < 0$ és $k \geq 2L + 1$.

Legyen x egy tetszőleges DI vagy FI jel. Az „ablakon keresztül látott” jel $y = p x$, azaz $y(t) = p(t, T)x(t)$ illetve $y[k] = p[k, L]x[k]$ alakban állítható elő (11. ábra középső és alsó sora). A vázolt esetben y kevesebb információt tartalmaz, mint x . Szélesebb ablakkal rendszerint csökkenthető az információ-veszteség.

A négyyszögletes ablak természetes választásnak tűnik, de nem mindig optimális. Például ha $x(t)$ folytonos jel, akkor $p(t, T)x(t)$ már nem folytonos. Ez áthidalható, ha folytonos ablakot választunk.

Egy általános $w(t, T)$ illetve $w(k, L)$ *ablak* (ablakozó jel) a következő módon definiálható:

$$w(t, T) = p(t, T)g(t), \quad w[k, L] = p[k, L]g[k], \quad (1.1-41)$$

ahol $g(t)$ illetve $g[k]$ tetszőleges, rendszerint nem-negatív jel. Példaként válasszunk olyan ablakot, amelyen keresztül a jel múltja fokozatosan elhalványodik. Két jellegzetes ilyen ablak

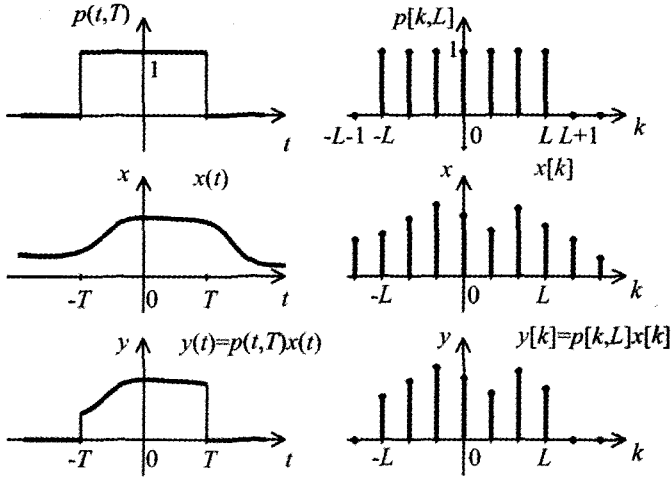
$$w(t, T) = p(t, T) \frac{t+T}{2T}, \quad w[k, L] = p[k, L] 2^{k-L}.$$

Ablakozott jelekkel később még foglalkozunk (például 3.2-1.7. pont).

1.1-4.F. Feladatok

F-1. Válassza ki az alábbi FI illetve DI jelek közül a belépőket:

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-2|t|}, & v(t) &= \delta(t+1), & x(t) &= \sin 2(t-1), & y(t) &= \varepsilon(t-1) \sin 2(t-1); \\ u[k] &= \varepsilon[k-2], & v[k] &= \varepsilon[k-1]0,6^k, & x[k] &= \varepsilon[k+1] \sin 3(k+1), & y[k] &= \varepsilon[k+1] \cos 3(k+1). \end{aligned}$$



1.1-11. ábra A p négyszögletes ablak, egy tetszőleges x jel és az $y = p x$ ablakozott jel

F-2. Határozza meg az alábbi jelek páros és páratlan összetevőit:

$$u(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad v[k] = A + B k.$$

F-3. Döntse el, hogy az alábbi jelek milyen véges tulajdonságokkal rendelkeznek:

$$u(t) = A \cos \omega t, \quad v(t) = A \varepsilon(t) t e^{-2t}, \quad x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta(t - iT),$$

$$u[k] = A \cos \vartheta k, \quad v[k] = A \varepsilon[k] k 2^{-k}, \quad x[k] = \sum_{i=0}^{\infty} \delta[k - i].$$

F-4. Vizsgálja meg, hogy (41) alkalmas ablakozó jel-e, ha $g(t) = A + C \cos \omega t$ illetve ha $g[k] = A + C \cos \vartheta k$. Tetszőlegesen választhatók-e az ablakozó jelet leíró paraméterek?

1.1-4.M. Megoldások

M-1. Az $y(t)$, illetve az $u[k]$ és $v[k]$ jelek belépők. Tágabb értelemben $v(t)$ a $t = -1$ illetve $x[k]$ és $y[k]$ a $k = -1$ helyen belépő jelnek nevezhető. Az $u(t)$ és $x(t)$ még tág értelemben sem belépő jel.

M-2. Akár a szemlélet, akár az általános eljárás alapján

$$u^{(e)}(t) = A \cos \omega t, \quad u^{(o)}(t) = B \sin \omega t; \quad v^{(e)}[k] = A, \quad v^{(o)}[k] = B k.$$

M-3. Az $u(t)$ illetve az $u[k]$ és $x[k]$ korlátos és véges teljesítményű. A $v(t)$ illetve a $v[k]$ korlátos, véges energiájú, nulla teljesítményű. Az $x(t)$ jelnek nincs véges tulajdonsága.

M-4. Csak akkor alkalmas ablakok, ha g nem-negatív. Ez $A > 0, |C| \leq A$ választással biztosan igaz.

1.2. Rendszerek

Ebben a fejezetben megadjuk a rendszer definícióját (1.2-1. szakasz) és értelmezzük a rendszerek néhány speciális osztályát (1.2-2. szakasz). A továbbiakban - a 2.5. fejezet kivételével - lineáris, invariáns rendszerek tárgyalására szorítkozunk. Megemlítjük az általánosítás lehetőségét, ahol ez nem okoz nehézséget.

1.2-1. A rendszer fogalma

1.2-1.1. Egy-gerjesztésű, egy-válaszú rendszer

Gyakorlati szempontból egy *rendszer* egy fizikai *objektum* egy modellje, amely fizikai változókkal leírható. A „fizikai” itt és a továbbiakban azt jelenti, hogy „valóságos”; a konkrét tartalma lehet fizikai, kémiai, gazdasági, stb. vagy ezek keveréke. E mennyiségek némelyike adottnak tekinthető: ezek a *gerjesztések* (bemenetek, „inputok”), mások viselkedését meg akarjuk határozni: ezek a *válaszok* (kimenetek, „outputok”), a változók egy harmadik csoportját csak azért vezetjük be, hogy le tudjuk írni a gerjesztések és válaszok kapcsolatát. Minden fizikai változót az ahhoz rendelt jellel, az objektumot egy rendszerrel írjuk le.

Elméleti szempontból a *rendszer* egy *transzformáció*, amely adottnak tekintett gerjesztésekhez meghatározott válaszokat rendel.

Az egy-gerjesztésű, egy-válaszú *rendszer* egy kapcsolatot jelent, amely az adott $u = u(t)$ illetve $u = u[k]$ gerjesztéshez egy $y = y(t)$ illetve $y = y[k]$ választ rendel. Az összerendelés explicit alakja az

$$y = \mathcal{W} \{u\} \quad (1.2-1)$$

gerjesztés-válasz kapcsolat, ahol $\mathcal{W}$ egy operátor, amely a t illetve a k időtől is függhet.

Explicit gerjesztés-válasz kapcsolat például

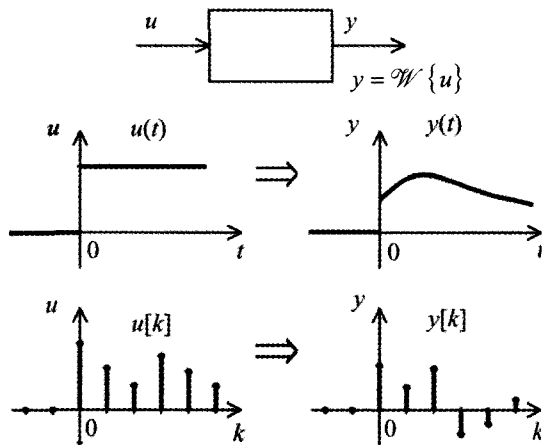
$$y(t) = 5u(t) + 7 \cos \omega t \cdot u'(t) + 4[u(t)]^2, \quad y[k] = 4u[k] + (A + Bk)u[k-1] + 2^{u[k]}.$$

Az egy-gerjesztésű, egy-válaszú rendszer általános rajzjele az 1. ábrán látható. Az ábrán egy lehetséges FI illetve DI gerjesztés-válasz párt is feltüntetünk.

A gerjesztés-válasz kapcsolat explicit alakja többnyire nem ismert. Egyik feladatunk éppen az, hogy ismerve a rendszer valamilyen leírását (például a később tárgyalandó állapotváltozós leírását vagy hálózati reprezentációját) meghatározzuk a gerjesztés-válasz kapcsolat explicit alakját. Az adott gerjesztéshez tartozó válasz meghatározható a rendszer egy leírásából közvetlenül is, tehát nincs feltétlenül szükség a gerjesztés-válasz kapcsolat explicit alakjának tényleges meghatározására.

A gerjesztés-válasz kapcsolat azt jelenti, hogy ha az u gerjesztés ismert, akkor az y válasz meghatározható. A korrekt alak az $y := \mathcal{W} \{u\}$ értékadó utasítás lenne. Ez világosan kifejezi, hogy például $y := 2u$ azt jelenti, hogy ha az u ismert, akkor az y

meghatározható. Ha viszont y ismert, akkor logikailag ugyan következtethetünk arra, hogy ezt a választ $u = y/2$ gerjesztés hozta létre, de nem jelenti azt, hogy ha a modellezett objektum kimenetére egy y mennyiséget kényszerítettünk, akkor az objektum bemenetén fellépő u mennyiség $y/2$ lesz. (Suttogjunk a mikrofonba és füleljünk a hangszórónál, aztán kiabáljunk bele a hangszóróba és füleljünk a mikrofonnál!) Ez a megkülönböztetés fontos lehet a modellalkotás során, de csak nagyon ritkán van jelentősége a modell vizsgálatakor.



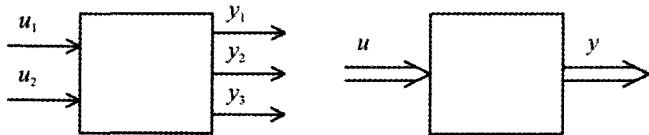
1.2-1. ábra Egy-gerjesztésű, egy-válaszú rendszer grafikus reprezentációja, valamint egy lehetséges gerjesztés és válasz grafikonja FI illetve DI esetre

Mivel a modellalkotást nem tekintjük feladatunknak, ezért a továbbiakban az egyszerű (1) alakot fogjuk használni.

1.2-1.2. Sok-gerjesztésű, sok-válaszú rendszer

Egy rendszernek lehet sok gerjesztése és sok válasza. Ilyen sok gerjesztésű, sok válaszú rendszer explicit gerjesztés-válasz kapcsolatok rendszerével írható le. Jelölje a gerjesztések számát P , a válaszok számát Q , akkor a rendszert Q számú explicit gerjesztés-válasz kapcsolat írja le:

$$y_i = \mathcal{W}_i\{u_1, u_2, \dots, u_P\}, \quad i = 1, 2, \dots, Q. \quad (1.2-2)$$



1.2-2. ábra Sok-gerjesztésű, sok-válaszú rendszer szimbolikus ábrázolásai

A 2. ábrán a rendszer egy grafikus reprezentáció látható $P = 2$, $Q = 3$ esetére, és egy grafikus reprezentáció az általános esetre. Utóbbira vastag nyilakat is használnak.

Egy másféle leírásmód a következő. Foglaljuk a gerjesztéseket egy P elemű $\mathbf{u}$ vektorba, a válaszokat egy Q elemű $\mathbf{y}$ vektorba (oszlop mátrixba):

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_P \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_Q \end{bmatrix}. \quad (1.2-3)$$

Kényelmesebb lehet a vektort nem oszlopmátrixként, hanem sormátrixként (vagyis az oszlopmátrix transzponáltjaként, T felső index) megadni:

$$\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_P]^T, \quad \mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_Q]^T.$$

A gerjesztés-válasz kapcsolatok összessége a következő alakban fejezhető ki:

$$\mathbf{y} = \mathcal{W} \{ \mathbf{u} \}, \quad (1.2-4)$$

ahol $\mathcal{W}$ vektort eredményező, vektorra ható operátor. A (4) jelentését a (2) adja meg. A grafikus megjelenítés a 2. ábrán látható. Ez a tömör alak nem adja meg a gerjesztések és a válaszok számát.

Megjegyezzük, hogy az „egy-gerjesztésű, egy-válaszú” szokásos rövidítése SISO („single input single output”), a „sok-gerjesztésű, sok-válaszú” szokásos rövidítése MIMO („multiple input multiple output”). A SIMO és MISO rövidítések jelentése már kikövetkeztethető.

A továbbiakban többnyire egy gerjesztésű, egy válaszü rendszerekkel foglalkozunk. A fogalmi általánosítás egy gerjesztésű sok válaszü rendszerekre igen egyszerű, mert az egyes válaszok egymástól függetlenül vizsgálhatók. Lineáris rendszer esetén (l. a következő szakaszt) a gerjesztések hatása függetlenül vizsgálható. Bonyolultabb a helyzet sok-gerjesztésű nemlineáris rendszereknél.

1.2-1.F. Feladatok

F-1. Egy FI illetve DI rendszer gerjesztés-válasz kapcsolata

$$\text{FI: } y(t) = b(t)u(t) + c(t) ; \text{ DI: } y[k] = b[k]u[k] + c[k].$$

Itt $b(t)$ és $c(t)$ illetve $b[k]$ és $c[k]$ adott jelek.

Fejezze ki az $y(t)$ illetve az $y[k]$ jelet, ha $u(t) = \varepsilon(t)$ illetve ha $u[k] = \varepsilon[k]$.

Egy- gerjesztésű és egy-válaszú ez a rendszer?

F-2. Oldja meg az előző feladatot, ha

$$\begin{aligned} (a) \quad u_a(t) &= 2 \varepsilon(t); & u_a[k] &= 2 \varepsilon[k]. \\ (b) \quad u_b(t) &= \varepsilon(t-3); & u_b[k] &= \varepsilon[k-3]. \end{aligned}$$

Jelölje y az F-1. feladat megoldását. Mi a feltétele annak, hogy teljesüljön

$$\begin{aligned} (a) \quad y_a(t) &= 2 y(t); & y_a[k] &= 2 y[k]. \\ (b) \quad y_b(t) &= y(t-3); & y_b[k] &= y[k-3]. \end{aligned}$$

1.2-1.M. Megoldások

M-1. A gerjesztés-válasz kapcsolatba helyettesítve

$$y(t) = b(t)\varepsilon(t) + c(t), \quad y[k] = b[k]\varepsilon[k] + c[k].$$

A rendszernek egyetlen y válasza van. A jelölésből az következik, hogy a rendszernek egyetlen u gerjesztése van. Tekinthejtük azonban akár a b , akár a c jelet, akár mindkettőt is gerjesztésnek. Ekkor a rendszer sok- (2 vagy 3) gerjesztésű, egy-válaszú.

M-2. A gerjesztés-válasz kapcsolatba helyettesítve

$$(a) \quad y_a(t) = 2b(t)\varepsilon(t) + c(t); \quad y_a[k] = 2b[k]\varepsilon[k] + c[k].$$

Az $y_a = 2y$ feltétel akkor és csakis akkor teljesül, ha $c = 0$.

$$(b) \quad y_b(t) = b(t)\varepsilon(t-3) + c(t); \quad y_b[k] = b[k]\varepsilon[k-3] + c[k].$$

A második feltétel akkor és csakis akkor teljesül, ha $b = B$ és $c = C$ állandó, vagyis nem függ az időtől.

1.2-2. Rendszerek osztályozása

1.2-2.1. Az osztályozás szempontjai

A rendszerek különféle szempontok alapján osztályozhatók. Egy osztályozási szemponttól már volt szó, ez a gerjesztések és a válaszok száma. A további osztályozás során egy gerjesztésű, egy válaszó rendszerekre szorítkozunk.

A gerjesztés és a válasz determinisztikus vagy sztochasztikus jellegétől függően négyféle rendszert különböztethetünk meg. A továbbiakban *determinisztikus gerjesztésű*, *determinisztikus válaszó* rendszerek vizsgálatára szorítkozunk.

Attól függően, hogy a gerjesztés és a válasz FI vagy DI típusú, négy rendszertípust értelmezhetünk. A következőkben csak *DI gerjesztésű*, *DI válaszó* és *FI gerjesztésű*, *FI válaszó* rendszerekkel foglalkozunk. Nem tárgyaljuk tehát „vegyes” rendszereket, amelyeket a gyakorlatban analóg-digitális vagy digitális-analóg rendszereknek is neveznek.

A rendszer *gerjesztés-válasz kapcsolata* lehet *determinisztikus* vagy lehet *sztochasztikus*. Az előbbi eset tárgyalására szorítkozunk

A következő pontokban néhány olyan egy-gerjesztésű, egyválaszó rendszerek további csoportosítását tárgyaljuk, amelyek explicit gerjesztés-válasz kapcsolata

$$\text{FI: } y(t) = \mathcal{W}\{u(t)\}; \quad \text{DI: } y[k] = \mathcal{W}\{u[k]\} \quad (1.2-5)$$

alakú, tehát a gerjesztés és a válasz vagy egyaránt diszkrét idejű jel vagy egyaránt folytonos idejű. Feltételezzük továbbá hogy a gerjesztés és a válasz egyaránt determinisztikus jel, az operátor is determinisztikus. Ezeket a megszorításokat a továbbiakban nem hangsúlyozzuk. Tárgyalásunk során rendszerint még további megszorításokat is teszünk a rendszert illetően. Ennek a szempontjait részletezzük a következő pontokban.

1.2-2.2. Lineáris rendszerek

Egy rendszer akkor *lineáris*, ha az $y = \mathcal{W}\{u\}$ explicit gerjesztés-válasz kapcsolatában szereplő $\mathcal{W}$ operátor lineáris, vagyis ha a rendszerre érvényes a *szuperpozíció* elve.

A linearitás a következőket jelenti. Jelölje a rendszernek az u_a , illetve az u_b gerjesztéshez tartozó válaszát y_a , illetve y_b . Ha az $u = C_a u_a + C_b u_b$ gerjesztéshez $y = C_a y_a + C_b y_b$ válasz tartozik bármely C_a és C_b esetén, akkor (és csakis akkor) a rendszer lineáris. A lineáris rendszer $\mathcal{W}$ operátora a

$$\mathcal{W}\{C_a u_a + C_b u_b\} = C_a \mathcal{W}\{u_a\} + C_b \mathcal{W}\{u_b\} \quad (1.2-6)$$

tulajdonsággal rendelkezik. Ennek speciális eseteként lineáris rendszerre

$$\mathcal{W}\{C u\} = C \mathcal{W}\{u\} \quad (1.2-7)$$

érvényes. Ebből következik, hogy az $u = 0$ gerjesztéshez lineáris rendszer esetén $y = 0$ válasz tartozik.

Például az $y = au + b$ gerjesztés-válasz kapcsolatú rendszer akkor és csakis akkor lineáris, ha $b = 0$.

Ha a rendszer nem lineáris, akkor *nemlineáris* rendszernek nevezzük.

Fizikai objektumok sohasem lineárisak. Ha a gerjesztés, a válasz vagy más változó túlságosan nagyra válik, akkor mindig fellépnek nemlineáris hatások. Ezek lehetnek reverzibilisek vagy irreverzibilisek, esetleg katasztrofálisak (például valami eltörik). Eléggké „kis” változásokra a legtöbb objektum lineáris rendszerrel jól leírható. Egyes esetekben a nemlineáris hatás az objektum működésének lényege (például egyenirányítás), ilyenkor a lineáris közelítés természetesen nem elfogadható. Néha azonban a lineáris rendszerekre alkalmazott számítástechnika közelítőleg ilyen rendszerekre is használható (például a tartományonkénti linearizálás módszere, l. a 2.5. fejezetet).

A továbbiakban (a 2.5. fejezet kivételével) *lineáris rendszerek* tárgyalására szorítkozunk.

1.2-2.3. Invariáns rendszerek

Egy rendszer akkor *invariáns*, ha a gerjesztés *időbeli eltolása* csak egy ugyanekkora időbeli eltolást okoz a válaszban.

A rendszer invarianciája (időbeli invarianciája) a következőket jelenti. Jelölje az $u_a = u_a(t)$ illetve az $u_a = u_a[k]$ gerjesztéshez tartozó választ $y_a(t) = \mathcal{W}\{u_a(t)\}$ illetve $y_a[k] = \mathcal{W}\{u_a[k]\}$. Ha az $u_b(t) = u_a(t - \tau)$ illetve az $u_b[k] = u_a[k - i]$ időben eltoltt gerjesztéshez $y_b(t) = y_a(t - \tau)$ illetve $y_b[k] = y_a[k - i]$ válasz tartozik τ illetve i bármely értékére, akkor (és csakis akkor) a rendszer invariáns. Az invariáns rendszer $\mathcal{W}$ operátora a következő tulajdonsággal rendelkezik:

$$\text{FI: } \mathcal{W}\{u(t - \tau)\} = \mathcal{W}\{u(t)\}_{t \rightarrow t - \tau}; \quad \text{DI: } \mathcal{W}\{u[k - i]\} = \mathcal{W}\{u[k]\}_{k \rightarrow k - i} \quad (1.2-8)$$

Például az $y = au + b$ gerjesztés-válasz kapcsolattal jellemzett rendszer akkor és csakis akkor invariáns, ha $a = A$, $b = B$, vagyis mindkét együttható az időtől független.

Ha a rendszer nem invariáns, akkor *variáns* rendszernek nevezzük.

Fizikai objektumok sohasem invariánsak az öregedés, a hőmérséklet-ingadozás és hasonló hatások következtében. Ezen hatások egy része (determinisztikus vagy sztochasztikus) járulékos gerjesztésként figyelembe vehető. Ennek ellenére az objektum invariáns modellje sokszor jól használható közelítést jelent ha „rövid” időtartamok vizsgálatára szorítkozunk. Vannak olyan objektumok, amelyek működésének lényege a variáns jellegük, mint például a nappal és éjjel (de nem világosban és sötétben) vagy a télen és nyáron (de nem melegben és hidegben) másként működő rendszerek

A továbbiakban (a 2.5. fejezet kivételével) *lineáris*, *invariáns* rendszerekkel fogunk foglalkozni. Látni fogjuk, hogy az invariáns rendszerekre kidolgozott számítási módszerek egy része DI esetben kiterjeszthető variáns rendszerekre, FI esetben azonban ez csak nagyon speciális variáns rendszerekre lehetséges.

1.2-2.4. Kauzális rendszerek

Egy rendszer akkor *kauzális*, ha az $y(t_1)$ illetve az $y[k_1]$ válasz bármely t_1 vagy k_1 esetén az $u(t)$ illetve az $u[k]$ gerjesztésnek csak olyan értékeitől függ, amelyekre $t \leq t_1$ illetve $k \leq k_1$ teljesül.

Egy kauzális rendszer válasza nem függ gerjesztésének jövőbeli értékeitől. Például az $y(t) = u(t - T)$ illetve az $y[k] = u[k - L]$ explicit gerjesztés-válasz kapcsolat akkor és csakis akkor ír le kauzális rendszert, ha $T \geq 0$ vagy $L \geq 0$ teljesül. Ebből következően az $y(t) = u(t + 0,1)$ illetve az $y[k] = u[k + 1]$ gerjesztés-válasz kapcsolatú prediktor (jósló rendszer) nem kauzális rendszer.

Egy *lineáris rendszer* akkor és csakis akkor *kauzális*, ha bármely belépő gerjesztéshez belépő válasz tartozik.

Egy lineáris, kauzális rendszer *W*operátora tehát a következő tulajdonsággal bír:

$$\text{FI: } \mathcal{W} \{ \varepsilon(t) f(t) \} = 0, t \in \mathbf{R}_-; \quad \text{DI: } \mathcal{W} \{ \varepsilon[k] f[k] \} = 0, k \in \mathbf{Z}_- . \quad (1.2-9)$$

Nemlineáris rendszerre ez a tulajdonság nem szükséges és nem is elegendő. Így például az $y = au + b$ explicit gerjesztés-válasz kapcsolatú nemlineáris rendszer kauzális, noha belépő gerjesztéshez nem belépő válasz tartozik (ha a b jel nem belépő), viszont az $y(t) = u(t) \cdot u(t + 0,1)$ illetve az $y[k] = u[k] \cdot u[k + 1]$ explicit gerjesztés-válasz kapcsolatú nemlineáris rendszer nem kauzális, noha (9) ki van elégítve.

Ha egy rendszer nem kauzális, akkor *akauzális* rendszernek is nevezik.

Fizikai objektumok mindig kauzálisak. Nem kauzális objektumok például megvalósítandó célt jelenthetnek: ilyenkor feladatunk egy olyan kauzális objektum létrehozása, amely valamilyen értelemben optimálisan közelíti egy akauzális rendszer működését. Látni fogjuk, hogy egy rendszer korrektnek tűnő leírása néha nem kauzális, tehát fizikai objektummal nem realizálható rendszert jelent. A kauzalitás fogalmára elsősorban ennek felderítése érdekében van szükségünk.

1.2-2.5. Stablis rendszerek

A rendszer stabilitása bonyolult fogalom. Néhány stabilitási fogalmat később fogunk tárgyalni. Különösen nemlineáris rendszerekre nehéz a stabilitást értelmezni (részletesebben l. a 2.5. szakaszt). Lineáris, invariáns rendszerekre kétféle stabilitás-fogalom használatos, az egyiket itt adjuk meg, a másikra visszatérünk.

Egy lineáris, invariáns rendszer akkor és csakis akkor *gerjesztés-válasz stablis* (röviden: GV stablis), ha bármely korlátos u gerjesztéshez korlátos y válasz tartozik.

A „rendszer stablis” kifejezés rendszerint a GV stabilitást fejezi ki. Szokták használni a „BIBO stablis” („bounded input implies bounded output”) kifejezést is. Egy nem GV stablis rendszer válasza bizonyos korlátos gerjesztésekre természetesen lehet korlátos, mert a definíció szerint a válasznak *bármely* korlátos gerjesztés hatására korlátosnak kell lennie.

A nem GV stablis rendszer a *stabilitás határhelyzetében* van, ha bármely véges ideig tartó gerjesztéshez korlátos válasz tartozik. A GV *labilis* rendszer olyan nem GV stablis rendszer, amely nincs a GV stabilitás határhelyzetében.

Nyilvánvalóan nem GV stablis az

$$y(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau; \quad y[k] = \sum_{i=-\infty}^k u[i]$$

gerjesztés-válasz kapcsolató rendszer, mert például az egységugrás gerjesztésre válasza nem korlátos. E rendszer válasza belépő és utána szinuszosan változó gerjesztés hatására viszont korlátos. Mindkét rendszer a stabilitás határhelyzetében van.

Lineáris és nem GV stablis rendszer nem lehet egy objektum jó modellje, mert ha a rendszer egyes változói meghaladnak egy rájuk jellemző kritikus értéket, akkor a linearitás feltételezése már nem lehet jogos. A stabilitás határhelyzetében lévő rendszer megítélése részletes vizsgálatot igényel.

1.2-2.6. Memóriamentes rendszerek

Egy rendszer akkor *memóriamentes*, ha válasza a t , illetve a k időpontban csak a gerjesztésnek ugyanezen t , illetve a k időpontbeli értékétől függ. Ellenkező esetben a rendszer *dinamikus* (nem-memóriamentes).

A memóriamentes rendszer mindig kauzális. A dinamikus rendszer lehet véges vagy végtelen memóriájú. Véges memóriájú rendszer $y(t_1)$, illetve $y[k_1]$ válasza csak az $u(t)$ gerjesztésnek a $t_1 - T < t \leq t_1$, illetve az $u[k]$ gerjesztésnek a $k_1 - L < k \leq k_1$ intervallumbeli értékeitől függ, ahol T , illetve L véges, kauzális rendszer esetén pozitív.

Memóriamentes rendszert ír le például az

$$\text{FI: } y(t) = A t u^2(t) ; \text{ DI: } y[k] = A u[k] + B$$

gerjesztés-válasz kapcsolat. Véges memóriájú, kauzális rendszert ír le például az

$$\text{FI: } y(t) = \int_{t-2}^t u(\tau) d\tau ; \text{ DI: } y[k] = A u[k-5]$$

gerjesztés-válasz kapcsolat. Végtelen memóriájú, kauzális rendszert ír le például az

$$\text{FI: } y(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau ; \text{ DI: } y[k] = \sum_{i=-\infty}^k 2^i u[i]$$

gerjesztés-válasz kapcsolat.

A memóriamentes rendszer egy valóságos objektumnak csak ritkán elfogadható modellje.

1.2-2.F. Feladatok

F-1. Válassza ki a lineáris rendszereket az explicit gerjesztés-válasz kapcsolatukkal jellemzett következő FI illetve DI rendszerek közül:

$$\begin{array}{ll} (a) \ y(t) = 5 u'(t) ; & y[k] = 5 u[k-1]. \\ (b) \ y(t) = e^{2t} u(t) ; & y[k] = 4^k u[k]. \\ (c) \ y(t) = \varepsilon(t) e^{-2t} u(t) ; & y[k] = \varepsilon[k] 0,4^k u[k]. \\ (d) \ y(t) = 5 [u(t)]^2 ; & y[k] = 5 (u[k])^2. \\ (e) \ y(t) = 5 u(t) + 4 ; & y[k] = 5 u[k] + 4. \\ (f) \ y(t) = 5 u(t + 0,4) ; & y[k] = 5 u[k + 2]. \\ (g) \ y(t) = 5 u(1 - t) ; & y[k] = 5 u[1 - k]. \end{array}$$

F-2. Válassza ki az invariáns rendszereket az 1. feladatban az explicit gerjesztés-válasz kapcsolatukkal jellemzett rendszerek közül.

F-3. Válassza ki a kauzális rendszereket az 1. feladatban az explicit gerjesztés-válasz kapcsolatukkal jellemzett rendszerek közül.

F-4. Válassza ki a gerjesztés-válasz stabilis rendszereket az 1. feladatban az explicit gerjesztés-válasz kapcsolatukkal jellemzett rendszerek közül.

1.2-2.M. Megoldások

M-1. A (d) és az (e) által leírt rendszer nem lineáris (vagyis nemlineáris), a többi lineáris.

M-2. A (b) és a (c) által leírt rendszer nem invariáns (vagyis variáns), a többi invariáns.

M-3. Az (f) által leírt rendszer nem kauzális (vagyis akauzális), a többi kauzális.

M-4. A FI esetben az (a) és (b) által leírt rendszer nem GV stabilis, a többi GV stabilis. A DI esetben csak a (b) által leírt rendszer nem GV stabilis, a többi GV stabilis.

1.3. Hálózatok

Az 1. rész utolsó, 1.3. fejezetének 1.3-1. szakaszában megadjuk a hálózat definícióját, továbbá a hálózat és a rendszer kapcsolatát. Az 1.3-2. fejezetben részletesebben tárgyaljuk a jelfolyam hálózatokat és megemlítünk néhány további hálózat-típust is. Ez a fejezet nem tartalmaz feladatokat, azok a jelfolyam hálózatokkal foglalkozó fejezetek (például a 2.4. fejezet) végén, a részletes tárgyalás után találhatók.

1.3-1. A hálózat fogalma

1.3-1.1. Komponensek összekapcsolása

Gyakorlati szempontból egy *hálózat* egy fizikai mennyiségekkel leírható *objektum* egy *modellje*. Az objektum minden (figyelembe veendő) változójához a hálózat egy változóját rendeljük. A fizikai mennyiségek kapcsolatát a hálózati modellben vagy az összekapcsolási szabályokkal vagy a hálózati komponensekre jellemző szabályokkal írjuk le. Ezek a szabályok eltérőek a különféle hálózat-típusoknál, amint ezt a következő szakaszban még részletezzük.

Elméleti szempontból a hálózat önmagában is értelmezhető és ekkor a modellezendő objektumnak nincs jelentősége. Mivel a továbbiakban a modellezés - egyébként alapvető fontosságú - problémáival nem foglalkozunk, ezért a formális értelmezésre fektetjük a hangsúlyt.

A hálózat komponensek összekapcsolásából áll. Minden komponenshez egy vagy több változó rendelhető. A komponensek is és összekapcsolásuk módja is bizonyos kapcsolatokat jelentenek a változók között, amelyek többnyire egyenletekkel fejezhetők ki. Az ismert változók a gerjesztések, a bennünket érdeklő változók a válaszok.

A hálózatot leíró egyenletek rendszere olyan, hogy a független egyenletek maximális száma pontosan annyi, mint a bennük szereplő ismeretlen változók száma. Jó esélyünk van tehát arra, hogy az egyenletrendszer megoldásával a változók meghatározhatók, gyakran az egyértelműség is biztosított. További megfontolásokra van szükség, ha az egyenletrendszer nem megoldható vagy megoldása nem egyértelmű.

A komponensek összekapcsolása által meghatározott egyenletek lineáris algebrai egyenletek $+1$, -1 vagy 0 együtthatókkal. A komponensek által meghatározott egyenletek teljesen általánosak lehetnek; tartalmazhatnak összeadást, szorzást, hatványozást, időbeli eltolást, FI esetben differenciálást, integrálást. A továbbiakban (a 2.5. fejezet kivételével) arra az esetre szorítkozunk, amikor csak lineáris műveletek fordulnak elő.

1.3-1.2. A rendszer és a hálózat kapcsolata

A rendszer és a hálózat közötti különbség a következő.

A rendszerhez alapvetően csak kétféle változó van rendelve: az ismert gerjesztések és a keresett válaszok. Ezek a változók fellépnek a hálózatban is, de a hálózatban további változók is szerepelhetnek és többnyire szerepelnek is.

A gyakorlatban a rendszer és a hálózat közötti különbség nem mindig ennyire egyértelmű. Egyrészt rendszerhez gyakran további változókat (például állapotváltozókat) is rendelünk. Másrészt a rendszert néha részrendszerek összekapcsolásának tekintjük. Ekkor a rendszer és a hálózat közötti különbség elmosódik.

Egyes felfogások szerint hálózatról csak akkor beszélhetünk, ha komponensei előre meghatározottak és többnyire igen egyszerűek („elemiek”). Noha a továbbiakban tipikusan ilyen hálózatokkal fogunk foglalkozni, elvileg nem kell ehhez a megszorításhoz ragaszkodni.

Azt fogjuk mondani, hogy a hálózat akkor *reprezentál* vagy *realizál* egy rendszert, ha gerjesztés-válasz kapcsolataik megegyeznek.

A *hálózatanalízis* feladata a következő. Adott a hálózat, célunk a hálózat által reprezentált rendszer egy matematikai leírásának meghatározása.

A *hálózatszintézis* feladata a következő. Adott a rendszer valamilyen leírása (például a gerjesztés-válasz kapcsolata) és célunk egy vagy több olyan hálózat meghatározása, amely ezt a rendszert realizálja, vagyis amelynek a gerjesztés-válasz kapcsolata az adottal megegyezik. Többnyire előírtak a hálózat komponensei (például csak lineárisak lehetnek).

Ha el tudunk készíteni olyan fizikai komponenseket, amelyeknek kielégítően hasonló a viselkedése, mint a megfelelő hálózati komponenseknek, továbbá meg tudjuk valósítani az összekapcsolásokat is, akkor létre tudunk hozni egy objektumot, amely elvileg úgy fog működni, mint az eredetileg megadott rendszer. Kivitelezési bizonytalanságok miatt a működés többé-kevésbé eltérő lesz. A kivitelezés tárgyalása nem célunk.

1.3-2. Hálózatok néhány osztálya

1.3-2.1. Jelfolyam hálózatok

A továbbiakban csak egyetlen hálózattípussal, a jelfolyam hálózattal foglalkozunk részletesen. A jelfolyam hálózatot a továbbiakban többnyire röviden hálózatnak nevezzük.

Egy *jelfolyam hálózat* i -edik komponense P_i számú bemeneti pólussal és Q_i számú kimeneti pólussal rendelkezik.

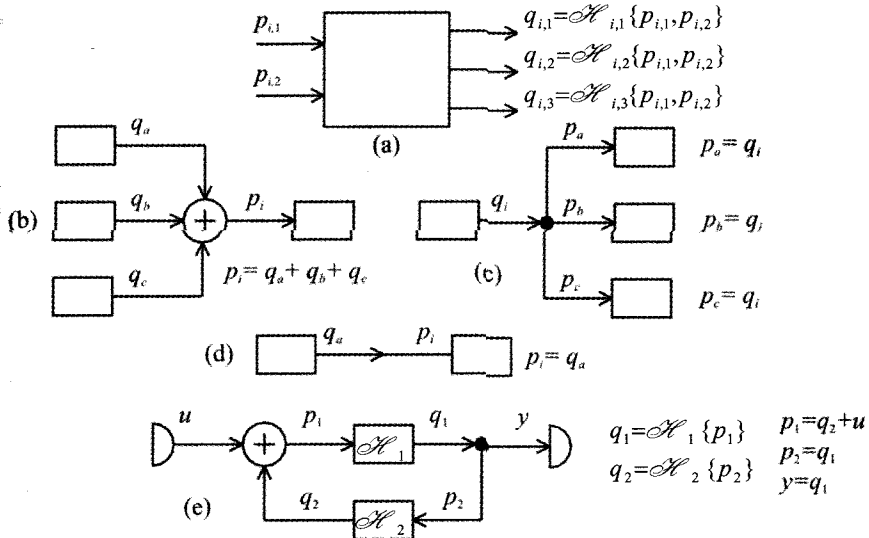
Mindegyik bemeneti pólushoz egy $p_{i,r}$ *bemeneti változó* ($r = 1, 2, \dots, P_i$) van rendelve és mindegyik kimeneti pólushoz egy $q_{i,r}$ *kimeneti változó* ($r = 1, 2, \dots, Q_i$) van rendelve. Az 1a ábra mutatja a komponens szimbólumát. Az i -edik komponens gerjesztés-válasz kapcsolatainak explicit alakja, vagyis a komponens *karakterisztikája*

$$q_{i,r} = \mathcal{H}_{i,r} \{p_{i,1}, p_{i,2}, \dots, p_{i,P_i}\}, \quad r = 1, 2, \dots, Q_i. \quad (1.3-1)$$

Mindegyik komponens egy rendszernek tekinthető. A $\mathcal{H}$ operátorok általában nem lineárisak. A komponensek többségének legfeljebb egy bemeneti és legfeljebb egy kimeneti változója van.

Kiemelünk két speciális komponenst. A *forrás* olyan komponens, amelynek nincs bemeneti változója és egyetlen kimeneti változója van ($P_i = 0, Q_i = 1$), karakterisztikája: $q_i = u_i$, ahol u_i adott jel. A *nyelő* olyan komponens, amelynek nincs kimeneti változója és egyetlen bemeneti változója van ($P_i = 1, Q_i = 0$), karakterisztikája: $p_i = y_i$, ahol y_i a keresett jel. Ez azt jelenti, hogy minden forrás egy gerjesztését, minden nyelő egy választát reprezentálja annak a rendszernek, amelyet a jelfolyam hálózat reprezentál.

A forrásra és a nyelőre speciális rajzjelek használatosak (1e ábra). Bizonyos „elemi” komponensekre (erősítő és integrátor illetve késleltető) is használatosak speciális rajzjelek. A részletesebb tárgyalás a 2.4-1. szakaszban található.



1.3-1. ábra. Jelfolyam hálózat ábrázolása. (a) Az i -edik komponens $P_i = 2$ bemeneti pólussal és változóval, $Q_i = 3$ kimeneti pólussal és változóval. (b) Összegező csomópont. (c) Szétágazó csomópont. (d) Egyszerű csomópont. (e) Egy-gerjesztésű, egy-válaszú rendszert reprezentáló egyszerű jelfolyam hálózat és a rá vonatkozó egyenletek.

Az összekapcsolási szabályok a következők.

Egy *összegező csomópontban* egyesíthető tetszőleges számú kimeneti pólus és egyetlen bemeneti pólus. Az egyetlen bemeneti pólushoz tartozó bemeneti változó azon kimeneti változók összege, amelyek a csomópontban egyesített kimeneti pólusokhoz vannak rendelve. Az 1b ábra jelöléseivel

$$p_i = q_a + q_b + \dots \quad (1.3-2)$$

Egy *szétágazó csomópontban* egyesíthető egyetlen kimeneti pólus és tetszőleges számú bemeneti pólus. Minden bemeneti pólushoz rendelt bemeneti változó megegyezik az egyetlen kimeneti pólushoz rendelt kimeneti változóval. Az 1c ábra jelöléseivel

$$p_a = q_i, \quad p_b = q_i, \dots \quad (1.3-3)$$

Ha csak egyetlen kimeneti és egyetlen bemeneti változó van egy csomópontban egyesítve, akkor ez az *egyszerű csomópont* tekinthető akár összegező, akár szétágazó csomópontnak. Az 1d ábrán látható módon az utóbbi a szokásosabb.

Az ábrázoláson látható nyilak az $ok \Rightarrow okozat$ irányt szemléltetik. Ez tekinthető a változók vagy jelek terjedési (folyam) irányának. Innen származik a „jelfolyam hálózat” elnevezés.

Megjegyezzük, hogy elegendő lenne egyféle csomópontot értelmezni. A kétféle csomópont bevezetését az indokolja, hogy fizikai változókra az egyik csomópont megvalósítása rendszerint egyszerű, míg a másiké jóval bonyolultabb lehet. Gondoljunk például arra, hogy miként lehetne sebességeket vagy elektromos feszültségeket összegezni, illetve erőket vagy elektromos áramokat szétágasztatni.

Az 1e ábrán egy egyszerű jelfolyam hálózat látható. Ez egyetlen forrást, egyetlen nyelőt, két egy-bemenetű egy-kimenetű komponenset, egy összegező és egy szétágazó csomópontot tartalmaz.

Jelfolyam hálózatokkal a 2.4-1. szakaszban foglalkozunk részletesen.

*1.3-2.3. Néhány további hálózattípus

Ebben a pontban megemlítünk néhány további hálózattípust és röviden ismertetjük alapvető sajátosságukat. A továbbiakban egyikkel sem foglalkozunk. A „hálózat” az alább felsoroltaknál általánosabb értelemben is használatos még a műszaki értelemben is (energia-elosztó hálózat, távközlési hálózat, számítógép hálózat, és így tovább).

Jelfolyam gráfok

A *jelfolyam gráf* komponensei a *csomópontok* és az *irányított ágak*. A p -edik csomóponthoz egy v_p változó van rendelve. A q -adik csomópontból induló és a p -edik csomópontban végződő ághoz egy $\mathcal{T}_{pq}$ operátor van rendelve. A p -edik csomóponthoz rendelt v_p változó azon $\mathcal{T}_{pq}\{v_q\}$ változók összege, amelyeket azon irányított ágak jelölnek ki, amelyek a q -adik csomópontból indulnak és a p -edik csomópontban végződnek. A hiányzó ágak nulla operátorú ágakként is értelmezhetők.

Egy lineáris rendszer jelfolyam gráffal is reprezentálható; ekkor a $\mathcal{T}_{pq}$ operátorok lineárisak. Nemlineáris rendszer reprezentálására a jelfolyam gráf csak speciális esetekben alkalmas.

Ez a hálózat-típus sok területen használatos, a jelfolyam gráf kevésbé különbözik a jelfolyam hálózattól.

Neurális hálózatok

A neurális hálózatok változói a csomópontokhoz vannak rendelve, komponensei a neuronok, amelyek nemlineáris jelátalakítók. A rendszer bemeneti változói valamilyen súlyozással a neuronoknak a bemeneti változói. A neuronok kimeneti változói lehetnek a rendszer kimeneti változói vagy valamilyen súlyozással más neuronok bemeneti változói.

A neurális hálózatok speciális struktúrájúak, amennyiben a neuronok rétegekbe vannak rendezve.

Az említett súlyok rendszerint nem adottak, hanem egy tanítási vagy tanulási folyamat eredményeként alakulnak ki.

Kirchhoff-hálózatok

A *Kirchhoff-hálózatok* kétpólusok összekapcsolásából állnak. Minden kétpólushoz egy változó-pár van rendelve: egyikük „átmenő” típusú (erő, hőáram, entrópia, elektromos áram), másikuk „átfogó” típusú (sebesség-különbség, hőmérséklet-különbség, potenciál-különbség), szorzatuk rendszerint teljesítményt jelent.

Mindegyik kétpólusú komponens egy karakterisztika jellemez, amely megadja a két változó kapcsolatát. A komponensek között csatolás is lehet, amikor a karakterisztikában a komponens két változóján kívül a vele csatolt kétpólusok változói is szerepelhetnek.

Tetszőleges számú pólus egy csomópontban egyesíthető. Az összekapcsolás által létrehozott kapcsolatokat Kirchhoff törvényei fejezik ki. Kirchhoff csomóponti törvénye értelmében egy csomópontban egyesített átmenő típusú változók összege nulla. Kirchhoff hurok-törvénye értelmében hurkot (zárt pályát) alkotó kétpólusok átfogó változóinak összege nulla. Az összegeзések során előjel szabályt is figyelembe kell venni. Kiválasztható a csomópontok és a hurkok egy-egy fundamentális rendszere, amely maximális számú lineárisan független egyenletet eredményez. A hurkokra vonatkozó egyenletek felírása megtakarítható, ha a csomópontokhoz vagy a hurkokhoz rendelt új változókat is bevezetünk.

A Kirchhoff-hálózatokat elektromágneses, hőtani és áramlástanai folyamatok valamint ezek kapcsolatának modellezésében használják elterjedten. Mind analízisük, mind szintézisük módszere részletesen kidolgozott.

Bond gráfok

A *bond gráfok* komponensei a „bondok” és a sokkapuk. A bondokat egy nyíllal (gyakran „félhegyű” nyíllal) szokás ábrázolni.

Minden bondhoz egy változó-pár van rendelve. A bond iránya valamilyen hatás, gyakran a teljesítményáram irányát is jelenti. Minden sokkapuba bizonyos számú bond befelé irányul, majd a sokkapu által meghatározott módon onnan más bondok kifelé irányulnak, tipikusan egy másik sokkapu felé. A sokkaput 0, 1 vagy egy betű jelöli.

A bond gráfokat technológiai folyamatok modellezésére használják. Ezek kevésbé elterjedtek mint az e szakaszban említett többi hálózat.

Logikai hálózatok

A logikai hálózatok logikai változók közötti kapcsolatokat szemléltetnek. A legegyszerűbb és leggyakrabban használt esetben a logikai változó értéke 0 vagy 1 lehet.

A logikai hálózatok komponensei a sokkapuk, amelyeknek egy vagy több bemeneti és egy vagy több kimeneti kapujuk van. Egy kimeneti kapuhoz rendelt változó értéke a bemeneti kapukhoz rendelt változók értéke által meghatározott. A legfontosabb műveleteket reprezentáló kapuknak külön nevük és rajzjelük van (például a logikai „negálás”, logikai „és”, logikai „vagy” kapcsolatokat reprezentáló kapuk).

A logikai hálózatok és az általuk reprezentált logikai rendszerek számításának és tervezésének módszere részletesen kidolgozott.

A logikai hálózatok matematikai leírásának és számításnak módszere eltér az előbb tárgyalt hálózatok leírásának és számításának módszerétől, fő matematikai apparátusa a kettes számrendszer és a Boole-algebra.

Hatásvázlatok, folyamatábrák

A hatásvázlat vagy folyamatábra bizonyos szempontból hasonló a jelfolyam gráfhoz, jelfolyam hálózathoz és a bond gráfhoz. Ezekről eltérően azonban célja nem egyenletekkel leírható összefüggések ábrázolása, hanem inkább logikai kapcsolatok kifejezése.

A hatásvázlatok és folyamatábrák elmélete és jelölésrendszere még egy szakterületen belül sem egységes.

Nem megyünk további részletekbe, mivel célunk csak annak illusztrálása volt, hogy az általunk a továbbiakban részletezendő jelfolyam hálózat csak egy lehetséges, de nem kizárólagos formája a rendszer hálózati reprezentációjának. Az általunk tárgyalandó rendszerek a jelfolyam hálózat mellett a jelfolyam gráffal reprezentálhatók kézenfekvő módon, míg például a logikai hálózatok más típusú rendszerek modellezésre alkalmasak.