1. Generáljunk véletlen elemekkel egy ilyen **P** mátrixot és egy véletlen nemnegatív **v** vektort (legyen $||\mathbf{v}||_1 = 1$)! Milyen pozitivitási osztályba tartozik a **P** mátrix (primitív, reducibilis, irreducibilis)?

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix}
0 & 0{,}3462 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6538 \\
0{,}4942 & 0 & 0{,}5058 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0{,}7791 & 0 & 0{,}2209 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0{,}7150 & 0 & 0{,}2850 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0{,}9037 & 0 & 0{,}0963 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}8909 & 0 & 0{,}1091 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3342 & 0 & 0{,}6658 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6987 & 0 & 0{,}3013 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}1978 & 0 & 0{,}8022 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}0305 & 0 & 0{,}9695 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7441 & 0 & 0{,}2559 \\
0{,}5000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5000 & 0
\end{bmatrix}$$

és a **v** sorvektor

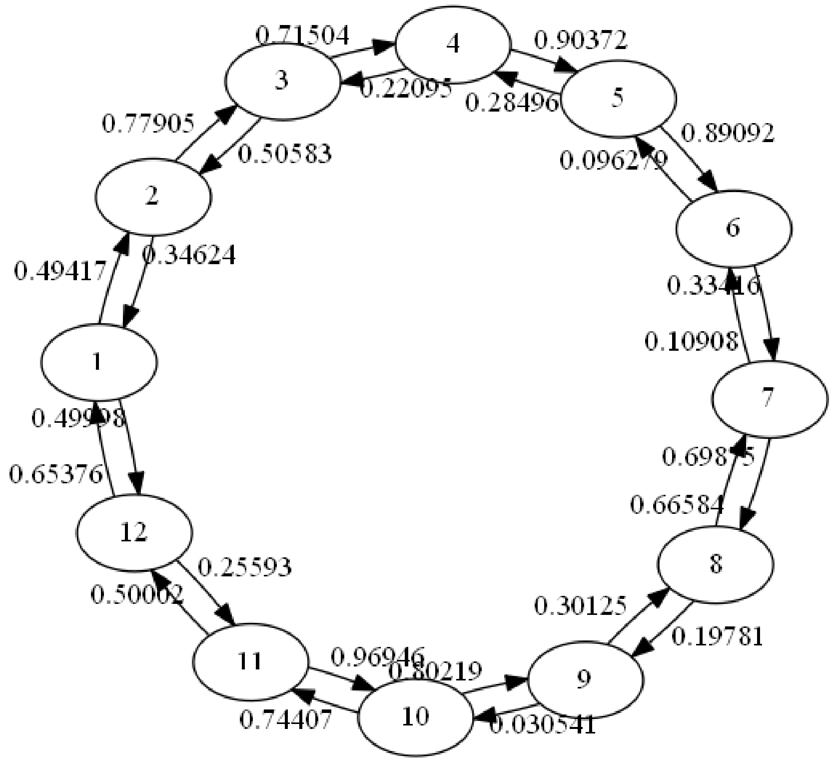
$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0{,}0718 & 0{,}1354 & 0{,}0913 & 0{,}0924 & 0{,}1286 & 0{,}1206 & 0{,}0863 & 0{,}0274 & 0{,}0359 & 0{,}1327 & 0{,}0043 & 0{,}0733 \end{bmatrix}.$$

A **P** mátrix **irreducibilis**, mivel nincsen olyan permutáció mátrix, amivel

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z} \end{bmatrix}$$

alakra hozható és így **nem reducibilis**. Ezenfelül még elmondható róla, hogy **nem primitív**, hiszen **P** főátlójában nincsen pozitív elem.

A mátrixot egy szomszédossági mátrixnak feltételezve és abból felrajzolva a gráfot, láthatjuk, hogy az erősen összefüggő, így a mátrix irreducibilis.



1. Ábra – *A szomszédossági mátrixból felrajzolt irányított gráf*

2. Vizsgáljuk meg a $\mathbf{vP^n}$ vektorok viselkedését, ha **n** tart végtelenhez! Létezik-e e vektorsorozatnak határértéke vagy torlódási pontja? Létezik-e a **v**,**vP**,...,$\mathbf{vP^{m-1}}$ vektorok átlagának határértéke? Mi ezek jelentése?

A $\mathbf{vP^n}$ vektorok viselkedését a **P** mátrix hatványozása során történő viselkedése határozza meg. A **P**-ről tudjuk, hogy sztochasztikus mátrix, így a domináns sajátértéke λ = 1. Ebből azt is tudjuk, hogy r = $\rho(\mathbf{P})$ = 1, tehát ekkora a spektrálsugara. Ha felírjuk a **P** sajátértékeit, akkor azt kapjuk, hogy két olyan sajátérték is van, amely a spektrálkörön helyezkedik el, így a **P** biztosan nem primitív. Ha nem primitív, akkor a Perron-Frobenius-tétel szerint nem létezik az r spektrálsugárhoz a következő határérték

$$\lim_{k \to \infty} \left(\frac{\mathbf{P}}{r}\right)^k = \frac{\mathbf{pq^T}}{\mathbf{q^T p}},$$

ahol **p** a jobb Perron-vektor és **q** a bal Perron-vektor. Ergo, a mátrix hatványozással nem torolódik be egy adott irányba. Ezt akkor is észrevehettük volna, ha a folyamatot egy Markov-láncként kezeljük és megnéztük volna az állapotok alkotta osztály periodicitását. Ha aperiodikus lett volna a lánc, akkor a fenti határérték létezett volna és a domináns sajátértékhez tartozó sajátaltér irányába konvergáltak volna a vektorok. De mivel most a lánc periódusa 2, ezért nem létezik ilyen egyetlen állandósult irány.

Viszont a vektorok átlagának határértéke már létezik

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\mathbf{v} + \mathbf{vP} + \ldots + \mathbf{vP^{m-1}}}{m}.$$

3. Mi történik a fenti értékekkel, ha a $\mathbf{p}_i$ valószínűségek egyike 0, egy másika 1, vagyis ha van olyan játékos, aki mindig jobbra, és olyan is, aki mindig balra adja a gyűrűt? Magyarázzuk meg az eredményeket.

Ekkor az fog történni, hogy sok idő elteltével a gyűrű csak néhány gyerek alkotta halmazban fog adogatódni, anélkül, hogy az egy, a halmazon kívüli gyerekhez kerülne.

4. Határozzuk meg **P** Perron-vektorait! Mi köze van az előző eredményeknek a Perron-vektorokhoz?
