Bevezetés a Számításelméletbe I.

2. ppZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. Mutassunk olyan 10 pontú összefüggő, egyszerű G gráfot, amihez úgy lehet egy élt hozzáadni az egyszerűség megtartásával, hogy a $\nu(G)$ és a $\rho(G)$ értéke is megváltozik ennek hatására.

   Gallai idevágó tétele szerint ha G-ben nincs izolált pont, akkor $\nu(G) + \rho(G) = |V(G)|$. (3 pont)
   Ennek megfelelően ha olyan 10 pontú gráfot találunk, aminek nincs izolált pontja, és amihez úgy lehet egy élt hozzáadni, hogy a $\nu(G)$ megváltozzon, akkor $\rho(G)$ is változni fog, tehát teljesülni fog a feladatban leírt tulajdonság. (3 pont)
   Ilyen gráf pl. a 10 pontú csillag (az a 10 csúcsú fa, aminek 9 levele van), mert ebben a gráfban $\nu = 1$, de tetszőleges újabb élt behúzva $\nu = 2$ lesz. (4 pont)

   Természetesen az is tökéletes megoldás, hogy egy konkrét gráfról és hozzáadott élről konkrétan megmutatjuk (Gallai nélkül), hogy a ν és a ρ is változik.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha G egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor G bármely G^* duálisának van olyan tartománya, amit legfeljebb 5 él határol.

   Tanították, hogy ha G egyszerű, síkbarajzolható és csúcsainak száma $n \geq 3$, akkor G-nek legfeljebb $3n - 6$ éle lehet. (2 pont)
   Ha G-nek legfeljebb két csúcsa van, akkor éleinek száma legfeljebb egy, ugyanennyi éle van tehát G^*-nak is, ezért G^* bármely lapjának határa legfeljebb két élből áll. (Hiszen az egyetlen él mindkét oldala határolhatja ugyanazt a lapot.) (1 pont)
   Ha pedig G-nek legalább 3 csúcsa van, akkor a G-beli csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese, tehát legfeljebb $6n - 12$. (1 pont)
   Ez azt jelenti, hogy G-nek van olyan csúcsa, ami legfeljebb ötödfokú, hiszen ha minden csúcsnak legalább 6 lenne a foka, akkor a fokszámösszeg legalább $6n$ lenne. (2 pont)
   Legyen v ilyen, legfeljebb 5-ödfokú csúcs G-ben. A v csúcs a G^* valamelyik tartományának belsejében van. Az ezen tartomány határoló G^*-beli élek éppen a v-ből induló G-beli éleknek felelnek meg, (3 pont)
   ezért ezt a tartományt legfeljebb 5 él határolja, mi pedig éppen egy ilyen létezését akartuk igazolni. (2 pont)

   Ha vki hivatkozza, hogy minden egyszerű sr gráfnak van legfeljebb 5-ödfokú csúcsa, azért is jár az 5 pont. Ha a $3n-6$-os felső becslés alapján jutunk erre, akkor vhogy el kell intézni a legeljebb 2 csúcsú gráfokat.

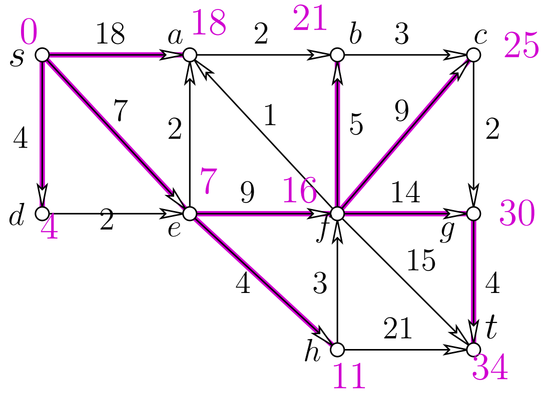
3. Tegyük fel, hogy G olyan $2n$ csúcsú páros gráf, aminek van teljes párosítása. Határozzuk meg a komplementergráf kromatikus számát, $\chi(\overline{G})$-t.

   A G gráf teljes párosítása n független élből áll, ezek szerint G mindkét színosztálya egyaránt n csúcsot tartalmaz. (2 pont)
   Ez azt jelenti, hogy a $\overline{G}$ komplementergráfban van n pontú klikk, (2 pont)
   így $\chi(\overline{G}) \geq \omega(\overline{G}) \geq n$ adódik a kromatikus számra. (2 pont)
   Azt fogjuk igazolni, hogy $\chi(\overline{G}) = n$, és ehhez elegendő megadnunk $\overline{G}$ csúcsainak egy n színnel történő kiszínezését. (2 pont)
   Vegyük észre, hogy ha a teljes párosítás minden egyes éléhez hozzárendelünk egy-egy különböző színt, és minden párosításél mindkét végpontját az élhez rendelt színre színezzük, akkor azonos színű csúcsok

nem lesznek szomszédosak $\overline{G}$-ben, továbbá éppen n színt használtunk fel a színezéshez. Nekünk pedig pontosan erre volt szükségünk. (2 pont)

4. Határozzuk meg az alábbi PERT probléma optimális ütemezése melletti kritikus tevékenységeket!

Az alábbi ábrán az órán tanult módszerrel $s, d, e, h, f, a, b, c, g, t$ sorrendben feldolgoztuk a gráf csúcsait, meghatároztuk az egyes tevékenységek legkorábbi kezdési időpontjait, és megjelöltük azokat az éleket, amik ezeket a legkorábbi időpontokat meghatározzák. (7 pont)



Azok a kritikus tevékenységek, amik rajta vannak a megjelölt élekből álló st úton, (1 pont)
konkrétan az s, e, f, g és t tevékenységek, (2 pont)
és 34 egységnyi idő kell a PERT feladataz optimális ütemezés melletti végrehajtásához. (0 pont)

5. Mutassuk meg, hogy ha egy G gráf néhány éle úgy van irányítva, hogy nem alkotnak irányított kört, akkor G a többi éle is megirányítható úgy, hogy a kapott irányított gráf aciklikus legyen.

Tekintsük a G csúcshalmazán az eredetileg megirányított élek alkotta D irányított gráfot. A feltétel szerint D-ben nincs irányított kör, tehát DAG. Az ilyen gráfokról pedig azt tanították, hogy van a csúcsaiknak topologikus sorrendje, aholis minden él a kisebb sorszámú csúcsból vezet a nagyobba. (4 pont)
Az a feladatunk, hogy a G eddig irányítatlan éleit is úgy irányítsuk, hogy DAG-ot kapjunk, tehát továbbra is legyen topologikus sorrend. (2 pont)
Erre alkalmas eljárás pl az, hogy a D topologikus sorrendje megmaradjon a megirányított G topologikus sorrendjének, azaz G minden élét úgy irányítjuk, hogy a kisebb sorszámú csúcsból a nagyobb sorszámúba vezessen. (4 pont)

6. A valós számokból álló $a_1, \ldots, a_n$ sorozat olyan, hogy az $a_1^3, a_2^3, \ldots, a_n^3$ sorozat egy darabig nő, utána csökken. Adjunk konstansszor n ĺosszehasonlítást használó algoritmust, ami rendezi az $a_1, \ldots, a_n$ sorozatot.

Mivel az $x \mapsto x^3$ szigorúan monoton növekedő függvény, ezért az $a_1, \ldots, a_n$ sorozatra is igaz, hogy egy darabig nő, utána csökken. (2 pont)
A két rendezett tömböt egy rendezett tömbbe összefésülő eljáráshoz hasonlóan dolgozunk, úgy hogy az egyik tömbnek az eredeti tömböt, a másiknak a hátulról olvasott eredeti tömböt tekintjük. (3 pont)
Konkrétan, először összehasonlítjuk az a_1 és a_n elemeket, a kisebb lesz a rendezett sorozat első eleme, és a következő összehasonlításban a szomszédját fogjuk összehasonlítan az előző összehasonlításban nagyobbnak bizonyult elemmel. Minden összehasonlításban a kisebbik elem lesz a rendezett sorozat következő eleme, a nagyobbik elem túlél, és részt vesz a következő összehasonlításban. Az eljárás akkor ér véget, ha az eredeti sorozat két szomszédos elemét hasonlítjuk össze, amikoris azokat a kapott sorrendnek megfelelően illesztjük a rendezett sorozat végére. (3 pont)
Mivel minden egyes összehasonlításkor legalább egy elem helyét megtudjuk, legfeljebb n összehasonlításra kerül sor. (2 pont)