Analízis A2 Minimum követelmények

Készítette: Tóth Dániel

1. Lineáris algebra

Def.: V vektortér, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$. $x_1, \ldots, x_n$ vektorok <u>lineárisan függetlenek</u>, ha $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$-ból következik, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Def.: Egy művelet <u>skaláris szorzat</u> ha $x,y \in V \Rightarrow <x,y> \in \mathbb{R}$(vagy $\mathbb{C}$) és teljesül rá, hogy

- $x,y,z \in V \Rightarrow <x+y,z> = <x,z> + <y,z>$
- $x,y \in V$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow <\lambda x,y> = \lambda \cdot <x,y>$ vagy $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow <\lambda x, y> = \bar{\lambda} <x,y>$
- $x,y \in V \Rightarrow <x,y> = \overline{<y,x>}$
- $x \in V \Rightarrow <x,x> \geq 0$ és $<x,x> = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $(0 \in V)$

Def.: V vektortér, $i \in I$: $x_i \in V$. $(x_i)_{i \in I}$ <u>bázis</u>, ha $(x_i)_{i \in I}$ lineárisan független de $\forall$ $u \in V$-re, $(x_i)_{i \in I}$ és u, már nem lineárisan független.

Def.: $(V; <\,,\,>)$ $(x_i)_{i \in I}$ bázis.

- Ortogonális bázis, ha $<e_i, e_j> = \begin{cases} 0 \; ha \; i \neq j \\ > 0 \; ha \; i = j \end{cases}$ tehát egymásra merőlegesek ($<e_i,e_j>=0$)
- Normált bázis, ha $\|e_i\| = 1$ tehát „hosszuk" 1 ($<e_i,e_i>=1$)
- <u>Ortonormált</u> bázis ha $<e_i, e_j> = \begin{cases} 0 \; ha \; i \neq j \\ 1 \; ha \; i = j \end{cases}$

Két vektor <u>vektoriális szorzása $\mathbb{R}^3$</u> térben: $a,b \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow a \times b = c$ ha

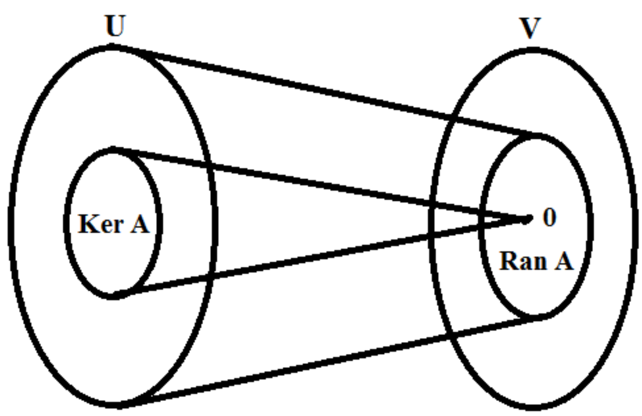
- $|c| = |a| \cdot |b| \cdot \sin \theta$ (c hossza egyenlő a, b hosszának és bezárt szögük szinuszának szorzatával)
- c állása olyan hogy mind a-ra mind b-re merőleges
- c iránya olyan hogy a,b és c jobbsodrású vektorrendszert alkot.

Def.: U és V vektorterek. $A: U \to V$ <u>leképezés lineáris</u> ha

- $x,y \in U \Rightarrow A(x+y) = Ax + Ay$
- $x \in U$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow A(\lambda x) = \lambda \cdot Ax$

Def.: $A: U \to V$ lineáris leképezés. Az A <u>magtere</u> $KerA := \{x \in U | Ax = 0\}$ (Az U azon elemei, amelyeket az A leképezés a V vektortér 0 elemébe viszi)

Def.: $A: U \to V$ lineáris leképezés. Az A <u>rangja</u>: $rankA := \dim Ran\ A$ Ahol Ran A az A leképezés értékkészlete (más néven képtér V-ben.)



Def.: A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ A <u>nyoma</u>: $\operatorname{Tr} A := \sum_{k=1}^{n} A_{kk}$

Pl.: $A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 4 & \boxed{5} & 6 \\ 7 & 8 & \boxed{9} \end{pmatrix} \Rightarrow$ TrA=15

Def.: A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ A <u>tranzponáltja</u>: $[A^T]_{kl} := A_{lk}$

Pl.: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

Def.: A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ A <u>adjungáltja</u>: $[A^*]_{kl} := \overline{A_{lk}}$

Pl.: $A = \begin{pmatrix} 3i & 1+2i \\ 4 & 5-4i \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} \overline{3i} & \overline{4} \\ \overline{1+2i} & \overline{5-4i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3i & 4 \\ 1-2i & 5+4i \end{pmatrix}$

Def.: A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertálható ha ∃ B: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ úgy hogy BA=AB=E. Ha invertálható, akkor A <u>inverze</u> A^{-1}.

Def.: σ: {1, …, n}→{1, …, n} permutáció ha bijekció (injektív és minden 1-től n-ig számhoz, minden 1-től n-ig számot hozzárendel).

Def.: Ha 1, …, i, i+1, …, n → 1, …, i+1, i, …, n (két permutáció csak egy cserében különbözik) akkor transzpozícióról beszélünk.

Def.: Minden permutáció felírható transzpozíciók szorzataként $\sigma = t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_k$ ekkor $(-1)^k$ értékét a permutáció indexének nevezzük.

Def.: $\varepsilon_{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)} := \begin{cases} \sigma \; permutáció \; indexe \\ 0, ha \; \sigma \; nem \; permutáció \end{cases}$

Pl.: $\varepsilon_{123} = 1$; $\varepsilon_{132} = -1$; $\varepsilon_{312} = 1$; $\varepsilon_{321} = -1$; $\varepsilon_{231} = 1$; $\varepsilon_{213} = -1$; $\varepsilon_{112} = 0$

Def.: Ha A n·n-es mátrix akkor A <u>determinánsa</u>

$$detA := \sum_{\sigma \epsilon permutáció(n)} \varepsilon_{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)} \cdot A_{1\sigma(1)} \cdot A_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot A_{n\sigma(n)}$$

Def.: A: V→V lineáris leképezés. λ∈ℝ (vagy ℂ) az A <u>sajátértéke</u>, ha ∃ v∈V v≠0 úgy hogy Av=λv. Ekkor v az A λ sajátértékhez tartozó <u>sajátvektora</u>.

2. Sorok

Def.: a: ℕ→ℝ/ℂ/(V; || ||) sorozat. Az a sorozatból képzett sor: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Az a sor n-edik részletösszege: $\alpha_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$. Ekkor a sorösszeg: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \alpha_n$.

Def.: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor <u>konvergens</u> ha $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = c$ valós szám, amely c számot a sor <u>határértékének</u> nevezzük. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor divergens ha $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergens.

Def.: a: ℕ→ℂ $\sum_n a_n$ sor <u>abszolút konvergens</u> ha $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$.

<u>Geometria sor:</u> $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ sor konvergens ha $|q| < 1$ és határértéke $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Harmonikus sor: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ sor divergens. (Bizonyítása integrál-kritériummal).

T.: Majoráns-minoráns kritérium: Végy két sorozatot melynek elemei pozitívak vagy nullák. a,b: $\mathbb{N}\to\mathbb{R}_0^+$.

- Ha $\forall n\in\mathbb{N}$-re $a_n\leq b_n$ és $\sum_{k=0}^{n} b_k < \infty$ akkor $\sum_{k=0}^{n} a_k < \infty$
- Ha $\forall n\in\mathbb{N}$-re $a_n\leq b_n$ és $\sum_{k=0}^{n} a_k = \infty$ akkor $\sum_{k=0}^{n} b_k = \infty$

T.: Cauchy-féle gyök kritérium: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} ha < 1\ akkor\ abszolut\ konvergens \\ ha > 1\ akkor\ divergens\ a\ sor \end{cases}$

T.: a: $\mathbb{N}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Ha $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = Q$ és $Q\in\mathbb{R}_0^+$ akkor $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = Q$. (A hányados kritérium azt mondja, hogy a képletből ugyanaz az eredmény fog kijönni, mint a gyök kritériumból, tehát itt is igaz, hogy azt kell vizsgálni, hogy Q kisebb vagy nagyobb, mint 1, viszont az is látszik, hogy a gyökkritérium erősebb.)

Def.: Ha T egy halmaz, és $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ számhoz rendelünk egy f_n: $T\to\mathbb{R}$ függvényt akkor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy függvénysorozat.

Def.: $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ f_n: $T\to\mathbb{R}$ pontonkénti határfüggvénye:
$f := \{t \in T | \forall\ n \in \mathbb{N}, t \in \mathrm{Dom} f_n és\ \exists \lim_{n\to\infty} f_n(t)\}$ ekkor $t\mapsto\lim_{n\to\infty} f_n(t)$. (Ha t benne van az értelmezési tartományban és a függvények t helyen felvett értékeiből előálló sorozatnak létezik határérték akkor ez az f határfüggvény legyen minden ilyen t pontban ez a határérték.)

Def.: T halmaz; $\forall$ $n\in\mathbb{N}$-hoz f_n: $T\to\mathbb{R}$; $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ és $A\subseteq T$. Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál f-hez ha $\forall$ $\varepsilon>0$-hoz $\exists$ $N\in\mathbb{N}$ melyre $\forall$ $n>N$ és $\forall$ $t\in A$-ra $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$.

Def.: Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens ha egyenletesen konvergál a $T=\mathrm{Dom}f=\mathrm{Dom}f_n$ halmazon. Jele: $f_n\rightrightarrows f$

Def.: Az a: $\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ sorozat által meghatározott hatványsor: $Pa(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k$

Def.: Az a: $\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugara:

$$Ra := \begin{cases} \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}\ ha\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \neq 0,\infty \\ \infty\ ha\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 0 \\ 0\ ha\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \infty \end{cases}$$

Def.: Ha $f\in R([0,2\pi], \mathbb{R})$ akkor $\big(F(f)\big)(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin kx$ az f függvény Fourier sora, ahol a Fourier együtthatók:

- $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$
- $a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$
- $b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$

3. Többváltozós függvények

Def.: $a \in \mathbb{R}^n$; $r>0$, ekkor $Br(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| < r\}$ az a pont körüli r sugarú nyílt gömb.

Def.: $A \subseteq \mathbb{R}^n$; $a \in \mathbb{R}^n$. a belső pontja A-nak, ha $\exists$ $r>0$ melyre $Br(a) \subseteq A$.

Def.: $A \subseteq \mathbb{R}^n$; $a \in \mathbb{R}^n$. a torlódási pontja A-nak, ha $\forall$ $r>0$-ra $Br(a) \setminus \{a\} \cap A \neq \varnothing$.

Def.: $A \subseteq \mathbb{R}^n$; $a \in \mathbb{R}^n$. a határpontja A-nak, ha $\forall$ $r>0$-ra $Br(a) \setminus \{a\} \cap A \neq \varnothing$ és $Br(a) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \varnothing$.

Def.: $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A nyílt, ha $\forall$ $a \in A$-hoz $\exists$ $r>0$ melyre $Br(a) \subseteq A$. (Minden pontja belső pont)

Def.: $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A zárt, ha $\mathbb{R}^n \setminus A$ nyílt.

Def.: $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A korlátos, ha $\exists$ $a \in A$ melyhez $\exists$ $r>0$ melyre $A \subseteq Br(a)$.

Def.: A kompakt, ha minden nyílt fedésének $\exists$ véges részbefedése.

Heine-Bovel tétel: Ha $A \subseteq \mathbb{R}^n$ akkor igaz az, hogy kompakt $\Leftrightarrow$ korlátos és zárt.

Def.: $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A halmaz belseje: $Int\ A := \{a \epsilon A \mid \exists\ r > 0\ Br(a) \subseteq A\}$ (Belsőpontok halmaza)

Def.: Az s: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens és konvergál x-hez ha $\forall$ $\varepsilon>0$-hoz $\exists$ $N \in \mathbb{N}$ melyre $\forall$ $n>N$ $\|s_n - x\| < \varepsilon$.

Def.: f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $a \in$Dom f. f folytonos a-ban ha $\forall$ $\varepsilon>0$-hoz $\exists$ $\delta>0$ hogy ha $\|x-a\| < \delta$ akkor $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. f folytonos, ha $\forall$ $a \in$Dom f-re folytonos.

Def.: f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; a torlódási pontja Dom f-nek; $A \in \mathbb{R}^m$. Az f határértéke a-ban A ha $\forall$ $\varepsilon>0$-hoz $\exists$ $\delta>0$ hogy ha $0 < \|x-a\| < \delta$ akkor $\|f(x) - A\| < \varepsilon$.

Def.: f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $a \in$Int Dom f; A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés. f deriváltja az a pontban A, ha $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)-A(x-a)}{\|x-a\|} = 0$. Jel: (Df)(a):=A.

Def.: f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Df: $\{a \in \mathbb{R}^n \mid$ ahol létezik a deriváltja$\} \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ vagyis Df olyan függvény, hogy $a \mapsto (Df)(a)$.

Def.: f függvény deriválható, ha Dom Df = Dom f.

Def.: f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $x=(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. f-nek x_k változó szerinti parciális deriváltja $a=(a_1, \dots, a_n)$ helyen $\frac{\partial f}{\partial x_k} = f'_{x_k} = \partial_k f = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_k + h, \dots a_n) - f(a_1, \dots a_n)}{h}$ ha $\exists$ és véges.

Def.: f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}^n$, f deriválható a-ban ekkor $(GRADf)(a) := \big((\partial_1 f)(a), \dots, (\partial_n f)(a)\big)$ n elemű vektor az f függvény gradiense a-ban.

Def.: f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $a \in \mathbb{R}^n$, f deriválható a-ban ekkor $(DIVf)(a) := \partial_1 f_1(a) + \partial_2 f_2(a) + \dots + \partial_n f_n(a)$ a függvény a helyen vett divergenciája. Ha f deriválható akkor f divergenciája: $DIVf := \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \dots + \partial_n f_n$.

Def.: f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $a \in \mathbb{R}^3$, f deriválható a-ban ekkor $(ROTf)(a) = \big((\partial_2 f_3)(a) - (\partial_3 f_2)(a),\ (\partial_3 f_1)(a) - (\partial_1 f_3)(a),\ (\partial_1 f_2)(a) - (\partial_2 f_1)(a)\big)$ 3 elemű vektor f rotációja a-ban. Ha f deriválható akkor f rotációja: $ROTf := det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}$.

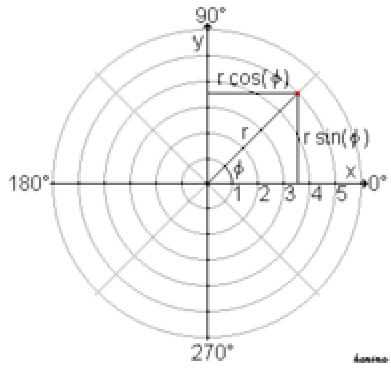
Def.: f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; f kétszer differenciálható ekkor f Laplace-operátora: $\Delta f := DIV\ GRAD\ f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Def.: f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $a \in \mathbb{R}^n$; $a \in$ Int Dom f; $e \in \mathbb{R}^n$ és $\|e\|=1$ ekkor $(DEf)(a) := \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te)-f(a)}{t}$ az f függvény a pontbeli e iránymenti deriváltja.

Polár koordináta-rendszer:

(x, y)→(r, φ)	(r, φ)→(x, y)
$x = r\cos\varphi$	$r = \sqrt{x^2+y^2}$
$y = r\sin\varphi$	$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

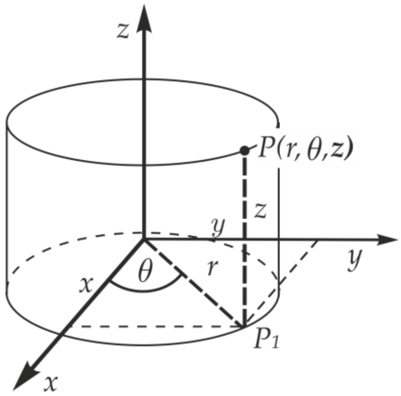
r∈[0,R]; φ∈[0,2π]; Jacobi-determináns: r



Hengerkoordináta-rendszer:

(x, y, z)→(r, φ, z)	(r, φ, z)→(x, y, z)
$x = r\cos\varphi$	$r = \sqrt{x^2+y^2}$
$y = r\sin\varphi$	$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$
z=z	z=z

r∈[0,R]; φ∈[0,2π]; z∈[-∞,∞] Jacobi-determináns: r



Gömbi koordináta-rendszer:

(x, y, z)→(r, φ, θ)	(r, φ, θ)→(x, y, z)
$x = r\cos\varphi\sin\theta$	$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$y = r\sin\varphi\sin\theta$	$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$
$z = r\cos\theta$	$\theta = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

r∈[0,R]; φ∈[0,2π]; θ∈[0,π[Jacobi-determináns: $r^2\sin\theta$