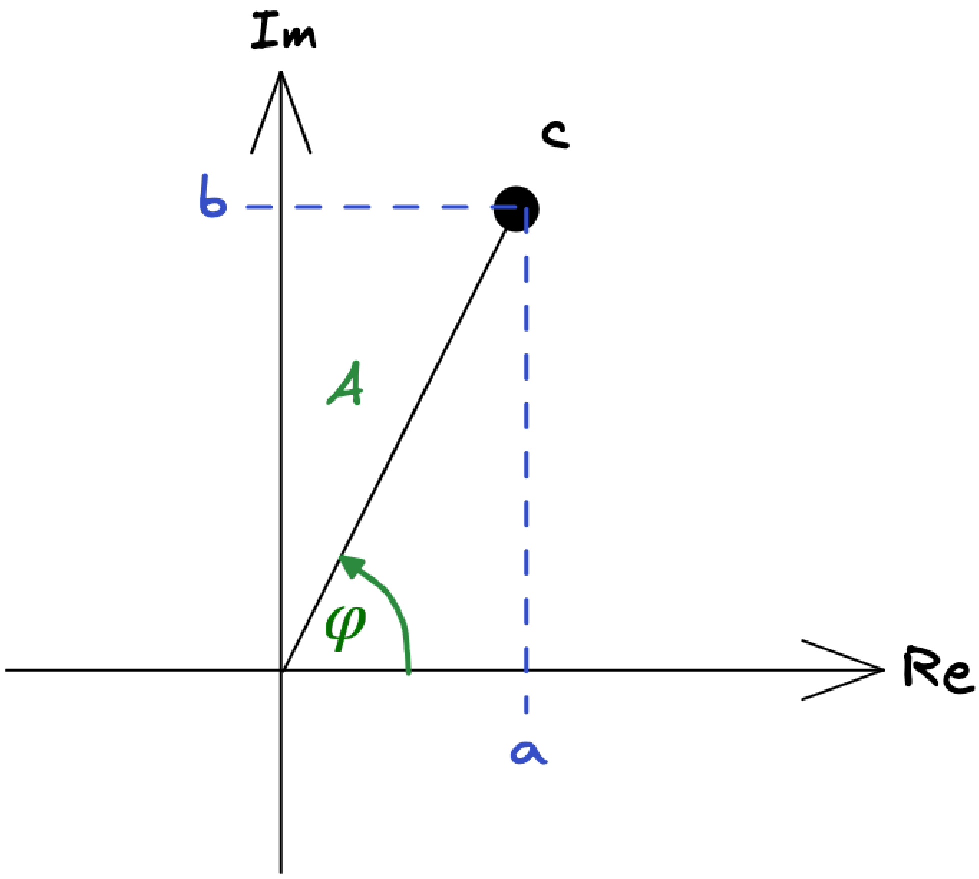
Jelek és jelfeldolgozás (BMEVIHVBB01)
1. gyakorlat

Szerkesztette: Dr. Horváth Bálint Péter, BME-HVT

2022.02.24.

1. Műveletek komplex számokkal



Komplex szám ábrázolása

- Algebrai, trigonometrikus, exponenciális (Euler) alak, átváltások

$$c = \underbrace{a + jb}_{\text{algebrai}} = \underbrace{A(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi))}_{\text{trigonometrikus}} = \underbrace{Ae^{j\varphi}}_{\text{exponenciális}}$$

$$j = \sqrt{-1}; \quad j^2 = -1; \quad jc = -b + ja$$
$$A = |c| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \arg(c) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$a = \Re(c) = A\cos(\varphi), \quad b = \Im(c) = A\sin(\varphi)$$

Konjugált:

$$c^* = \mathrm{conj}(c) = a - jb$$

$$|c|^2 = c \cdot c^* = (a + jb) \cdot (a - jb) = a^2 + b^2$$

- Euler azonosságok

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$$

- Komplex számok összeadása, kivonása (algebrai alak)

$$c_1 = a_1 + jb_1 = A_1 e^{j\varphi_1}; \quad c_2 = a_2 + jb_2 = A_2 e^{j\varphi_2}$$

$$c_3 = c_1 + c_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

- Komplex számok szorzása (exponenciális alak)

$$c_4 = c_1 \cdot c_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a2b_1)$$

$$c_4 = c_1 \cdot c_2 = A_1 e^{j\varphi_1} \cdot A_2 e^{j\varphi_2} = A_1 A_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

- Komplex számok osztása (exponenciális alak)

$$\begin{aligned} c_5 &= \frac{c_1}{c_2} = \frac{(a_1 + jb_1)}{(a_2 + jb_2)} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2^2 + b_2^2)} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{(a_2^2 + b_2^2)} + j\frac{(-a_1 b_2 + a_2 b_1)}{(a_2^2 + b_2^2)} \end{aligned}$$

Példák

A következőkben legyen $c_1 = 2 + j1$, $c_2 = 5 + j3$.

1.1. feladat

$$c_3 = c_1 + c_2$$

$$c_3 = (2 + j1) + (5 + j3) = 7 + j4$$

1.2. feladat

$$c_4 = c_1 \cdot c_2$$

$$A_1 = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \approx 2.24; \quad \varphi_1 = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.46 \text{ rad}$$

$$A_2 = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} \approx 5.83; \quad \varphi_2 = \arctan\left(\frac{3}{5}\right) \approx 0.54 \text{ rad}$$

$$c_1 = (2 + j1) = 2.24e^{j0.46}$$

$$c_2 = (5 + j3) = 5.83e^{j0.54}$$

$$c_4 = 2.24e^{j0.46} \cdot 5.83e^{j0.54} = 2.24 \cdot 5.83 \cdot e^{j(0.46+0.54)} = 13.04e^{j1.0}$$

Másik (kevésbé praktikus) módon ugyanarra az eredményre jutunk:

$$c_4 = (2 \cdot 5 - 1 \cdot 3) + j(2 \cdot 3 + 1 \cdot 5) = 7 + j11 = 13.04e^{j1.0}$$

1.3. feladat

$$c_5 = \frac{c_1}{c_2}$$

$$c_5 = \frac{2 + j1}{5 + j3} = \frac{2.24e^{j0.46}}{5.83e^{j0.54}} = \frac{2.24}{5.83}e^{j(0.46-0.54)} = 0.383e^{-j0.077}$$

Másik (kevésbé praktikus) módon ugyanarra az eredményre jutunk:

$$c_5 = \frac{10 + 3}{25 + 9} + j\frac{-6 + 5}{25 + 9} = \frac{13}{34} - j\frac{1}{34}(0.382 - j0.029) = 0.383e^{-j0.077}$$

2. Mértani sor összegzése

Ha $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{N} aq^k = a\left(\frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}\right)$$

Ha $|q| < 1$, akkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a\left(\frac{1}{1 - q}\right)$$

2.1. feladat

Határozzuk meg a $\sum_{k=0}^{4} 0,5^k$ eredményét.

$$0,5^0 + 0.5^1 + ... = 1 + 0.5 + 0.25 + 0.125 + 0.0625 = \frac{1 - 0,5^{4+1}}{1 - 0,5} = 1.9375$$

Látható hogy $N \to \infty$ esetén 2-höz tart.

2.2. feladat

Határozzuk meg a $\sum_{k=0}^{7}(-2)^k$ eredményét.

$$-2^0 + -2^1 + ... = 1 - 2 + 4 - 8 \pm ... = \frac{1-(-2)^{7+1}}{1-(-2)} = \frac{-255}{3} = -85$$

Látható hogy $N \to \infty$ esetén nem konvergál.

2.3. feladat

Határozzuk meg a $\sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot (0,3)^k$ eredményét.

$$5 \cdot \frac{1}{1-0,3} = \frac{5}{0,7} = 7,143$$

3. Függvények deriváltja

$f(t)$	$\frac{d}{dt}f(t) = f'(t)$
c	0
t	1
t^k	kt^{k-1}
$\sin(t)$	$\cos(t)$
$\cos(t)$	$-\sin(t)$
e^t	e^t

Láncszabály:

$$\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$$

Linearitás:

$$\frac{d}{dt}(F \cdot f(t) + G \cdot g(t)) = F \cdot f'(t) + G \cdot g'(t)$$

3.1. feladat

$$\frac{d}{dt}3t^2 = 3 \cdot 2t = 6t$$

3.2. feladat

$$\frac{d}{dt}2e^{-6t} = 2 \cdot (-6)e^{-6t} = -12e^{-6t}$$

3.3. feladat

$$\frac{d}{dt}(4e^{5t} + 3t^2) = 20e^{5t} + 6t$$

4. Függvények integrálja

Newton-Leibnitz formula:

$$\int_a^b f'(t)\,dt = [f(t)]_a^b = f(b) - f(a)$$

Linearitás

$$\int_a^b F \cdot f(t) + G \cdot g(t)\,dt = F \cdot \int_a^b f(t)\,dt + G \cdot \int_a^b g(t)\,dt$$

4.1. feladat

Határozzuk meg a $\int_0^\pi \sin(t)\,dt$ integrál értékét.

$$\int_0^\pi \sin(t)\,dt = [-\cos(t)]_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 1 + 1 = 2$$

4.2. feladat

Legyen $\alpha < 0$. Határozzuk meg a $\int_0^\infty e^{\alpha t}\,dt$ integrál értékét.

$$\int_0^\infty e^{\alpha t}\,dt = \left[\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\right]_0^\infty = \frac{e^{\alpha\cdot\infty} - e^{\alpha\cdot 0}}{\alpha} = \frac{0-1}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha}$$

4.3. feladat

Határozzuk meg a $\int_0^\pi e^{\frac{t}{\pi}} + \sin(t)\,dt$ integrál értékét.
Használjuk az előző feladatok eredményét úgy, hogy $\alpha = \frac{1}{\pi}$

$$\int_0^\pi e^{\frac{t}{\pi}} + \sin(t)\,dt = \int_0^\pi e^{\frac{t}{\pi}}\,dt + \int_0^\pi \sin(t)\,dt =$$

$$\left[\frac{e^{\frac{t}{\pi}}}{\frac{1}{\pi}}\right]_0^\pi + [-\cos(t)]_0^\pi = [\pi(e^1 - 1)] + [(1+1)] \approx 5,4 + 2 = \underline{\underline{7,4}}$$

5. Mátrixok sajátértékének kiszámítása

Az $\boldsymbol{A}$ mátrix sajátértéke általánosan az alábbi módon számítható:

$$\det\left(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}\right) = |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0,$$

ahol $\boldsymbol{I}$ egységmátrix. Az egyenlet megoldása(i) λ-ra adják a mátrix sajátértékeit.

5.1. Példa

Határozzuk meg az $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 11 & -4 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit.

$$\left| \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 11 & -4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 11 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-4-\lambda) - (-1)\cdot 11 =$$

$$\underbrace{\lambda^2 + 2\lambda + 3}_{\text{karakterisztikus polinom}} \quad \to \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot 3}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = -1 \pm j\sqrt{2}$$

5.2. Példa

Általánosan nem elvárt, de lássuk hogy nem lehetetlen 3×3-as mátrix sajátértékeinek meghatározása Határozzuk meg az $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(3-\lambda)-(9-\lambda) - 4\cdot 4] =$$

$$(2-\lambda)[(\lambda^2 - 12\lambda + 27) - 16] = \underbrace{(2-\lambda)}_{\lambda_1=2}\underbrace{(\lambda^2 - 12\lambda + 11)}_{\lambda_{2,3}=?}$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4\cdot 11}}{2} = 6 \pm 5 \to \lambda_2 = 11; \quad \lambda_3 = 1$$

Ezek alapján a karakterisztikus polinom gyöktényezős felbontása:

$$(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda) = (2-\lambda)(11-\lambda)(1-\lambda)$$