II. házi feladat : Diszkrét idejű hálózatok vizsgálata

Név	Tolnai Dániel Zoltán
Neptun kód	CRNRLU
Adatsor száma	8
Beadási határidő:	12. oktatási hét

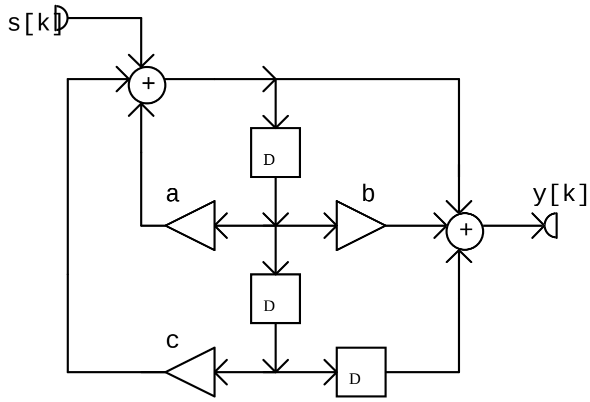
Megjegyzések: *Le kell töltenie a feladatlapot (a hálózat és a gerjesztőjel adataival együtt), továbbá a hálózat ábráját, és ezeket a megoldással együtt írásban kell benyújtani. Ha javítás, illetve részfeladat külön beadása miatt többször adja be a házi feladatot, minden alkalommal az előző részeket is* ***és a feladatlapot is be kell adni****. Javítás esetén a hibás részt kicserélni nem szabad még akkor sem, ha valamelyik feladat megoldását elölről kezdi. A javítást külön lapon kell mellékelni, megjelölve, melyik pont korrekciójáról van szó. Ügyeljen az áttekinthető és világos külalakra! A teljes megoldást minden esetben részletesen le kell írni,* ***nem elegendő a végeredményeket közölni****! A numerikus számításokra és az ábrák elkészítésére természetesen alkalmazhat számítógépi programokat (MATLAB, DERIVE stb.), de* ***a megoldás elvi lépéseit*** *ekkor is* ***részletesen*** *ismertetni kell.*

Gyakorlatvezető neve:

Javító véleménye (elfogadás, javítások):

A házi feladat egyes pontjai az alábbi hálózatra vonatkoznak. A hálózat paraméterei az ábra alatti táblázatból határozandók meg. A fejlécben található „*Adatsor száma*” mező jelöli ki a táblázat megfelelő sorát.

18.



Erõsítések

a	b	c
-1	0,9	0,5
0,9	-1	1,5
-0,9	0,5	0,4
-0,8	-0,6	0,6
-0,6	0,9	0,8
0,5	0,6	-0,8
1,5	0,4	2
-2,5	-0,4	0,9
-1,6	-0,6	0,5
-2,4	0,6	0,5

1.4.

F	G	p
1,5	-2	14/13
-2,5	1,5	-15/13
3	-2	15/13
2,5	-1	-16/13
-1,2	1,4	9/14
-2,5	3	-9/14
3	-2	11/14
-2	2,5	-11/14
3	-3	13/14
2	1,2	-13/14

2.2.

S	ϑ_0	ρ
2,8	0,13π	π/7
4	0,22π	π/6
5,5	π/11	0,2π
19	π/19	π/4
12	π/15	5π/6
11	π/21	-π/3
16	π/17	-π/6
18	0,19π	-π/4
17	0,12π	3π/8
13	0,28π	2π/5

2.3. s[k] értékei

k	0	1	2	3	4	5
	-2	2	4	7	-2	9
	-2	1	1	-2	2	6
	-2	-3	5	8	-4	3
	5	4	0	-1	4	7
	1	1	-2	-2	2	2
	-5	2	-2	5	-2	10
	-3	3	-4	2	2	-4
	10	2	-3	3	-2	-1
	2	5	-3	-3	2	2
	6	4	-2	1	-2	3

1. feladat: Vizsgálat az időtartományban

1.1 Határozza meg az ábrán vázolt diszkrét idejű hálózat állapotváltozós leírásának normál alakját!

1.2 Határozza meg a sajátértékeket! Döntse el, hogy stabilis-e a hálózat! Ha nem stabilis, változtasson meg erősítést (esetleg többet) úgy, hogy a hálózat stabilis legyen, majd oldja meg újra az 1.1 feladatot! A hálózaton végzett módosítással nem csökkentheti a hálózat rendjét, nem teheti triviálissá a hálózatot, és nem vehet fel további komponenst! Minden további feladatot az így stabilissá tett hálózaton végezzen el!

1.3 Az állapotváltozós leírás ismeretében számítsa ki és ábrázolja az impulzusválaszt a $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$ ütemre! Adja meg az impulzusválaszt analitikus alakban is!

1.4 A hálózat gerjesztése : $s[k] = \varepsilon[k](F + G \cdot p^k)$. Határozza meg a választ az impulzusválasz ismeretében a $k = 0, 1, \ldots, 5$ értékekre!

1.5 (Nem kötelező). Ellenőrizze a numerikus eredményeket az ANDI programmal!

2. feladat: Vizsgálat a frekvenciatartományban

2.1 Határozza meg a hálózat átviteli karakterisztikáját normálalakban a hálózatra felírt frekvenciatartománybeli egyenletek alapján! Adja meg és ábrázolja az amplitúdó karakterisztikát a $(-2\pi, 2\pi)$ tartományon!

2.2 Az $s[k] = S \cdot \cos(\vartheta_0 k + \rho)$ gerjesztőjel esetére határozza meg a válasz gerjesztett összetevőjének időfüggvényét! Ábrázolja az $s[k]$ és az $y_g[k]$ jeleket a $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$ értékekre! Vizsgálja meg, hogy periodikusak-e a jelek, és ha igen, adja meg a periódust! Mi a feltétele annak, hogy az $y_g[k]$ jelnek legyen fizikai tartalma?

2.3 Egy 6 periódusú és $s[k]$ gerjesztőjel egy periódusának értékei a mellékelt táblázatban adottak. Határozza meg ezen gerjesztőjel Fourier-sorának valós és komplex alakját, és ellenőrizze, hogy a Fourier-sorral számított értékek valóban az adott $s[k]$ értékeket szolgáltatják!

2.4 Határozza meg a fenti periodikus gerjesztéshez tartozó válasz gerjesztett összetevőjének valós alakú Fourier-sorát, adja meg és ábrázolja egy periódusának értékeit!

2.5 Az 1.3-ban kiszámított impulzusválasz Fourier transzformálásával határozza meg az impulzusválasz komplex spektrumát, és hozza azt polinom/polinom alakra! Vesse az eredményt össze 2.1 eredményével!

2.6 Az átviteli karakterisztika ismeretében írja fel a hálózat rendszeregyenletét!

2.7 (Nem kötelező) Ellenőrizze a 2.1 és a 2.2 pont eredményeit az ANDI programmal!

3. feladat: Vizsgálat a komplex frekvenciatartományban

3.1 Határozza meg a hálózat átviteli függvényét normálalakban a z tartománybeli egyenletek felírása vagy az állapotváltozós leírás alapján! Vesse össze az eredményt az átviteli karakterisztika kifejezésével!

3.2 Határozza meg az átviteli függvény zérusait és pólusait! Ábrázolja a pólus - zérus elrendezést! Vizsgálja meg ennek alapján a hálózat gerjesztés-válasz stabilitását!

3.3 Határozza meg az átviteli függvény alapján a hálózat impulzusválaszát analitikus alakban, és vesse össze az eredményt az 1.3-ban kapottal! Ellenőrizze az eredményt $k = 0, 1, \ldots, 5$-re polinom-osztáson alapuló inverz transzformációval!

3.4 Határozza meg a választ analitikus alakban, ha a gerjesztő jel: $s[k] = \varepsilon[k](F + G \cdot p^k)$!

3.5 Adjon meg egy olyan kanonikus hálózatot, amelynek a vizsgálttal megegyező az átviteli függvénye, és adja meg a hálózat rendszeregyenletét!

3.6 A rendszeregyenlet alapján a fokozatos behelyettesítés módszerével ellenőrizze a 3.4 feladat megoldását a $k = 0, 1, 2, \ldots, 8$ ütemre!

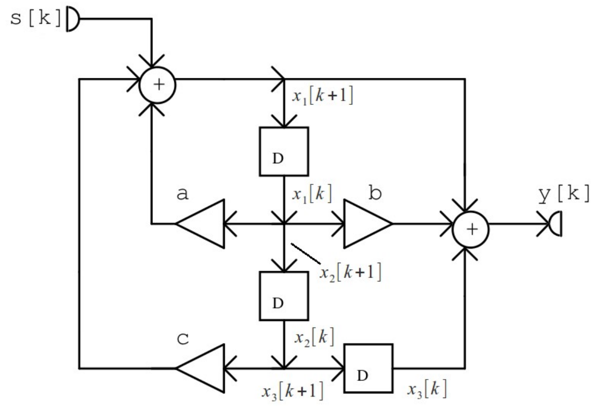
3.7 (Nem kötelező) Adjon meg egy olyan nem zérus gerjesztést, amelyhez tartozó válasz véges idejű! Adja meg a választ is!

3.8 (Nem kötelező) Az ANDI program felhasználásával ellenőrizze eredményeit!

A feladatok során minden számítást a MATLAB 7.12.0.635 (R2011a) 32 bites UNIX verziójával végeztem.

<u>1. feladat</u>

1.1 alfeladat



Az állapotváltozós leírás normál alakja:

$$\begin{aligned} \underline{x}[k+1] &= \underline{\underline{A}}\,\underline{x}[k] + \underline{B}u[k] \\ y[k] &= \underline{C}^T\underline{x}[k] + Du[k] \end{aligned}$$

A hálózati egyenletek:

$$\begin{aligned} x_1[k+1] &= a\cdot x_1[k]+c\cdot x_2[k]+0\cdot x_3[k]+1\cdot s[k] \\ x_2[k+1] &= 1\cdot x_1[k]+0\cdot x_2[k]+0\cdot x_3[k]+0\cdot s[k] \\ x_3[k+1] &= 0\cdot x_1[k]+1\cdot x_2[k]+0\cdot x_3[k]+0\cdot s[k] \\ y[k] &= (a+b)\cdot x_1[k]+c\cdot x_2[k]+1\cdot x_3[k]+1\cdot s[k] \end{aligned}$$

Helyettesítsük be az adatokat:

$$\begin{aligned} x_1[k+1] &= -2.5\cdot x_1[k]+0.9\cdot x_2[k]+1\cdot s[k] \\ x_2[k+1] &= 1\cdot x_1[k] \\ x_3[k+1] &= 1\cdot x_2[k] \\ y[k] &= -2.9\cdot x_1[k]+0.9\cdot x_2[k]+1\cdot x_3[k]+1\cdot s[k] \end{aligned}$$

, tehát: $\underline{\underline{A}}=\begin{pmatrix}-2.5 & 0.9 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $\underline{B}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\underline{C}^T=\begin{pmatrix}-2.9 & 0.9 & 1\end{pmatrix}$ $D=1$

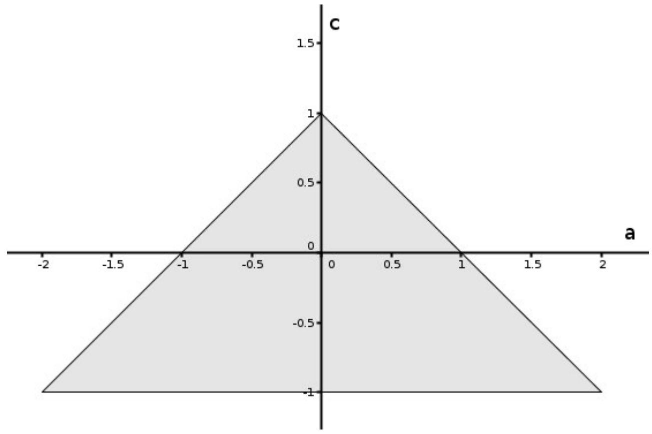
1.2 alfeladat

Számítsuk ki $\underline{\underline{A}}$ a sajátértékeit: $\lambda_1=-2.8192$, $\lambda_2=0.3192$, $\lambda_3=0$

A hálózat akkor stabilis, ha $|\lambda_i|<1\,,\forall i$.

Mivel $|\lambda_1|=|-2.8192|=2.8192\geq 1$, így a hálózat nem stabilis.

Tegyük stabilissá a hálózatot! Ez a hálózat stabilis, ha $\left|\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4c}}{-2}\right|<1$. Ábrázoljuk a feltételeket:



Ez alapján stabilis hálózathoz vezet, ha a és c erősítések értékét például a következőkre módosítjuk:

$a=-0.3$, $c=0.5$

Ekkor az állapotváltozós leírás normálakja így változik:

$\underline{\underline{A}}=\begin{pmatrix}-0.3 & 0.5 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $\underline{B}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\underline{C}^T=\begin{pmatrix}-0.7 & 0.5 & 1\end{pmatrix}$ $D=1$

Az új $\underline{\underline{A}}$ sajátértékei:

$\lambda_1=-0.8728$, $\lambda_2=0.5728$, $\lambda_3=0$

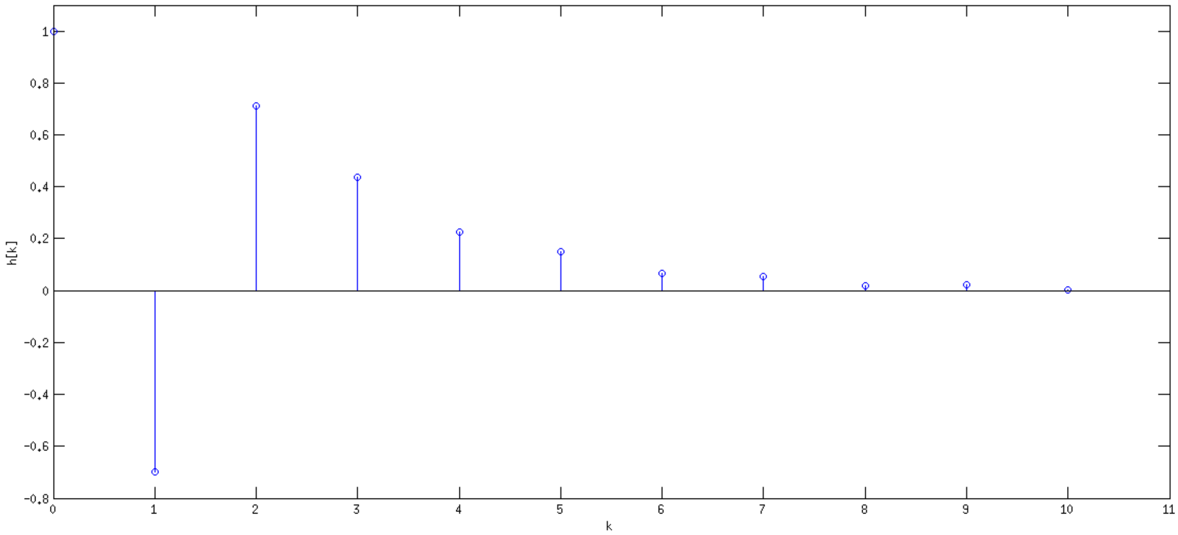
A hálózat így már stabilis: $|\lambda_1|=|-0.8728|<1$, $|\lambda_2|=|0.5728|<1$ és $|\lambda_3|=|0|<1$.

1.3 alfeladat

Impulzusválasz számítása

Az első 10 ütem lépésről-lépésre behelyettesítéssel, az állapotváltozós leírásból:

k	s[k]	$x_1[k]$	$x_2[k]$	$x_3[k]$	y[k]=h[k]
-1	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0	1	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000
1	0	1.0000	0.0000	0.0000	-0.7000
2	0	-0.3000	1.0000	0.0000	0.7100
3	0	0.5900	-0.3000	1.0000	0.4370
4	0	-0.3270	0.5900	-0.3000	0.2239
5	0	0.3931	-0.3270	0.5900	0.1513
6	0	-0.2814	0.3931	-0.3270	0.0666
7	0	0.2810	-0.2814	0.3931	0.0557
8	0	-0.2250	0.2810	-0.2814	0.0166
9	0	0.2080	-0.2250	0.2810	0.0229
10	0	-0.1749	0.2080	-0.2250	0.0014



Impulzusválasz analitikus alakjának meghatározása:

$h[k]=D\delta[k]+\epsilon[k-1]\left(K_1\lambda_1^{k-1}+K_2\lambda_2^{k-1}+K_3\lambda_3^{k-1}\right)$, ahol λ_i az $\underline{\underline{A}}$ $i.$ sajátértéke.

$K_i=\underline{C}^T\underline{\underline{L}}_i\underline{B}$, ahol $\underline{\underline{L}}_i$ az $i.$ Lagrange-mátrix: $\underline{\underline{L}}_i=\prod_{p=1,\,p\neq i}^{n}\frac{\underline{\underline{A}}-\lambda_p\underline{\underline{I}}}{\lambda_i-\lambda_p}$.

Ezekből: $K_1=0.024$, $K_2=1.276$, $K_3=-2.000$, tehát:

$$h[k]=1\cdot\delta[k]+\epsilon[k-1]\left(0.024\cdot(-0.8728)^{k-1}+1.276\cdot(0.5728)^{k-1}-2\cdot0^{k-1}\right)$$

Hasonlítsuk össze az analitikus alakkal kapott eredményeket a lépésről-lépésre való behelyettesítéssel kapott eredményekkel:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Lépésről-lépésre	1.0000	-0.7000	0.7100	0.4370	0.2239	0.1513	0.0666	0.0557	0.0166	0.0229	0.0014
Analitikus alakból	1.0000	-0.7000	0.7099	0.4369	0.2238	0.1513	0.0665	0.0557	0.0166	0.0229	0.0014

A két módszerrel kapott eredmény a vártaknak megfelelően közel megegyezik.

1.4 alfeladat

A gerjesztés: $s[k]=\epsilon[k](F+G\,p^k)$, tehát $s[k]=\epsilon[k]\left(-2+2.5\left(-\frac{11}{14}\right)^k\right)$

A gerjesztés értékei $k=0,1,\ldots,5$ értékekre:

k	0	1	2	3	4	5
s[k]	0.5000	-3.9643	-0.4566	-3.2126	-1.0472	-2.7486

A választ az impulzusválasz ismeretében diszkrét konvolúcióval határozhatjuk meg:
$y[k]=\sum_{i=-\infty}^{\infty} s[i]\cdot h[k-i]$. A rendszerünk kauzális, a jel belépő: $y[k]=\sum_{i=0}^{k} s[i]\cdot h[k-i]$

Így az eredményeket szorzással és összeadással kaphatjuk:

k	0	1	2	3	4	5
s[k]	0.5000	-3.9643	-0.4566	-3.2126	-1.0472	-2.7486
h[k]	1.0000	-0.7000	0.7099	0.4369	0.2238	0.1513

i/k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0.5000	-0.3500	0.3550	0.2185	0.1119	0.0757
1	0	-3.9643	2.7750	-2.8142	-1.7320	-0.8872
2	0	0	-0.4566	0.3196	-0.3242	-0.1995
3	0	0	0	-3.2126	2.2489	-2.2807
4	0	0	0	0	-1.0472	0.7330
5	0	0	0	0	0	-2.7486
y[k]	0.5000	-4.3143	2.6733	-5.4888	-0.7426	-5.3073

Tehát $y[k]$ a $k=0,1,\ldots,5$ értékekre:

k	0	1	2	3	4	5
y[k]	0.5000	-4.3143	2.6733	-5.4888	-0.7426	-5.3073

2. feladat
2.1 alfeladat

Írjuk fel az állapotváltozós leírást frekvenciatartományban:

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 e^{j\theta} &= -0.3\cdot\bar{X}_1+0.5\cdot\bar{X}_2+1\cdot\bar{S} \\ \bar{X}_2 e^{j\theta} &= 1\cdot\bar{X}_1 \\ \bar{X}_3 e^{j\theta} &= 1\cdot\bar{X}_2 \\ \bar{Y} &= -0.7\cdot\bar{X}_1+0.5\cdot\bar{X}_2+1\cdot\bar{X}_3+1\cdot\bar{S} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A}}=\begin{pmatrix} -0.3 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{B}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{C}^T=\begin{pmatrix} -0.7 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \quad D=1$$

Az átviteli karakterisztikát a következőképpen számolhatjuk: $H(e^{j\theta})=\frac{\bar{Y}}{\bar{S}}$

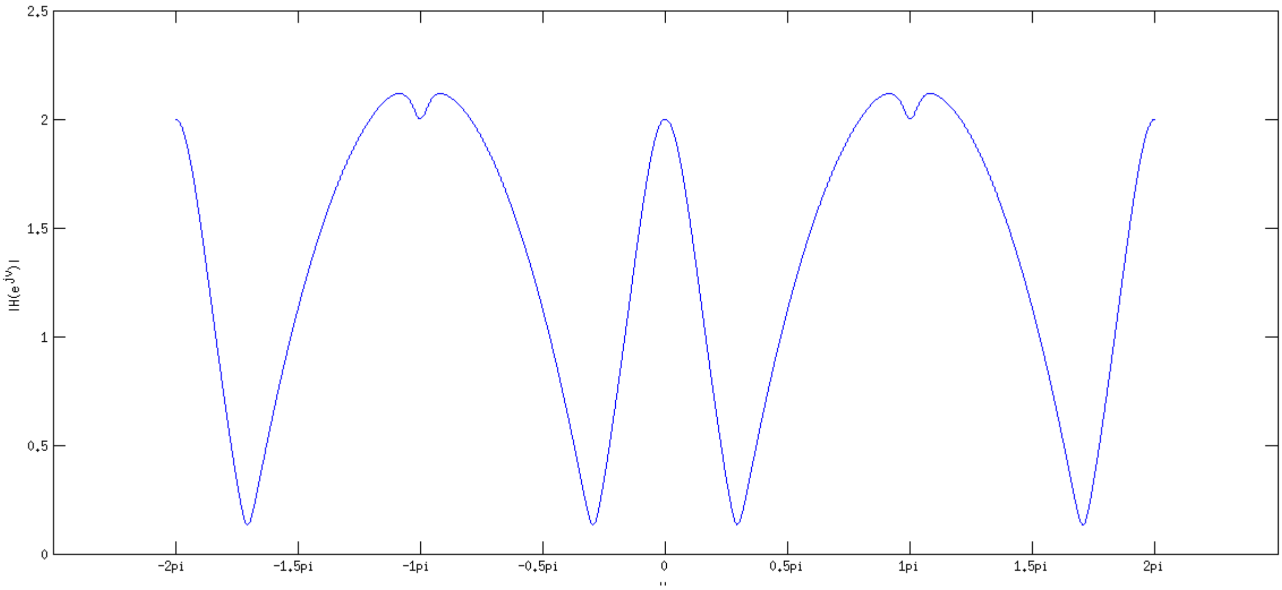
Megoldás MATLAB-bal:
>>[szam,nev] = ss2tf(A,B,C^T,D)
A parancs lefutása után "szam" és "nev" az átviteli karakterisztika számlálójának és a nevezőjének együtthatóit tartalmazza:

$$szam=\begin{pmatrix} 1 & -0.4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$nev=\begin{pmatrix} 1 & 0.3 & -0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

Az átviteli karakterisztika:

$$H(e^{j\theta})=\frac{\bar{Y}}{\bar{S}}=\frac{1-0.4\,e^{-j\theta}+1\,e^{-3j\theta}}{1+0.3\,e^{-j\theta}-0.5\,e^{-2j\theta}}$$

Amplitúdó karakterisztika $\left|H(e^{j\theta})\right|=\left|\frac{1-0.4\,e^{-j\theta}+1\,e^{-3j\theta}}{1+0.3\,e^{-j\theta}-0.5\,e^{-2j\theta}}\right|$ az $(-2\pi;2\pi)$ tartományon:



2.2 alfeladat

A gerjesztés: $s[k]=S\cdot\cos(\theta_0 k+\rho)$, tehát: $s[k]=18\cdot\cos\left(0.19\pi k-\frac{\pi}{4}\right)=18\cdot\cos(0.19\pi k-0.25\pi)$

A válasz $\bar{Y}=\bar{H}\cdot\bar{U}$ => $\bar{Y}=\bar{H}\cdot\bar{S}$

$\bar{S}=18e^{j0.25}$, $\bar{H}=H\left(e^{j0.25\pi}\right)=0.3406e^{-j1.7803}$

$\bar{Y}=\bar{H}\cdot\bar{S}=0.3406e^{-j1.7803}\cdot 18e^{j0.25}=6.1308e^{-j1.5303}$

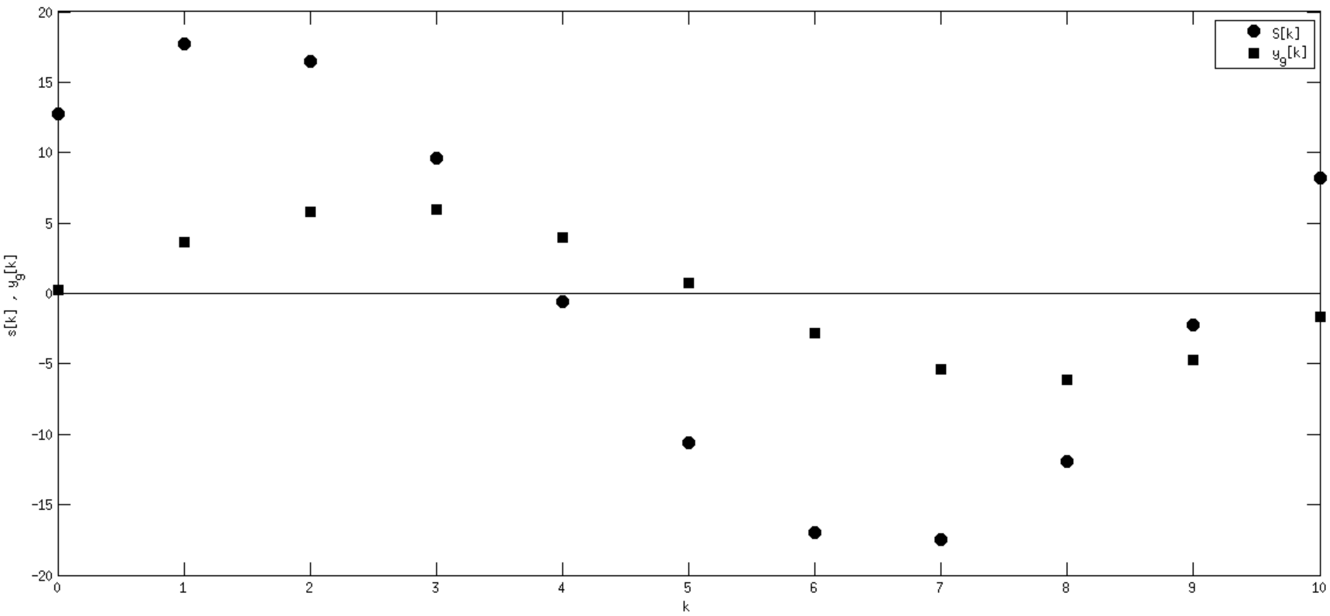
A válasz: $y_g[k]=6.1308\cos(0.19\pi k-1.5303)$

Egy jel akkor periodikus, ha a körfrekvencia $\theta=2\pi\frac{M}{L}$ alakjában M és L egész.

Itt: $\theta=0.19\pi=2\pi\frac{M}{L}$ => $0.095=\frac{M}{L}$ => $0.095=\frac{M}{L}$ => $M=19$, $L=200$, tehát a jelek periodikusak, ahol $L=200$ a periódus.

Az $y_g[k]$ jelnek van fizikai tartalma, mivel a rendszer gerjesztés-válasz stabilis.

Ábrázoljuk a jeleket:



2.3 alfeladat

k	0	1	2	3	4	5
s[k]	10	2	-3	3	-2	-1

Periódus: $L=6 \Rightarrow \theta_0=\frac{2\pi}{L} \Rightarrow \theta_0=\frac{\pi}{3}$

Az i. komplex Fourier-együttható: $\bar{S}_i=\frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} s[k]e^{-jik\theta_0}$

Számoljuk ki az együtthatókat MATLAB-bal:

```
>> for db=[1 2 3 4 5 6]
      for k=[1 2 3 4 5 6]
         a(db)=a(db)+(sk(k)*exp(-j*(k-1)*(db-1)*teta0));
      end
      a(db)=a(db)/6;
   end
>> a
```

Valós együtthatók kiszámítása: $S_i^A=2\Re\{\bar{S}_i^c\}$, $S_i^B=-2\Im\{\bar{S}_i^c\}$.

Komplex együtthatók:
$$\bar{S}_0=1.5$$
$$\bar{S}_1=1.6915e^{-j0.1715}$$
$$\bar{S}_2=2.5658e^{-j0.2270}$$
$$\bar{S}_3=0.1667$$
$$\bar{S}_4=2.5658e^{j0.2270}$$
$$\bar{S}_5=1.6915e^{j0.1715}$$

Valós együtthatók:

$S_0=$	3		
$S_1^A=$	3.3333	$S_1^B=$	0.5774
$S_2^A=$	5	$S_2^B=$	1.1547
$S_3^A=$	0.3333	$S_3^B=$	0
$S_4^A=$	5	$S_4^B=$	−1.1547
$S_5^A=$	3.3333	$S_5^B=$	−0.5774

Komplex alak: $s[k]=\sum_{i=0}^{L-1}\bar{S}_i e^{jki\theta_0}$

$$s[k]=1.5+1.6915e^{j(-0.1715+k\frac{\pi}{3})}+2.5658e^{j(-0.2270+k\frac{2\pi}{3})}+0.1667e^{jk\pi}+2.5658e^{j(0.2270+k\frac{4\pi}{3})}+1.6915e^{j(0.1715+k\frac{5\pi}{3})}$$

Ellenőrzés MATLAB-bal: (b a megadott s[k] értékeket tartalmazza a futás után)

```
>> for db=[1 2 3 4 5 6]
      for k=[1 2 3 4 5 6]
         b(db) = b(db) + a(k)*exp(j*(db-1)*(k-1)*teta0);
      end
   end
```

Valós alak: $s[k]=\sum_{i=0}^{L-1}\left(S_i^A\cos(i\theta_0 k)+S_i^B\sin(i\theta_0 k)\right)$

$$s[k]=3+3.3333\cos(k\frac{\pi}{3})+0.5774\sin(k\frac{\pi}{3})+5\cos(k\frac{2\pi}{3})+1.1547\sin(k\frac{2\pi}{3})+0.3333\cos(k\pi)$$

2.4 alfeladat

A periodikus gerjesztés:

k	0	1	2	3	4	5
s[k]	10	2	-3	3	-2	-1

A periodikus gerjesztés Fourier-sorának valós alakja:

$$s[k]=3+3.3333\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)+0.5774\sin\left(k\frac{\pi}{3}\right)+5\cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right)+1.1547\sin\left(k\frac{2\pi}{3}\right)+0.3333\cos(k\pi)$$

Az átviteli karakterisztika:

$$H\left(e^{j\theta}\right)=\frac{\bar{Y}}{\bar{S}}=\frac{1-0.4e^{-j\theta}+1e^{-3j\theta}}{1+0.3e^{-j\theta}-0.5e^{-2j\theta}}$$

Értékek a különböző frekvenciákon a számoláshoz:

θ_0	$\bar{H}\left(e^{j\theta}\right)$	$\bar{S}$	$\bar{Y}=\bar{H}\cdot\bar{S}$
0	2	1.5	3
$\frac{\pi}{3}$	$0.2836e^{j1.9713}$	3.3830	$0.9594e^{j1.9713}$
$\frac{2\pi}{3}$	$1.7132e^{j0.7182}$	5.1316	$8.7915e^{j0.7182}$
π	2	0.1667	0.3334

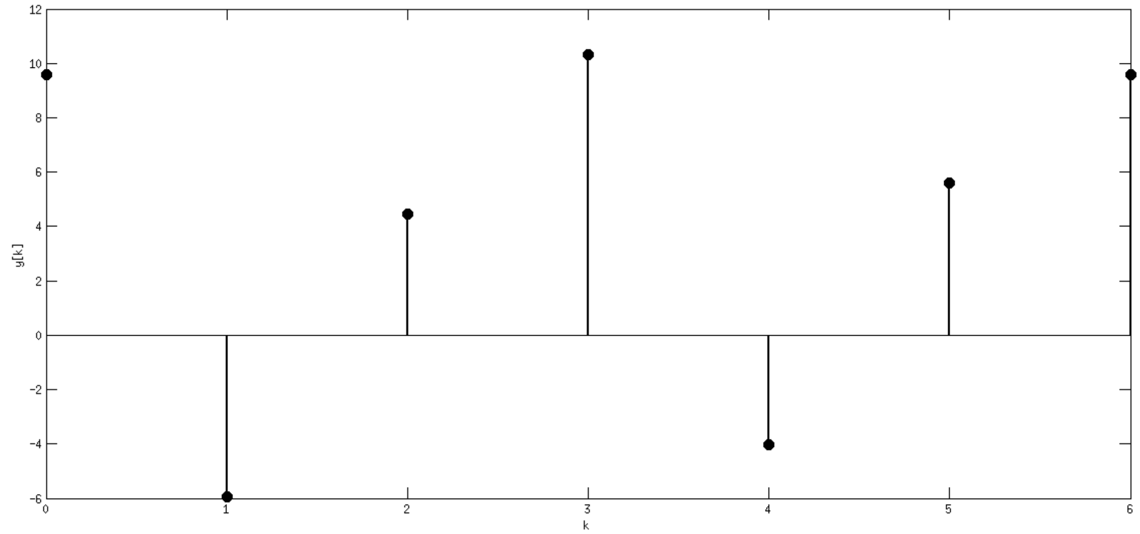
A válasz tehát:

$$y[k]=3+0.9594\cos\left(\frac{\pi}{3}k+1.9713\right)+8.7915\cos\left(\frac{2\pi}{3}k+0.7182\right)+0.3334$$

Egy periódus értékei:

$$y[k=0..6]=[9.5793\quad -5.9387\quad 4.4554\quad 10.3274\quad -4.0344\quad 5.6115\quad 9.5793]$$

Ábrázolva:



2.5 alfeladat
Az 1.3 feladatban kiszámított impulzusválasz:
$$h[k]=1\cdot\delta[k]+0.024\cdot\epsilon[k-1]\cdot(-0.8728)^{k-1}+1.276\cdot\epsilon[k-1]\cdot(0.5728)^{k-1}-2\cdot\epsilon[k-1]\cdot 0^{k-1}$$

Ismertek az alábbi Fourier-transzformáltak:
$$F\{\delta[k]\}=1 \quad \text{és} \quad F\{\epsilon[k-1]\,q^{k-1}\}=\frac{e^{-j\theta}}{1-q\,e^{-j\theta}}$$

Ezek alapján az impulzusválasz Fourier-transzformáltja:
$$F\{h[k]\}=1+\frac{0.024\,e^{-j\theta}}{1+0.8728\,e^{-j\theta}}+\frac{1.276\,e^{-j\theta}}{1-0.5728\,e^{-j\theta}}-\frac{2\,e^{-j\theta}}{1-0\,e^{-j\theta}}=1+\frac{e^{-3j\theta}+0.5\,e^{-2j\theta}-0.7\,e^{j\theta}}{1+0.3\,e^{-j\theta}-0.5\,e^{-2j\theta}}$$

$$F\{h[k]\}=\frac{1-0.4\,e^{-j\theta}+e^{-3j\theta}}{1+0.3\,e^{-j\theta}-0.5\,e^{-2j\theta}}=H\left(e^{j\theta}\right)$$

Az eredmény a vártnak megfelelően megegyezik a 2.1 feladatban kapott átviteli karakterisztikával.

2.6 alfeladat
Az átviteli karakterisztika:
$$H\left(e^{j\theta}\right)=\frac{\bar{Y}}{\bar{S}}=\frac{1-0.4\,e^{-j\theta}+1\,e^{-3j\theta}}{1+0.3\,e^{-j\theta}-0.5\,e^{-2j\theta}} \quad => \quad Y+Y\,0.3e^{-j\theta}-Y\,0.5\,e^{-2j\theta}=S-S\,0.4\,e^{-j\theta}+S\,e^{-3j\theta}$$

$e^{-nj\theta}$ n-el való időbeli eltolást jelent.

Tehát a hálózat rendszeregyenlete:
$$y[k]+0.3\,y[k-1]-0.5\,y[k-2]=s[k]-0.4\,s[k-1]+s[k-3]$$

3. feladat

3.1 alfeladat

Egyenletek:

$$\bar{X}_1 = -0.3 \cdot \bar{X}_1 z^{-1} + 0.5 \cdot \bar{X}_2 z^{-1} + 1 \cdot \bar{S} z^{-1}$$
$$\bar{X}_2 = 1 \cdot \bar{X}_1 z^{-1}$$
$$\bar{X}_3 = 1 \cdot \bar{X}_2 z^{-1}$$
$$\bar{Y} = -0.7 \cdot \bar{X}_1 z^{-1} + 0.5 \cdot \bar{X}_2 z^{-1} + 1 \cdot \bar{X}_3 z^{-1} + 1 \cdot \bar{S} z^{-1}$$

Ebből az átviteli karakterisztika: $H(z) = \frac{\bar{Y}}{\bar{S}} = \frac{1 - 0.4 z^{-1} + 1 z^{-3}}{1 + 0.3 z^{-1} - 0.5 z^{-2}}$

$H(z) = H(e^{j\theta})|_{e^{j\theta}=z}$, mivel a rendszer kauzális.

3.2 alfeladat

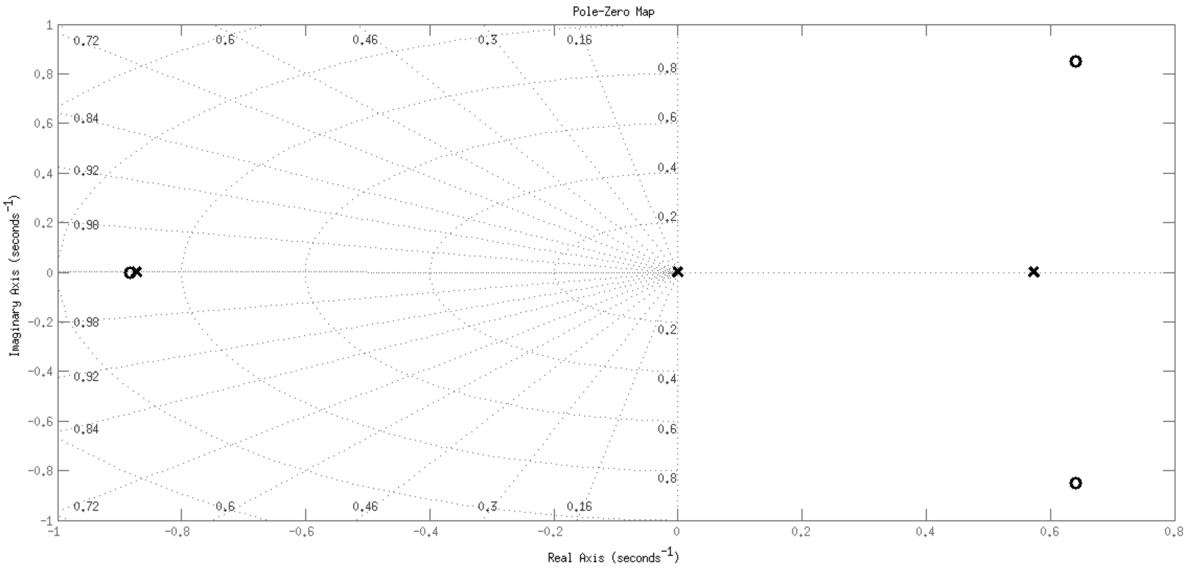
Pólus, ahol a nevező 0, a függvény végtelenbe tart:

$1 + 0.3 z^{-1} - 0.5 z^{-2} = 0$ => $q_1 = 0$, $q_2 = -0.8728$, $q_3 = 0.5728$

Zérus, ahol a számláló 0, a függvény 0:

$1 - 0.4 z^{-1} + 1 z^{-3} = 0$ => $p_1 = 0.6414 + j0.8492$, $p_2 = 0.6414 - j0.8492$, $p_3 = -0.8829$

A rendszer G-V stabilis, mivel minden pólus az egységkörön belül helyezkedik el.



3.3 alfeladat

$$H(z)=\frac{1-0.4z^{-1}+1z^{-3}}{1+0.3z^{-1}-0.5z^{-2}}=\frac{z^3-0.4z^2+1}{z^3+0.3z^2-0.5z}$$

Parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{z^3-0.4z^2+1}{z^3+0.3z^2-0.5z}=\left(\frac{-2}{z-0}+\frac{1.2760}{z-0.5728}+\frac{0.0240}{z+0.8728}\right)zz^{-1}+1$$

Ezt már tudjuk inverz z-transzformálni:

$$h[k]=\delta[k]+\epsilon[k-1]\left(0.024\cdot(-0.8728)^{k-1}+1.276\cdot(0.5728)^{k-1}-2\cdot 0^{k-1}\right)$$

Eredmény az 1.3 feladatból:

$$h[k]=1\cdot\delta[k]+\epsilon[k-1](0.024\cdot(-0.8728)^{k-1}+1.276\cdot(0.5728)^{k-1}-2\cdot 0^{k-1})$$

A két eredmény megegyezik.

Ellenőrzés polinomosztással:

$$\left(1-0.4z^{-1}+1z^{-3}\right):\left(1+0.3z^{-1}-0.5z^{-2}\right)=1-0.7z^{-1}+0.71z^{-2}+0.437z^{-3}+0.2039z^{-4}+0.15733z^{-5}$$

Inverz z-transzformáció:

$$h[k]=1\cdot\delta[k]-0.7\cdot\delta[k-1]+0.71\cdot\delta[k-2]+0.437\cdot\delta[k-3]+0.2039\cdot\delta[k-4]+0.15733\cdot\delta[k-5]$$

Eredmények összehasonlítása:

k	0	1	2	3	4	5
Analitikus alakból	1.0000	-0.7000	0.7099	0.4369	0.2238	0.1513
Polinomosztással	1.0000	-0.7000	0.7100	0.4370	0.2039	0.1573

3.4 alfeladat

A gerjesztés: $s[k]=\epsilon[k](F+Gp^k)$, tehát $s[k]=\epsilon[k]\left(-2+2.5\left(-\frac{11}{14}\right)^k\right)$

Z-transzformáljuk a gerjesztést: $S(z)=\frac{-2z}{z-1}+\frac{2.5z}{z+\frac{11}{14}}=\frac{0.5z^2-4.0714z}{z^2-0.2143z-0.7857}$

Az átviteli függvény: $H(z)=\frac{1-0.4z^{-1}+1z^{-3}}{1+0.3z^{-1}-0.5z^{-2}}=\frac{z^3-0.4z^2+1}{z^3+0.3z^2-0.5z}$

$$Y(z)=H(z)\cdot S(z)=\frac{z^3-0.4z^2+1}{z^3+0.3z^2-0.5z}\cdot\frac{0.5z^2-4.0714z}{z^2-0.2143z-0.7857}$$

$$Y(z)=\frac{0.5000z^4-4.2714z^3+1.6286z^2+0.5000z-4.0714}{1.0000z^4+0.0857z^3-1.3500z^2-0.1286z+0.3928}$$

Parciális törtekre bontjuk:

$$Y(z)=\left(\frac{-3.9986}{z-1.0001}+\frac{0.5715}{z-(-0.8729)}+\frac{-5.6534}{z-(-0.7856)}+\frac{4.7662}{z-0.5728}\right)zz^{-1}+0.5$$

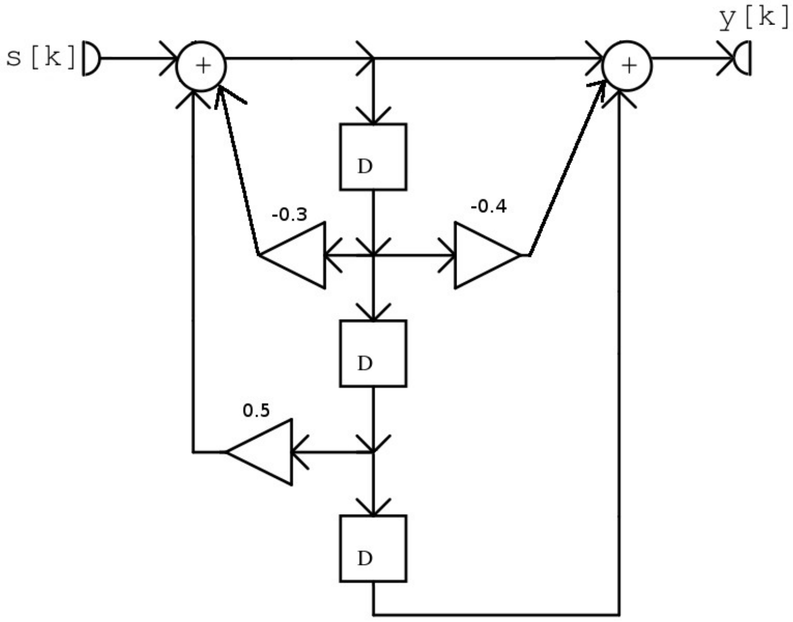
Inverz z-transzformációval kapjuk a válasz analitikus alakját:

$$y[k]=0.5\delta[k]+\epsilon[k-1]\left(-3.9986\cdot(1.0001)^{k-1}+0.5715\cdot(-0.8729)^{k-1}-\right.$$
$$\left.-5.6534\cdot(-0.7856)^{k-1}+4.7662\cdot(0.5728)^{k-1}\right)$$

3.5 alfeladat

$$H(z)=\frac{1-0.4\,z^{-1}+1\,z^{-3}}{1+0.3\,z^{-1}-0.5\,z^{-2}}$$

A feladatul kapott hálózat kanonikus hálózat, elég csupán az elrendezésen változtatni, hogy ez látszódjon:



A rendszeregyenlet:

$$y[k]=s[k]-0.4s[k-1]+s[k-3]-0.3\,y[k-1]+0.5\,y[k-2]$$

3.6 alfeladat

A gerjesztés: $s[k]=\epsilon[k](F+G\,p^k)$, tehát $s[k]=\epsilon[k]\left(-2+2.5\cdot(-0.7857)^k\right)$

A rendszeregyenlet a 3.5 feladatból:

$$y[k]=s[k]-0.4s[k-1]+s[k-3]-0.3\,y[k-1]+0.5\,y[k-2]$$

A válasz analitikus alakja a 3.4 feladatból:

$$y[k]=0.5\,\delta[k]+\epsilon[k-1]\left(-3.9986\cdot(1.0001)^{k-1}+0.5715\cdot(-0.8729)^{k-1}-\right.$$
$$\left.-5.6534\cdot(-0.7856)^{k-1}+4.7662\cdot(0.5728)^{k-1}\right)$$

A válasz a két számítási mód alapján az első nyolc ütemre:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
s[k]	0.5000	-3.9643	-0.4566	-3.2126	-1.0472	-2.7486	-1.4118	-2.4622	-1.6369
y[k] (3.4)	0.5000	-4.3143	2.6735	-5.4892	-0.7431	-5.3087	-2.3047	-4.9088	-3.0816
y[k] (3.6)	0.5000	-4.3143	2.6734	-5.4891	-0.7430	-5.3080	-2.3041	-4.9075	-3.0804

Az eredmények közel megegyeznek, így a megoldás az ellenőrzés során helyesnek bizonyult.