



BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
VILLAMOSMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR

JELEK ÉS RENDSZEREK
MÉRÉSTECHNIKÁJA I.

A méréselmélet alapjai

Főszerkesztő:
Schnell László

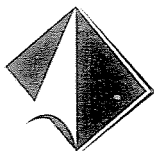
Műegyetemi Kiadó

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
VILLAMOSMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR

JELEK ÉS RENDSZEREK MÉRÉSTECHNIKÁJA I.

A méréselmélet alapjai

Főszerkesztő:
Schnell László



Műegyetemi Kiadó, 1998.

BME – OMIKK



K223696

Szerzők:

Dr. Blahó Gábor
okl. villamosmérnök
23. fejezet

Dr. Dobrowieczki Tadeusz
okl. villamosmérnök
a műsz. tud. kandidátusa
5. fejezet

Dr. Hainzmann János
okl. villamosmérnök
8.4., 9.3. és 9.4. szakaszok

Hanák Péter
okl. villamosmérnök
16. fejezet

Horváth Gábor
okl. villamos mérnök
3. fejezet

Dr. Kiss Ernő
okl. villamosmérnök
13. fejezet

Kollár István
okl. villamosmérnök
24. fejezet

Dr. Korányi Gyula
okl. villamosmérnök
22. fejezet

Dr. Osváth Péter
okl. villamosmérnök
25. fejezet

Dr. Papp Zoltán
okl. villamosmérnök
17. fejezet

Dr. Pataki Péter
okl. villamosmérnök
21. fejezet

Dr. Péceli Gábor
okl. villamosmérnök
2. fejezet, 10.1. és 10.2. szakaszok

Dr. Schnell László
okl. gépészmérnök
a műsz. tud. doktora
18. fejezet

Dr. Selényi Endre
okl. villamosmérnök
a műsz. tud. kandidátusa
6., 7. és 14. fejezetek

Steiner László
okl. villamosmérnök
20. fejezet

Dr. Szenn Ottó
okl. villamos mérnök
15. fejezet

Dr. Sztipánovits János
okl. villamosmérnök
a műsz. tud. kandidátusa
1. és 4. fejezetek

Dr. Telkes Béla
okl. villamosmérnök
a műsz. tud. kandidátusa
9.1. és 9.2. szakaszok

Dr. Varga Sándor
okl. villamosmérnök
8.1., 8.2., 8.3., 10.3. és 11.2. szakaszok

Dr. Zoltai József
okl. villamosmérnök
11.1. szakasz és 12. fejezet

Dr. Zoltán István
okl. villamosmérnök
19. fejezet

Szakmailag ellenőrizte:

Dr. Herpy Miklós
okl. villamosmérnök
a műsz. tud. kandidátusa

Azonosító: **51435**

(Második kiadás)

A Budapesti Műszaki Egyetem Villamosmérnöki és Informatikai Kar
megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó.

Felelős vezető: Veress János

Terjedelem: 30,5 (A/5) ív

Készült az AGRÁRSZÖVETKEZET, Magyaralmás

Nyomdaipari Önelszámoló részlegében

Felelős vezető: Frigy Ottóné

Munkaszám: 98 - 0028



Tartalomjegyzék

ELSŐ RÉSZ. MÉRÉSELMÉLET

1.	Mérés és modellezés	23
1.1.	Modell és modellezés	23
1.1.1.	A modell fogalma, a modellezés feladata	24
1.1.2.	A modellek típusai	25
1.1.3.	A modellezés alapfogalmai	27
1.1.4.	A modellezés módszerei	29
1.1.5.	A modellalkotás lépései	30
1.2.	A mérés alapfogalmai	31
1.2.1.	A mérés és modellezés kapcsolata	32
1.2.2.	A mérés alapfogalmainak értelmezése	33
1.2.3.	A mérés alapvető aspektusai	35
1.3.	A mérési eljárások jellemzői	36
1.3.1.	A mérési eljárás optimalitása	36
1.3.2.	A mérési eljárások alapstruktúrái	38
1.3.3.	A mérési eljárások típusai	40
2.	Jelek és rendszerek	42
2.1.	Bevezetés	43
2.1.1.	A jel és a rendszer fogalma	43
2.1.2.	Jel- és rendszermodellek	44
2.2.	Jelek alapvető leírási módjai	48
2.2.1.	Időben folytonos jelek leírása	49
2.2.2.	Időben diszkrét jelek leírása	57
2.2.3.	Kapcsolat a diszkrét idejű és a folytonos idejű jelábrázolás között	63
2.2.4.	Sztocasztikus folyamatok leírása	66
2.3.	Jelek ábrázolása jelterekben	80
2.3.1.	A jelterek tulajdonságai	81
2.3.2.	Jelek diszkrét reprezentációja jelterekben	87
2.3.3.	Jelek folytonos reprezentációja jelterekben	96
2.3.4.	A diszkrét és a folytonos jelábrázolás kapcsolata	97
2.3.5.	A jelterek felépítése sztochasztikus jelek esetén	100

2.3.6.	Sztochasztikus jelek reprezentációja jelterekben	101
2.4.	A jelábrázolás és a jelfeldolgozás kapcsolata	105
2.5.	Rendszerek alapvető leírási módjai	106
2.5.1.	Leírás a bemenő- és a kimenőjelek közötti közvetlen kapcsolat megadásával	107
2.5.2.	Rendszerek leírása a belső állapotok felhasználásával	119
2.5.3.	A bemenő- és a kimenőjelek közvetlen kapcsolatát megadó, és az állapotegyenleten alapuló leírási módok viszonya	126
2.5.4.	Rendszerek vezérelhetősége, megfigyelhetősége, identifikálhatósága	129
2.5.5.	Rendszerek stabilitása	133
2.5.6.	A jel- és rendszermodellek dualitása	135
2.6.	A jel- és rendszerreprezentációk néhány gyakorlati vonatkozása	138
F. 2.1.	Függelék. Valószínűségelméleti összefoglaló	144
F. 2.2.	Függelék. Mátrixelméleti összefoglaló	154
F. 2.3.	Függelék. A jelterek felépítése	162
3.	Mérési eljárások tervezése	168
3.1.	Bevezetés	169
3.1.1.	A mérési eljárások alapelemei	169
3.1.2.	Hasonlósági kritériumok	171
3.1.3.	A becslési és döntési eljárások rövid áttekintése	172
3.2.	A becslések és döntések minősítése	172
3.2.1.	A becslések és döntések jellemzői	173
3.2.2.	Az átlagos négyzetes hiba alsó korlátja, Cramer—Rao-egyenlőtlenségek	177
3.3.	Bayes-becslők	180
3.3.1.	A Bayes-becslők alapelve	180
3.3.2.	Nemrekurzív Bayes-becslők	183
3.3.3.	Nemrekurzív Bayes-becslő Gauss-eloszlások mellett	190
3.3.4.	Rekurzív Bayes-becslők	195
3.3.5.	Rekurzív Bayes-becslő Gauss-eloszlások mellett	196
3.4.	Maximum likelihood becslők	198
3.4.1.	A maximum likelihood becslők származtatása	198
3.4.2.	Gauss—Markov-becslő	202
3.5.	Legkisebb négyzetes hibájú becslők	206
3.5.1.	Nemrekurzív legkisebb négyzetes hibájú becslők	207
3.5.2.	Rekurzív legkisebb négyzetes becslés	213
3.5.3.	Idővariáns paraméterek becslése	217
3.6.	Determinisztikus és sztochasztikus iteratív szélsőérték-kereső eljárások	222
3.6.1.	Determinisztikus konvergens eljárások	223
3.6.2.	Sztochasztikus approximáció	228
3.7.	A döntésemélet alapjai	233
3.7.1.	Bayes-döntések	235
3.7.2.	Minimax döntés	245
3.7.3.	Neyman—Pearson-döntés	247
3.7.4.	A döntések minősítése	250
4.	Lineáris mérési eljárások	251
4.1.	Bevezetés	251
4.1.1.	A lineáris becslések típusai	252

4.1.2.	Lineáris becslések és vektorterek	253
4.2.	A legkisebb átlagos négyzetes hibájú nemrekurzív becslők	254
4.2.1.	A becslő származtatása	255
4.2.2.	Wiener-szűrés	259
4.2.3.	A nemkauzális Wiener-szűrő	262
4.2.4.	A kauzális Wiener-szűrő	263
4.2.5.	A becslés hibája	267
4.3.	A legkisebb átlagos négyzetes hibájú rekurzív becslők	268
4.3.1.	A rekurzív becslő általános alakjának származtatása	268
4.3.2.	A rekurzív becslés általános alakja	270
4.3.3.	A Kalman szűrési probléma	274
4.3.4.	Az egy lépéses Kalman-prediktor származtatása	276
4.3.5.	A szűrési probléma	281
4.4.	A Gauss—Markov-becslő	283
4.4.1.	A vizsgált modell	284
4.4.2.	A becslő származtatása	284
4.5.	A legkisebb négyzetes hibájú lineáris becslő	286
5.	Mérési adatok feldolgozásának alapvető módszerei	288
5.1.	Az átlagolás	288
5.1.1.	Az átlagolás vizsgálatánál használt jelmodell	289
5.1.2.	Az átlagolás típusai	291
5.1.3.	Az átlagolás jelátviteli jellemzői	294
5.1.4.	Az átlagolás torzítási tulajdonságai	298
5.1.5.	Az átlagolás varianciája	300
5.1.6.	Az átlagolás mint optimális becslő	306
5.2.	Konfidenciaintervallumok	307
5.2.1.	A konfidenciaintervallum fogalma	307
5.2.2.	Néhány gyakori becslés konfidenciaintervalluma	313
5.3.	Statisztikai próbák	318
5.3.1.	Parametrikus próbák	319
5.3.2.	Nemparametrikus próbák	322
5.4.	Regressziószámítás	323
5.4.1.	A regressziós probléma modellje	324
5.4.2.	Regressziószámítás teljesen specifikált statisztikai jellemzőknél	325
5.4.3.	Regressziószámítás részben specifikált statisztikai jellemzőknél	327
5.4.4.	Regressziószámítás ismeretlen statisztikai jellemzőknél	330
5.5.	Mérési hibák és hibaszámítás	338
5.5.1.	A mérési hibával kapcsolatos fogalmak	338
5.5.2.	Hibaszámítási módszerek	340

MÁSODIK RÉSZ. A RENDSZERTERVEZÉS ALAPJAI

6.	Komplex rendszerek leírása	19
6.1.	Alapfogalmak	19
6.1.1.	A komplexitás kérdése	19
6.1.2.	A megértés eszközei	21
6.1.3.	Analízis és szintézis	23

6.1.4.	Adatstruktúra és vezérlés	24
6.1.5.	A strukturált megközelítés alapjai	26
6.2.	A nyelvek szerepe	28
6.2.1.	A nyelvekről általában	28
6.2.2.	Funkcionális dekompozíció	29
6.2.3.	Főbb nyelvosztályok	31
6.3.	Absztrakciós stratégiák	36
6.3.1.	Rendszerobjektumok	36
6.3.2.	Strukturáló aspektusok	37
6.3.3.	Tiszta stratégiák	38
6.3.4.	Kevert és ortogonális stratégiák	44
6.4.	Tervezés	47
6.4.1.	A tervezési folyamat jellegzetességei	47
6.4.2.	Szervezeti keretek	49
7.	Mérőeszközök rendszertechnikai leírása	51
7.1.	A mérőeszköz mint rendszer	51
7.1.1.	A mérőeszköz helye a mérési folyamatban	52
7.1.2.	A mérőeszköz általános felépítése	53
7.2.	Tervezési nyelvek	55
7.2.1.	Specifikációs nyelv	56
7.2.2.	Tervezői nyelv	57
7.2.3.	Realizálási nyelvek	58
7.3.	Mérőkészülékek funkcionális egységei	59
7.3.1.	A mérésteória alapján származtatott funkcionális egységek	59
7.3.2.	A realizálás visszahatásából származtatott funkcionális egységek	61

HARMADIK RÉSZ. MÉRŐKÉSZÜLÉKEK FUNKCIONÁLIS EGYSÉGEI

8.	Mérőkészülékek funkcionális egységeinek építőelemei	69
8.1.	Műveleti erősítők	69
8.1.1.	Az ideális műveleti erősítő	70
8.1.2.	A műveleti erősítők felépítése	70
8.1.3.	A műveleti erősítők jellemző paraméterei	71
8.2.	Optoelektronikai elemek	79
8.2.1.	Diszkrét optoelektronikai elemek	79
8.2.2.	Optikai csatolók	81
8.3.	Analóg kapcsolók	82
8.3.1.	Az analóg kapcsolók helyettesítőképe	82
8.3.2.	Tranzisztoros kapcsolók	84
8.3.3.	Diódás kapcsolók	86
8.4.	Digitális építőelemek	87
8.4.1.	A digitális építőelemek áttekintése	87
8.4.2.	Digitális építőelemek villamos jellemzői	89
8.4.3.	Logikai áramkörrendszerek	91
8.4.4.	Logikai áramkörrendszerek elemkészlete	94
8.4.5.	LSI digitális elemek	95

9.	Mérőkészülékek jelátvivő funkcionális egységei	100
9.1.	Mérőerősítők	100
9.1.1.	A mérőerősítők hibaparaméterei	101
9.1.2.	Aszimmetrikus mérőerősítő alapkapsolások jellemzői	102
9.1.3.	Aszimmetrikus mérőerősítő kapcsolások	110
9.1.4.	Szimmetrikus bemenetű mérőerősítők	113
9.1.5.	Szigetelt bemenetű mérőerősítők	119
9.2.	Mintavevő áramkörök	122
9.2.1.	Analóg multiplexerek	122
9.2.2.	Mintavevő-tartó áramkörök	125
9.3.	Analóg-digitális átalakítók	128
9.3.1.	Analóg-digitális átalakítók általános jellemzői	128
9.3.2.	Közvetlen A/D átalakítók	133
9.3.3.	Közvetett A/D átalakítók	139
9.4.	Digitális-analóg átalakítók	144
9.4.1.	Digitális-analóg átalakítók általános jellemzői	144
9.4.2.	Közvetlen D/A átalakítók	147
9.4.3.	Közvetett D/A átalakítók	152
10.	Mérőkészülékek jelfeldolgozó funkcionális egységei	154
10.1.	Lineáris műveleti áramkörök	154
10.1.1.	Összegző áramkörök	154
10.1.2.	Integráló áramkörök	157
10.1.3.	Differenciáló áramkörök	160
10.2.	Szűrők	162
10.2.1.	A szűrési feladat jellege	162
10.2.2.	Szűrőtípusok	163
10.2.3.	Szűrők tipikus specifikációs adatai	163
10.2.4.	Az approximáció feladata	165
10.2.5.	Az alkatelem toleranciák hatása	166
10.2.6.	Passzív szűrők	170
10.2.7.	Aktív szűrők	171
10.2.8.	Analóg mintavételező szűrők	178
10.2.9.	Digitális szűrők	179
10.3.	Nemlineáris jelfeldolgozó áramkörök	184
10.3.1.	A nemlineáris karakterisztikák előállításának módszerei	184
10.3.2.	Töréspontos karakterisztikájú nemlineáris áramkörök	186
10.3.3.	Vágóáramkörök (limiterek)	188
10.3.4.	Precíziós vágóáramkörök	190
10.3.5.	Abszolútérték-képző áramkörök	191
10.3.6.	Logaritmikus erősítők	192
10.3.7.	Exponenciális erősítők	196
10.3.8.	Több bemenetű nemlineáris jelfeldolgozó áramkörök	196
10.3.9.	Analóg szorzók	198
10.3.10.	Analóg osztók (hányadosképzők)	202
10.3.11.	Modulátorok	204
10.3.12.	Demodulátorok	209
10.3.13.	Komparátorok	210

11.	Mérőkészülékek megjelenítő egységei	214
11.1.	Elektromechanikus kijelzők	214
11.1.1.	Az elektromechanikus műszerekben fellépő nyomatékok	214
11.1.2.	Hibaforrások	215
11.1.3.	Általános jellemzők	218
11.1.4.	Az elektromechanikus műszerek főbb típusai	220
11.2.	Elektronikus kijelzők	225
11.2.1.	Digitális kijelzők	225
11.2.2.	Fénysávós kijelzők	227
11.2.3.	Katódsugárcsővek	227
12.	Jelgenerátorok	232
12.1.	Egyenfeszültség- és egyenáramforrások	232
12.1.1.	Precíziós egyenfeszültség- és egyenáramforrások	232
12.1.2.	Tápfeszültség-stabilizátorok	234
12.2.	Színuszos jelforrások	239
12.2.1.	Az oszcillátorok elve	240
12.2.2.	RC-oszcillátorok	241
12.2.3.	LC-oszcillátorok	244
12.2.4.	Kristályoszcillátorok	246
12.3.	Nemszínuszos jelforrások	249
12.3.1.	Fűrészfeszültség generátorok	249
12.3.2.	Hullámforma generátorok	251
12.4.	Zajgenerátorok	255
12.4.1.	Természetes zajforrások	255
12.4.2.	Pszeudo-véletlen zajgenerátorok	256
12.4.3.	Szintetizáló zajgenerátorok	257
13.	Mérőkészülékek vezérlőegységei	259
13.1.	Vezérlőegységek működési modellje	259
13.2.	Vezérlőegységek megvalósítási lehetőségei	265
13.2.1.	Szisztematikus random logikával felépített vezérlőegységek	265
13.2.2.	Mikroprogramozott vezérlőegységek	268
13.2.3.	Mikroprocesszoros vezérlőegységek	271
13.2.4.	Random logika vagy mikrovezérlő?	276

NEGYEDIK RÉSZ. MÉRŐRENDSZEREK FUNKCIONÁLIS EGYSÉGEI

14.	Mérőrendszerek felépítése	280
14.1.	Mérőrendszer fogalma	280
14.2.	Mérőrendszerek csoportosítása	287
14.2.1.	Az alkalmazott jeltípus	287
14.2.2.	Rugalmasság	289
14.2.3.	Mérési eljárás — mérendő objektum kapcsolat	290
14.2.4.	Telepítési körülmények	294
14.2.5.	A felhasználás jellege	297
14.3.	Mérőrendszerek építőelemei	299

14.3.1.	Kapcsolat a mérendő folyamattal	299
14.3.2.	Adatfeldolgozás és vezérlés	300
14.3.3.	Információs kapcsolatok	303
14.4.	Mérőrendszerek tervezése	304
14.4.1.	Feladatkitűzés	304
14.4.2.	Felhasználói rendszerterv	304
14.4.3.	Funkcionális rendszerterv	305
14.4.4.	Műszaki tervezés	305
14.4.5.	Gazdaságossági kérdések	306
15.	Csatornák és információs kapcsolatok	308
15.1.	Digitális eszközök összekapcsolásának módszerei	308
15.1.1.	Kapcsolati topológiák	308
15.1.2.	Kapcsolati rendszer hierarchiája	311
15.1.3.	Kapcsolati rendszer szintjei	312
15.2.	A mérőrendszer információforgalma	316
15.2.1.	Az információforrás jellemzése	316
15.2.2.	Az információs csatorna jellemzése	318
15.2.3.	A kódoló jellemzése	320
15.2.4.	Hibakorlátozó kódolás	322
15.2.5.	A mérőrendszer jelforgalma	324
15.2.6.	Példák	326
15.3.	Kistávolságú digitális információátvitel	330
15.3.1.	Egységes csatlakozási rendszerek	330
15.3.2.	Párhuzamos pont-pont kapcsolat	330
15.3.3.	Sínrendszerű csatlakozás	333
15.3.4.	CAMAC rendszer	336
15.3.5.	HP-IEC csatlakozási rendszer	340
15.4.	Nagyávolságú digitális információátvitel	343
15.4.1.	A nagyávolságú átvitel általános jellemzése	343
15.4.2.	A nagyávolságú összeköttetés rendszertechnikai felépítése	345
15.4.3.	Multiplexerek és koncentrátorok	348
15.4.4.	Modulációs eljárások	349
15.4.5.	Az adatátviteli csatorna	351
15.4.6.	Vezérlési eljárások a nagyávolságú átvitel esetén	352
16.	Számítógép a mérőrendszerben	358
16.1.	Mérőrendszer és számítógép	358
16.1.1.	A számítógép megjelenése a mérőrendszerben	358
16.1.2.	A számítógép feladatai a mérőrendszerben és a méréstechnikai laborató- riumban	361
16.2.	Számítógép-alapismeretek	363
16.2.1.	Bevezető, alapfogalmak	363
16.2.2.	Számítógépstruktúrák és sínrendszerek	365
16.2.3.	Központi feldolgozóegység, regiszterek	367
16.2.4.	Memória	371
16.2.5.	Perifériák, ki- és beviteli rendszerek	374
16.2.6.	Utasításkészlet, címzési módszerek	383
16.2.7.	Programozási nyelvek	390
16.2.8.	Operációs rendszerek	393

16.3.	Számítógépek programozásának alapjai	396
16.3.1.	A programozásról	396
16.3.2.	Algoritmusok	399
16.3.3.	Adatszerkezetek	404
16.3.4.	Adatszerkezetek ábrázolása	408
17.	Mérőrendszerek szoftverfelépítése	417
17.1.	Valós idejű (real-time) rendszerek rendszertechnikája	417
17.1.1.	Mérőrendszerek és valós idejű rendszerek kapcsolata	417
17.1.2.	Mérőrendszerek vizsgálata valós idejűségi aspektusból	419
17.2.	Valós idejű rendszerek realizálása szoftvereszközökkel	420
17.2.1.	A valós idejű alapfogalmak leírásának lehetőségei	421
17.2.2.	A valós idejű (real-time) programozás háttere: a futtatórendszerek	428
17.2.3.	Valós idejű funkciók a programozási nyelvekben	430
17.3.	Mérőrendszerek tipikus szoftverelemei	431
17.3.1.	Mérőrendszerek szoftverének hierarchiája	431
17.3.2.	Mérőrendszerek szoftverének tipikus adat- és vezérlési szerkezetei	433
17.3.3.	Mérőrendszerek szoftverének funkcionális vizsgálata	440

ÖTÖDIK RÉSZ. VILLAMOS JELEK MÉRÉSE ÉS ANALÍZISE

18.	Villamos egységek	8
18.1.	Az SI mértékegység-rendszer alapegységei	8
18.2.	A villamos alapegység létrehozása	10
18.2.1.	Az ellenállásetalon realizálása	12
18.2.2.	A feszültségetalon realizálása	13
18.2.3.	Az ellenállásetalon megvalósítása a Thompson—Lampard kereszt-kondenzátor felhasználásával	13
18.2.4.	A feszültségetalon megvalósítása a Josephson-effektus felhasználásával	15
18.3.	A megvalósított villamos egységek bizonytalansága	18
19.	Egyenáram és egyenfeszültség mérése	19
19.1.	Mérőhálózatok	19
19.1.1.	Elemi mérőhálózatok és tulajdonságaik	19
19.1.2.	A zavarfeszültségek hatása az egyenfeszültség mérésére	22
19.2.	Egyenfeszültség és egyenáram mérése elektromechanikus műszerekkel	27
19.3.	Egyenfeszültség mérése analóg elektronikus eszközökkel	29
19.3.1.	Egyenfeszültség mérése analóg elektronikus voltmérővel	29
19.3.2.	Kis egyenfeszültségek mérése	29
19.4.	Egyenáram mérése analóg elektronikus eszközökkel	32
19.4.1.	Az áram—feszültség átalakító rendszerei	32
19.4.2.	Kis egyenáramok mérése	33
19.4.3.	Nagy egyenáramok mérése	34
19.5.	Egyenfeszültség mérése kompenzátorral	35
19.5.1.	A kompenzációs egyenfeszültség-mérés elve	35
19.5.2.	Precíziós kompenzátorok	36
19.5.3.	Technikai kompenzátorok	39
19.5.4.	Automatikus kiegyenlítésű kompenzátorok	40

19.6.	Egyenáram mérése kompenzátorral	40
19.6.1.	A kompenzációs árammérés elve	40
19.6.2.	Egyenáramú áramkomparátor	41
19.6.3.	Precíziós kompenzátor	42
19.7.	Digitális egyenfeszültség-mérés	43
19.7.1.	A/D átalakítók	44
19.7.2.	Digitális voltmérők	48
20.	Váltakozóáram és feszültség mérése	51
20.1.	Váltakozójelek paraméterei	51
20.2.	A váltakozójel paramétereinek mérési módszerei	54
20.2.1.	Egyszerű középtérték mérése	54
20.2.2.	Abszolút középtérték mérése	54
20.2.3.	Effektív érték mérése	59
20.2.4.	Csúcsérték mérése	62
20.2.5.	Pillanatérték mérése	68
20.2.6.	Időfüggvény mérése	68
20.2.7.	Szelektív mérések	70
20.2.8.	Vektoriális komponensek mérése	71
20.3.	Méréshatár kiterjesztésének eszközei	77
20.3.1.	Ohmos osztó	77
20.3.2.	Kapacitív osztó	78
20.3.3.	Induktív osztó	78
20.3.4.	Feszültségváltó	79
20.3.5.	Áramváltó	79
21.	Idő- és frekvenciamérés	80
21.1.	A frekvenciaetalonok pontosságának alakulása és a pontosság növelésének elméleti határai	80
21.2.	A frekvenciaingadozás és fázisidő definíciója	81
21.3.	Idő- és frekvenciaetalonok	82
21.4.	Frekvencia- és periódusidő-mérés módszerei	86
21.4.1.	Frekvencia- és periódusidő-mérés számlálókkal	86
21.4.2.	Rezonancia elven működő frekvenciamérők	95
21.4.3.	Frekvencia-diszkriminátorok (ratemeter)	95
21.4.4.	Heterodin frekvenciamérők	95
21.4.5.	Oszilloszkópos frekvencia-összehasonlítás	96
21.5.	Időintervallum-mérés	97
21.6.	Fázisszögmérés	101
21.6.1.	Fázisszögmérés számlálókkal	101
21.6.2.	Fázisszögmérés oszcilloszkóppal	103
21.6.3.	Fázisszögmérés fázisdetektorral	103
22.	Teljesítmény és energia mérése	106
22.1.	A villamos teljesítmény mérése	108
22.1.1.	Teljesítménymérés feszültségmérővel (és árammérővel)	108
22.1.2.	Teljesítménymérés elektromechanikus műszerrel	109
22.1.3.	Teljesítménymérés hőelem alkalmazásával	112

22.1.4.	Teljesítménymérés Hall-szondával	113
22.1.5.	Elektronikus teljesítménymérők	113
22.2.	A villamos energia mérése	115
23.	Mágneses jellemzők mérése	116
23.1.	Mágneses térjellemzők mérése	116
23.1.1.	A fluxus és az indukció mérése	118
23.1.2.	A mágneses térerősség és a mágneses feszültség mérése	121
23.2.	Ferromágneses anyagok vizsgálata	123
23.2.1.	B—H görbe mérése	124
23.2.2.	A vasveszteség mérése és összetevőinek meghatározása	126
23.2.3.	A koercitív erő és a remanencia mérése	128
24.	Jelanalizátorok	130
24.1.	Az időfüggvény megjelenítése oszcilloszkóppal	131
24.1.1.	A mintavételező oszcilloszkóp	132
24.1.2.	A tárolócsöves oszcilloszkóp	132
24.1.3.	A digitális oszcilloszkóp	133
24.2.	Jelrögzítő eszközök	134
24.2.1.	Az analóg jelrögzítés eszközei	134
24.2.2.	Az analóg módon rögzített jelek feldolgozása	135
24.2.3.	Digitális jelrögzítés	135
24.2.4.	A tranziens analízátor	136
24.3.	A középértékmérés és eszközei	136
24.3.1.	Az egyszerű átlagolás	136
24.3.2.	Átlagolás sztochasztikus-ergodikus konverterrel	139
24.3.3.	A rekurzív átlagolás	147
24.3.4.	A felejtő átlagolás (exponenciális átlagolás)	148
24.3.5.	A mozgó átlagolás és az additív zajszűrés	150
24.3.6.	Az átlagos négyzetes érték mérése	153
24.4.	A korrelációs függvények mérése	154
24.4.1.	Analóg módszerek	154
24.4.2.	A korreláció digitális elvű mérése	157
24.5.	Valószínűség-sűrűségfüggvények és eloszlásfüggvények mérése	166
24.6.	Az energetikai spektrumok mérési módszerei	169
24.6.1.	A sávszűrős analízis	170
24.6.2.	A direkt Fourier-transzformáció	175
24.7.	Spektrumanalizátor-típusok	182
24.7.1.	Hangolt szűrős analízátorok	183
24.7.2.	Transzponáló rendszerű analízátorok	184
24.7.3.	A párhuzamos analízátor	194
24.7.4.	Indirekt analízátorok	195
24.7.5.	Fourier-analizátorok	195
24.7.6.	Összehasonlítások	207
24.8.	A digitális Fourier-analizátorok hibái és ezek csökkentése	208
24.8.1.	A bemeneti kvantálás okozta hiba	208
24.8.2.	A véges mintaregisztrátum-hossz hatása	209
24.8.3.	A variancia csökkentése	216
24.8.4.	A felbontóképesség növelése	220

24.8.5.	A változó sávszélesség biztosítása	222
24.8.6.	A véges szóhosszúságú aritmetika okozta hibák	222
24.9.	Hálózatjellemző függvények mérése	224
24.9.1.	Mérések tranziens vizsgálójelekkel	224
24.9.2.	Mérések szinuszos vizsgálójellel	225
24.9.3.	Mérések sztochasztikus gerjesztőjelekkel	229
24.9.4.	A koherenciafüggvény mérése	233
24.10.	A jelanalízis gyakorlati szempontjai	234
24.10.1.	Időtartomány kontra frekvenciatartomány	234
24.10.2.	A mintavételezés szempontjai	235
24.10.3.	A kvantálási tétel gyakorlati alkalmazása	237
24.10.4.	A mért függvények értékelése	241
24.10.5.	Példa az analízisidők meghatározására	243
25.	Impedanciamérés	245
25.1.	A mérések fizikai elvei	246
25.1.1.	Impedanciamérés feszültségösszehasonlítással	246
25.1.2.	Impedanciamérés áramösszehasonlítással	248
25.2.	Az impedanciamérő hálózatok minőségi követelményei	249
25.2.1.	Hibák	249
25.2.2.	Frekvenciafüggés	250
25.2.3.	A mérővezetékek által okozott hibák	250
25.2.4.	Gyorsaság	259
25.3.	R, L, C elemekből felépített mérőhidak	259
25.3.1.	Felépítésük	259
25.3.2.	A mérés hibái	260
25.3.3.	A mérés frekvenciafüggése	263
25.3.4.	A mérés gyorsasága	265
25.4.	Aránytranszformátoros és induktív osztású mérőhidak	267
25.4.1.	Felépítésük	271
25.4.2.	Az aránytranszformátorok és induktív osztók hibái	271
25.4.3.	Az aránytranszformátor hibáinak frekvenciafüggése	271
25.4.4.	Az aránytranszformátoros mérőhidak gyorsasága	273
25.5.	Induktív áramkomparátoros mérőhidak	273
25.5.1.	Felépítésük	273
25.5.2.	Az áramkomparátor hibái	273
25.5.3.	Az áramkomparátoros mérőhidak gyorsasága	277
25.6.	Elektronikus hidak és aránymérők	277
25.6.1.	Felépítésük	277
25.6.2.	Az elektronikus áramösszehasonlító híd	282
25.6.3.	Feszültségösszehasonlító elektronikus hidak	283
25.7.	T-kapcsolások	287
25.8.	Impedanciamérő kapcsolások	288
25.8.1.	Ohmos ellenállás mérése	288
25.8.2.	Induktivitás mérése	288
25.8.3.	Kapacitás mérése	298
25.8.4.	Kölcsönös induktivitás mérése	304
Irodalom		305
Tárgymutató		319

Előszó

A mérés az ismeretszerzés legalapvetőbb módszere. A természet jelenségein végzett mérésekre épülnek a műszaki és természettudományok és általában minden olyan tudományterület, ami egzaktyságra törekszik. Számos példát láthattunk és láthatunk arra, hogy megdönthetetlennek hitt elméletek omlottak össze új mérési eredmények hatására; a mérések pontosságának, komplexitásának növelése olyan jelenségek felfedezéséhez vezetett, amelyek új tudományterületeket bontakoztattak ki. A mérés szerepe nemcsak a tudományban, hanem a termelésben is meghatározó. A mérés az alapja a mérnöki konstrukcióknak, a termelés automatizálásának, a minőség-ellenőrzésnek, és a mérés nélkül elképzelhetetlen a gazdaság működésének irányítása.

A mérés tervezésének, elvégzésének és értékelésének folyamata jelentős elméleti, műszaki és módszertani háttérrel kíván. E háttér fő elemei a következők:

A méréselmélet a méréssel összefüggő elméleti, általános, elvi problémákkal, mérési eljárások információátviteli tulajdonságaival foglalkozik.

A mérés technika azoknak a módszereknek összességét foglalja magában, amelyek felhasználásával egy konkrét mérési probléma megoldható.

A műszertechnika — szoros kapcsolatban a méréselmélettel és a mérés technikával — konkrét mérések elvégzéséhez szükséges eszközök, berendezések létrehozása a feladata.

A metrológia a mérések gyakorlati elvégzéséhez nélkülözhetetlen alap- és lezármaztatott egységek előállításával, valamint műszerek és mérési eljárások nagy pontosságú hitelesítésével foglalkozik.

Könyvünk e témakörökkel foglalkozik, és megkísérli rendszerezetten bemutatni a mérési feladatok elvégzéséhez szükséges legfontosabb elméleti, gyakorlati és módszertani ismereteket, kiemelve azokat a lehetőségeket, amelyeket a méréselmélet, az elektronika és a digitálisteknika fejlődése nyitott meg a mérés technika előtt. Ezekkel a kérdésekkel foglalkozó írásmű bőségesen található, olyan munka azonban, amely valamilyen egységes koncepció alapján együttesen tekintené át a méréssel kapcsolódó — sokszor igen összetett — problémákat, alig található az irodalomban. A könyv szerzői egy ilyen könyv megírására tesznek kísérletet. Azt, hogy ez milyen mértékben sikerült, az Olvasó fogja eldönteni.

A könyv anyagát öt, önállóan is feldolgozható témakör köré csoportosítottuk.

Az *első részben* a méréselmélet legfontosabb fejezeit mutatjuk be. Elsősorban azokat a módszereket ismertetjük, amelyek a mérési folyamatok leírásánál, a mérési eljárás megválasztásánál és a mérésadatfeldolgozásnál alapvető jelentőségűek. Részletesen tárgyaljuk a modellezés egyes kérdéseit, a jel- és rendszerelmélet főbb eredményeit, a becsléselmélet, az identifikáció és a döntéselmélet alapjait, a lineáris szűréselmélet alapjait, valamint a mérésadatfeldolgozás klasszikusnak tekinthető módszereit.

Az elméleti kutatás és a gyakorlati élet napról napra bonyolultabb mérési feladatok megoldását veti fel. Ezekhez a mérés technika és a műszertechnika oldalán összetett rendszertechnikai problémákat is meg kell oldani. A könyv *második része* ilyen összetett mérési feladatok megoldására alkalmas mérőeszközök — készülékek és rendszerek — elemzéséhez, ill. tervezéséhez ad rendszertechnikai alapot.

A *harmadik részben* a mérőkészülékek funkcionális egységeinek hardver realizálási lehetőségeit, a technika jelenlegi állása mellett elérhető műszaki jellemzőit és azok korlátait mutatjuk be. Ezekkel az ismeretekkel elsősorban a mérési eljárást, ill. a mérőkészülék rendszertervét kidolgozó számára kívánunk segítséget nyújtani annak megítélésében, hogy egy-egy funkcionális egység hogyan, és milyen korlátokkal realizálható.

A *negyedik rész* a mérőrendszerek funkcionális egységeivel foglalkozik. A mérőrendszer-tervezés általában a készen kapható univerzális készülékek kiválasztásából, az egyedi eszközök specifikálásából és az egységek rendszerré integrálásából áll. Ehhez nyújt segítséget a különböző mérőrendszer-felépítéseknek és ezek tulajdonságainak ismertetése, a legfontosabb funkcionális egységek elemzése. A mérőrendszerek összetett feladataik elvégzéséhez nem nélkülözhetik a kis- vagy mikroszámítógépet. Az ehhez kapcsolódó ismeretek bővítését, ill. kiegészítését szolgálják azok a fejezetek, amelyek a számítástechnika leglényegesebb hardver és szoftver kérdéseivel, továbbá a mérőrendszer elemei közötti információs kapcsolati rendszerekkel foglalkoznak.

A könyv első négy része a mérések és műszerek *általános, alkalmazási területtől független* kérdéseivel foglalkozik. Ha az általános elveket a mérendő objektumok egy speciális osztályára alkalmazzuk, akkor egy szakterület mérés technikájához jutunk. Az *ötödik rész* a villamos mennyiségek mérés technikai problémáit tárgyalja. Bemutatásra kerülnek a villamos mennyiségek mérésének, a villamos jelek analízisének és a mérési hiba becslésének legfontosabb módszerei, valamint az ezekhez szükséges mérőműszerek felépítésének funkcionális-egység mélységű modelljei.

Bár a mérési problémák a tudomány és a termelés minden területén megjelennek a legkülönbözőbb fizikai és egyéb paraméterek mérésének igényével, az esetek mind nagyobb hányadában a mérendő objektumhoz villamos jelet adó mérőátalakító kapcsolódik. Ennek az a következménye, hogy a további jelfeldolgozási és mérési folyamatok a villamos jelek szférájában játszódnak le. A villamos jelek e kitüntetett szerepe indokolja e terület részletesebb bemutatását. Nyilvánvaló, hogy minden szakterületnek kialakult a saját mérés technikája, amelynek specifikus része épp a mérendő objektum és a villamos jelet mérő, ill. feldolgozó rész közötti terület. E területek érdemi érintése túllép könyvünk célkitűzésén, mindamellett úgy gondoljuk, hogy a könyv szakterülettől független, általános részeit éppúgy, mint a villamos jelek mérésével foglalkozó speciális része hasznos segítséget fog adni a mérési problémák megoldásához, bármelyik szakterülethez kapcsolódnak is azok.

Könyvünk egy viszonylag nagy létszámú szerzői gárda együttes munkájának eredményeként jött létre. Tudatában vagyunk annak, hogy ezáltal óhatatlanul egy stílusában, feldolgozási mélységében és helyenként arányaiban sem teljesen egységes anyagot nyújtunk át az Olvasónak, de vállalkozásunk sokrétősége miatt csak ezt az utat tartottuk járhatónak.

A könyv szerzői a Budapesti Műszaki Egyetem Műszer és Méréstechnika Tanszékének munkatársai, akik a könyvben szereplő témakörök feldolgozását a tanszék sokéves oktatási-kutatási munkájának tapasztalatait felhasználva végezték el.

A könyvet mindazoknak ajánljuk — bármilyen műszaki terület művelői is —, akik érdeklődnek a mérési eljárások tervezésének és kivitelezésének korszerű eszközei és módszerei iránt. Úgy gondoljuk, hogy egyes fejezetek az egyetemi oktatásban is használhatók lesznek.

Budapest, 1983. május

Dr. Schnell László
főszerkesztő



ELSŐ RÉSZ

MÉRÉSELMÉLET

A mérés általánossága és a műszaki, valamint a természettudományokban betöltött meghatározó szerepe azt eredményezte, hogy a legkülönbözőbb területek, saját fejlődésükkel együtt és azzal kölcsönhatásban kialakították saját méréstechnikájukat és az adott méréstechnikába tartozó elméleti háttérrel. Nyilvánvaló, hogy más méréstechnika szükséges a villamos jelek és rendszerek területén, mint az élelmiszerek minőségellenőrzésénél, vagy különböző, az orvosi diagnosztikában használatos méréstechnika a rövidáru-boltokban megszokottól. Míg a méréstechnikai módszerek tekintetében az egyes szakterületek fejlődése határozott divergenciához vezetett, addig a méréselméleti háttér vonatkozásában konvergencia figyelhető meg. Erre a konvergenciára az elvi lehetőséget az adja, hogy az egyes szakterületek által használt *modellezési technikák* egyre inkább kötődnek a *jel- és rendszerelméleti* univerzális apparátusához, ami mint látni fogjuk biztosítja a mérési eljárások általános megfogalmazásának lehetőségét. Ennek ellenére természetesen nem mondhatjuk, hogy a méréselmélet egy lezárt, egyértelműen körvonalazható tudományterület. Az egzakt modellezési technikák fejlődése olyan új mérési problémákat vet fel, amik maguk után vonják nemcsak a méréselméleti módszerek állandó fejlesztésének szükségességét, hanem azt is, hogy a mérés fogalma átalakul és új, általánosabb értelmezést nyer. *Méréselméleten ma a különböző szakterületeken létrejött tudományos diszciplínák együttesét értjük, amiket az kapcsol össze, hogy mérési problémák megoldásához nyújtanak apparátust.*

Ez a megfogalmazás meglehetősen szabad kezét hagy abban a tekintetben, hogy a méréselmélet címszó alá valójában milyen témákat soroljunk. A könyv első részében, ami az 1—5. fejezeteket foglalja magában, azokat a területeket ismertetjük, amik általánossági szintjük és gyakorlati jelentőségük alapján a méréselmélet központi témaköreinek tekinthetők.

Az első fejezet a *modellezés* néhány fontos kérdését tárgyalja. Erre azért van szükség, mert a mérés fogalma, általánossági szintje nem érthető meg a mérés és modellezés kapcsolatának tisztázása nélkül, és e kapcsolat sajátos jellege meghatározó jelentőségű a méréselmélet teljes felépítése szempontjából.

A második fejezet is a modellezés témakörhöz kapcsolódik, összefoglalja a méréselmélet továbbiakban tárgyalt témaköreinél használt modellezési apparátus, a *jel-*

és rendszerelmélet főbb eredményeit. A jel- és rendszerelmélet tehát nem a méréselmélet közvetlen részének, hanem a méréselmélet által használt „matematikai nyelvnek” tekinthető.

A harmadik fejezet a mérési eljárások alapvető típusait, azok származtatási módját és tulajdonságait tekinti át. Az ismertetett témák elméleti háttere a *becsléselmélet és identifikáció*, valamint a *döntéselmélet*. Ezek a témakörök alapvető jelentőségűek a mérési eljárások tervezésében, és így a méréselmélet közvetlen elemei.

Ugyancsak a méréselmélet központi témaköreinek egyikével, a *lineáris szűréselmélettel* foglalkozik a könyv negyedik fejezete. A harmadik és negyedik fejezet témakörei között szoros a kapcsolat, úgy is fogalmazhatunk, hogy az optimális mérési eljárások származtatásának két különböző módszere kerül ismertetésre.

A könyv ötödik fejezete bemutatja, hogy a *mérési adatfeldolgozás* klasszikusnak tekinthető módszerei milyen kapcsolatban vannak egymással és mi a becslés- és döntéselméleti értelmezésük.

Mint már korábban is említettük, a méréselmélet rész tematikája nem teljes, és nem is lehet az. Számos olyan területről nem esik szó benne, aminek megvannak ugyan a méréselméleti vonatkozásai, de mai jelentőségük nem olyan nagy, mint a tárgyalt területeké. A műszer és méréstechnika jövőbeni fejlődése azonban hozhat olyan változásokat, amik a méréselméleten belül is átsúlyozásokra, esetleg új irányok kialakulására vezethetnek.

1. Mérés és modellezés

Minden mérési feladatban közös vonás, hogy a mérés megtervezésének, elvégzésének előfeltétele annak pontos rögzítése, hogy mit akarunk mérni. Bár úgy tűnhet, hogy ez az állítás magától értetődő dolgot fogalmaz meg, mégis érdemes a jelentését kissé részletesebben megvizsgálni.

Egy mérési feladat megfogalmazása valamilyen jelenség megismerésének igényéből indul ki. A megismerés iránti óhaj kinyilvánítása és a mérési feladat specifikálása között azonban meglehetősen nagy a különbség, hiszen a specifikálás már annak vagy azoknak a jellemzőknek a pontos rögzítését jelenti, amelyek a jelenség vizsgálata szempontjából lényegesek. Ezeknek a jellemzőknek a kiválasztása és valamilyen formalizmussal történő megadása a modellezés feladata. Látható tehát, hogy a modellezés és a mérés között szoros kapcsolat van, ezért e kapcsolat jellegének elemzése a méréssel kapcsolatos vizsgálatok kiindulópontja kell hogy legyen.

A fejezet első szakasza a modell és modellezés alapfogalmait tekinti át, bemutatja a modellek néhány típusát és a modellezés alapvető módszereit.

A második szakasz a mérés és modellezés kapcsolatának természetével, ebből kiindulva a mérés alapfogalmaival és fő aspektusaival foglalkozik.

A harmadik szakasz a mérési eljárások típusait foglalja össze.

1.1. Modell és modellezés

A modell a világ leírásának, megértésének az eszköze, a világra vonatkozó ismereteinknek kifejezője. A következőkben röviden jellemezzük a modellek főbb típusait és alkalmazásait.

A vizsgálatokat leszűkítve a valamilyen matematikai formalizmussal leírható modellekre, bemutatjuk a modellezés alapszereit, a deduktív és induktív módszert, majd e módszereknek a gyakorlati modellalkotásban elfoglalt helyét és a modellalkotás folyamatát.

1.1.1. A modell fogalma, a modellezés feladata

Mindennapi cselekvésünk nagy része közvetlen kapcsolatba hozható a modell, modellezés fogalmakkal rögzített, általában csak tudományos vonatkozásban említett tevékenységgel.

A modellezés csupán tudományos vonatkozású értelmezése abból ered, hogy a kutató e módszerhez tudatosan folyamodik, ellentétben az akaratlan, nem tudatos modellezéssel, ami a köznap életünk szoros velejárója. A modell segítségével:

- megragadjuk a valóság egy részét, kiemeljük annak bizonyos aspektusait;
- a valóságos jelenség lényegét változatlanul meghagyva, a jelenséget leegyszerűsítjük, amivel lehetővé tesszük a jelenség kvantitatív tárgyalását;
- rögzítjük és kifejezzük a valóságos jelenségekre vonatkozó ismereteinket.

Ugyanannak a fizikai objektumnak meglehetősen sok, eltérő képet mutató modellje lehet. Attól függően, hogy milyen célból alkották meg őket, a valóság melyik oldalát ragadják meg velük, más lesz az egyes modellek bonyolultsági foka, és más a megvalósítási módjuk.

(Pl. a valóságos repülő és a különböző aspektusait kifejező modelljei a következők lehetnek: játékreplő, szélsátrónás modell, repülésszimulátor, az erőviszonyokat leíró differenciálegyenlet-rendszer, ill. számítógépes programja, dokumentációs rajzok stb.)

A modellalkotás és annak végterméke — a modell, erősen célorientált — nagymértékben magán viseli a vizsgálati célkitűzés jegyeit.

A tudományos modellalkotás (elsősorban az egzakt és a mérnöki tudományokra kell itt gondolni) nagyobb mértékben objektív; támaszkodik a fizikai, biológiai, gazdasági törvények ismeretére, általában matematikailag jól kezelhető formában adja meg a modellt, eszköze a különböző elméletek felállításának és a megtervezett kísérletek és megfigyelések révén azok igazolásának, ill. megcáfolásának.

Röviden összefoglalva:

a modell

- a vizsgált jelenségekre vonatkozó ismereteink formális kifejezése:

a modellezés

- a modellalkotás folyamata.

A modell legfontosabb jellemzője a jósága. Egy modell tekintettel a célok és modellek sokféleségére, nyilvánvalóan akkor jó, ha eleget tesz a modellező igényeinek. Így pl. a differenciálegyenletet megoldó számítógépprogram és a repülő szélsátrónában használt makettje ugyanolyan jó modell lehet, hiszen a modell jóságát a kitűzött cél megvalósításának szintje határozza meg. Tudományos modelleknél a cél a valóság minél élethűbb ábrázolása, a modellt összevetik kísérletek útján a forrásául szolgáló valóságos jelenséggel és a megfigyelésekből következtetnek az épített modellek használhatóságára. Maga a modellalkotás egyik legfontosabb módszertani eleme a:

kutatás — tervezés — elemzés

Fogalmakkal kapcsolatos tevékenységeknek. Ilyenkor modellezés révén:

- megbízhatóbb ismeretanyagot szerzünk valamilyen fizikai jelenségről;
- verifikáljuk az elméleti eredményeket;
- szintetizálunk fizikai célrendszereket (pl. szabályozó);
- megvalósítjuk különböző jelenségek előrejelzését;
- optimaljuk a különböző jelenségek lefolyását.

1.1.2. A modellek típusai

A következőkben áttekintést adunk a modellek különböző típusairól és jellemzőiről. Szó volt arról, hogy egy jelenség modellje eltérő formákban valósulhat meg, azaz eltérő a modell megadásánál használt formalizmus, elsősorban attól függően, hogy milyenek a modellező által kitűzött célok és mik az általa lényegesnek vélt, ill. megválasztott rendszerjellemzők.

Általában három fő modelcsoportot különböztetünk meg (a tipikus modellformákat egy lengéscsillapító erősen egyszerűsített modelljével illusztráljuk):

— *funkcionális, koncepcionális modell*:

a vizsgált rendszer részeit a rendszerben betöltött idealizált funkciójuk alapján definiáljuk (pl. funkcionális blokkvázlat, folyamatábra), (1.1. ábra);

— *fizikai modell*:

a vizsgált jelenséget rögzített tulajdonságú fizikai objektumokkal írjuk le analógiák, ill. hasonlósági törvények alapján (analóg számítógép modellek, gumimembrán modellek, kicsinyített áramlási modellek, áramköri modellek), (1.2. ábra);

— *matematikai modell*:

a modellezendő rendszer fizikai változói közötti kapcsolatokat egy bizonyos matematikai struktúrába képezzük le (algebrai, differenciál-, integrálegyenletek, logikai függvények stb.), a lengéscsillapító esetében:

$$\ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_2 x(t) = f(t),$$

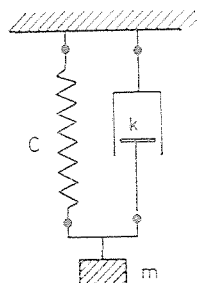
$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \quad t \in [t_0, t_0 + T].$$

Az, hogy az adott esetben milyen modellel elégszünk meg, sok szempont, lehetőség, korlátozás eredője. Ezek közül alapvető fontosságú az, hogy:

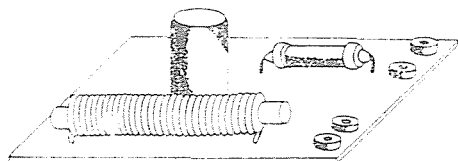
— mik a konkrét modellezési cél szempontjából lényeges, és mik az elhanyagolható aspektusok;

— milyenek az alkalmazható modellezési eljárások;

— milyen a rendelkezésre álló ismeretanyag mennyisége és minősége.



1.1. ábra. A lengéscsillapító funkcionális modellje
 C rugóállandó; k csillapítási tényező; m tömeg



1.2. ábra. A lengéscsillapító fizikai modellje

A modell az ismeretek kifejezésének alapvető eszköze. Az ismereteket használható formában kell nyújtani, hiszen a modell általában a további döntések alapja és kiindulási pontja. A tudomány számára ilyen használható eszköz mindenekelőtt a matematikai modell. Más modelltípusok ritkán képezik az önálló modellezési feladat célját, inkább a matematikai modell létrehozását vagy megértését segítik elő.

A továbbiakban a mérnöki gyakorlat szempontjából legfontosabb modelltípussal, a jelek és rendszerek leírására kidolgozott matematikai modellekkel fogunk foglalkozni. E modellek különböző típusainak részletes elemzése a 2. fejezetben található. Most csak a modellekre vonatkozó néhány általános jellemzőről teszünk említést.

A vizsgált jelenségre vonatkozó és a matematikai modell által képviselt ismeretanyagot a következő fő kategóriákba lehet sorolni:

- törvények ;
- struktúra ;
- paraméterek ;
- állapotok.

Törvények

A törvények természetesen az alapvető fizikai törvények, melyek a matematikai modellnél meghatározzák az egyenletek általános alakját. A vizsgált jelenség körülhatárolásánál, a különféle kölcsönhatások elhanyagolásánál arra törekszünk, hogy a jelenséget lehetőleg minél szűkebb fizikai területen tárgyaljuk. A tárgyalás alapja a megválasztott területhez tartozó, az anyagra és energiára vonatkozó megmaradási és folytonossági törvények és a belőlük levezetett alaptörvények (*Kirchhoff*-, *Newton*-, *Fourier*-, *Maxwell*-, *Navier*-, *Stokes*-féle törvények stb.) alkalmazása. Ennek során, az egyensúlyi egyenletek felírása és a peremfeltételek rögzítése útján jutunk el a jelenség matematikai modelljéhez.

Struktúra

Struktúra a jelenség belső tagozódására és részeinek kapcsolatára utal. A jelenség analízisének azt nemcsak a környezetétől különítjük el, hanem ha lehetséges, hasonló módon megpróbáljuk különválasztani az egyes elemeit és rögzíteni azok kölcsönhatását. Ez különösen hasznos formális és számítógépes módszerek használatánál.

A részelemek egymással való kapcsolata rögzíti a jelenségen belül az anyag és energia terjedési útjait, az elemek típusa pedig az anyag és energia, a jelenségen belül lezajló átalakulását.

A strukturális ismeret meghatározza a matematikai modellekben szereplő egyenletek számát (kölcsönhatások) és típusát (elemek).

Paraméterek

A matematikai modell paraméterei nem mások, mint az egyes egyenletekben szereplő együtthatók konkrét értékei. Az együtthatók kapcsolatban állnak az egyes elemekre jellemző fizikai mennyiségekkel, a határ- és a kezdeti feltételekkel. A paraméterértékek meghatározása a modellalkotás legfontosabb gyakorlati, a jelenség megfigyeléséhez kötött tevékenysége, mivel a konkrét értékek általában ismeretlenek, viszont azokkal teljes a matematikai modell megadása (struktúra + paraméterek).

Állapot

Az állapot olyan változó, amely a jelenséget érő külső hatásokkal együttesen írja le teljesen a jelenség lefolyását. Állapotváltozóként általában a jelenség elemeinek viselkedésére jellemző fizikai mennyiségek pillanatértékei értelmezhetők.

A felsorolt jellemzők, a struktúra, a paraméter és az állapot, a lengéscsillapító esetében a következőképpen értelmezhetők:

Struktúra: a jelenség három elemre osztható, azok egymástól függetlenül befolyásolják a jelenség lefolyását, a leíró egyenlet háromtagú, lineáris, additív.

Paraméterek: a modell egyes elemeire, a csillapításra, rugalmasságra, tehetetlenségre jellemző mennyiségek konkrét értékei.

Állapotok: az egyes elemekre jellemző mennyiségek (elmozdulás, sebesség) pillanatértékei.

1.1.3. A modellezés alapfogalmai

A mindenkori modellalkotás háttérében a törvények, struktúrák, paraméterek körülhatárolásánál alapvető szerepet játszik néhány egyetemes jellegű modellalkotási elv. Ezek az elvek a:

- szeparáció,
- szelekció és
- gazdaságosság.

Szeparáció

A fizikai világ egyes objektumai, jelenségei kisebb-nagyobb mértékben kölcsönhatásban állnak egymással, befolyásolják egymás viselkedését. Egy modellezési feladat megfogalmazása azt kívánja meg tőlünk, hogy képesek legyünk a külső világ egy részét (ezt nevezzük a modellezendő rendszernek vagy jelenségnek) a többitől elkülöníteni. Az elkülönítéssel együttjáró fogalmak a *rendszerhatár*, amin keresztül a rendszer a környező világhoz kapcsolódik, és a *rendszer elemei, részrendszerei*, amelyek a rendszeren belül kölcsönhatásban állnak egymással.

Szelekció

A vizsgált jelenségen belül, valamint a jelenség és annak környezete között számos kölcsönhatás-típus értelmezhető. Az adott vizsgálat célja azonban a jelenségnek bizonyos rögzített kölcsönhatás szempontjából történő elemzése, ami együtt jár azzal, hogy a modellezés során a megvalósítandó cél szempontjából szelektálni kell a kölcsönhatások között.

A szeparáció és a szelekció elvéből kifolyólag a modell mindig egyszerűsített, tehát bizonyos értelemben hibás képe a valóságnak. A szeparáció és a szelekció ennek ellenére elkerülhetetlen munkafeltétel, ami nélkül bármilyen modellalkotás elképzelhetetlen lenne.

A gazdaságosság elve azt fejezi ki, hogy a modellnek, a vizsgálat célkitűzésének megfelelő lehetőségek közül, a lehető legegyszerűbbnek kell lennie. A modell egyszerűsége a struktúra egyszerűségében és ezzel együtt a paraméterek és állapotváltozók számának minimalitásában jelentkezik.

Térjünk most át a modellezéssel kapcsolatos információk fajtáira és mennyiségére.

A modell származtatásához szükséges információnak két forrása lehet:

— *a priori ismeret*: a modellezendő jelenségre vonatkozó, a vizsgálat megkezdésekor rendelkezésre álló ismeretek összessége;

— *a posteriori ismeret*: a modellezési eljárás befejezésével rendelkezésünkre álló ismeret, ami a jelenség megfigyelése során nyert információkkal több az *a priori* ismeretnél.

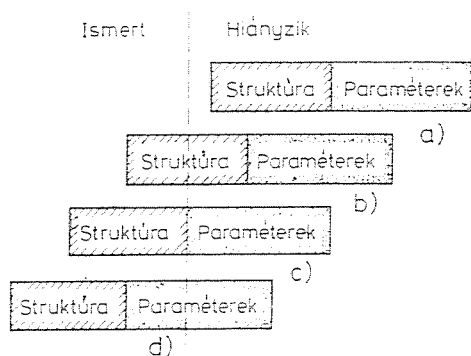
A modellezési folyamat kezdeti szakasza az *a priori ismeret* összegyűjtése és rendszerezése. Az adott jelenségről alkotott *a priori ismeret* forrása a jelenség előzetes általános elemzése, beleértve a lehetséges kapcsolatokat más jelenségekkel és a fizikai törvényszerűségekkel. Az *a priori ismeret* kulcsfontosságú a modellezés szempontjából. Mennyisége sajnos mindig korlátozott, mivel figyelmünk egy konkrét jelenség leírására összpontosul, a jelenség környezete kevésbé ismert, sok bizonytalanság forrása, továbbá magáról a jelenségről alkotott fizikai ismeretanyagunk sem teljes, mivel annak minden aspektusát képtelenek vagyunk figyelembe venni. Sőt ha ismertek is az általános törvényszerűségek, a konkrét összefüggések, mennyiségek ismerete általában hiányzik.

Az *a priori ismeret* a modellezési feladat céljával együtt meghatározza a modell végleges típusát, a pontossági követelményeket, a konkrét modellezési eljárás típusát, a modell bonyolultságát, megvalósításának módját és költségeit.

A hiányzó információnak négy esetét különböztetjük meg, mint ahogy az az 1.3. ábrán látható.

A hiányzó *a priori ismeret* helyébe annak lehetséges változatait helyettesíthetjük be, amivel egy több szabadságfokkal rendelkező *modellosztály*hoz jutunk el (másképpen, egy *előzetes modellt* hozunk létre). A feladatunk most ezen osztály olyan elemének (modellnek) a kiválasztása, amely legjobban megfelel a modellezési feladat céljának.

Alapvető fontosságú az említett osztály terjedelme (ez kihat a modellalkotás összes lépésére) és modelljeinek típusa.



1.3. ábra. A hiányzó *a priori ismeretek*

Az ábrán vázolt négy eset között éles a különbség. Míg az utolsó két esetben a modellosztály egyetlenegy modelltípusból áll (a struktúra ismert), aminek legfeljebb a paraméterértékei nem rögzítettek teljesen, az első két esetben maga a struktúra is változó, és így rögzítendő tényező. A *c* és *d* ábrák eseteiben a paraméterek értékeit kell meghatározni, azaz elvégezni a *paraméterbecslés*, *paraméter identifikáció* feladatát. Ez mint problémakör viszonylag kidolgozott és egységesített. A struktúra kiválasztására hasonló szintű módszerek még nincsenek, itt jelentős szerepe van a mérnöki intuíciónak és a próbálgatásnak.

1.1.4. A modellezés módszerei

Mielőtt felvázolnánk a modellalkotás lépéseit, röviden foglalkozunk a modellalkotási módszerek két extrém esetével, a kizárólag a priori ismereteket felhasználó ún. *deduktív* módszerrel és a kizárólag kísérleti adatokra építő ún. *induktív* módszerrel.

Deduktív modellalkotás

A deduktív modellezésnél általános érvényű törvényszerűségekből kiindulva egy konkrét, ismert jelenség leírására törekszünk. Az e célból végzett elméleti analízis során meghatározzuk a vizsgált rendszer határait, felbontjuk azt különálló elemekre — részrendszerekre — egy-egy részrendszerre alkalmazzuk a megfelelő megmaradási és folytonossági törvényeket, rögzítjük a határfeltételeket és a részrendszerek közötti kölcsönhatásokat. A nyert ún. a priori ismeretanyag formális alakja valamilyen struktúra és a hozzátartozó paraméterek. Abban az esetben, ha mind a fizikai törvények, mind a strukturális és paraméterekkel kifejezett ismeretek rendelkezésre állnak, ill. teljes egészében specifikáltak, a kapott matematikai modell *egyértelműen* leírja a vizsgált jelenséget (a szelekció és szeparáció által behozott bizonytalanságok korlátaín belül). Mivel a jelenség belső felépítése ismert vagy hozzáférhető, a rendszer „átlátszó” a modellező számára, így ezt az esetet a „fehér doboz” névvel illetik.

Induktív modellalkotás

A kísérletek során végzett megfigyelések információt tartalmaznak a jelenség és annak környezete között érvényesülő kölcsönhatásokról, azaz a rendszer bemenő- és kimenőjeleiről. A kísérleti analízis során a jelenség olyan leírására — modelljére — törekszünk, mely utánozni képes annak lefolyását, reprodukálni a rendszer kimenőjeleit. Tiszta induktív esetben nem rendelkezünk semmilyen, a rendszer belsejére vonatkozó, strukturális ismerettel, szemünkben a rendszer „átláthatatlan” ún. „fekete doboz”. A jelenség lefolyását több, különböző struktúrájú modell képes utánozni, így az induktív modellezési módszer nem egyértelmű, legalábbis elvben *végtelen sok* lehetséges modellt eredményezhet.

A kísérleti adatok megszerzésének módja lehet: passzív és aktív.

Passzív kísérletnél a modellezendő jelenséget ún. *normális működési körülmények* között figyeljük meg. A modellező ebben az esetben nem képes, vagy nem kíván rákényszeríteni a rendszerre általa specifikált bemenőjeleket. Olyan megfigyeléseket kell elfogadnia, melyek a rendszerből és a környezetéből származnak, tőle pedig függetlenek.

Aktív kísérletnél a modellezendő jelenséget ún. *tesztjelek* segítségével befolyásoljuk és ilyen körülmények között figyeljük meg. A modellező tehát közvetlenül be-

kapcsolódik a rendszer és környezete közötti kölcsönhatásba, részben vagy teljesen befolyásolja a rendszer bemenőjeleit, a kísérlet során meghatározott tulajdonságú ún. tesztjeleket alkalmaz bemenőjelekként és megfigyeli a rendszer adta kimeneti válaszjeleket.

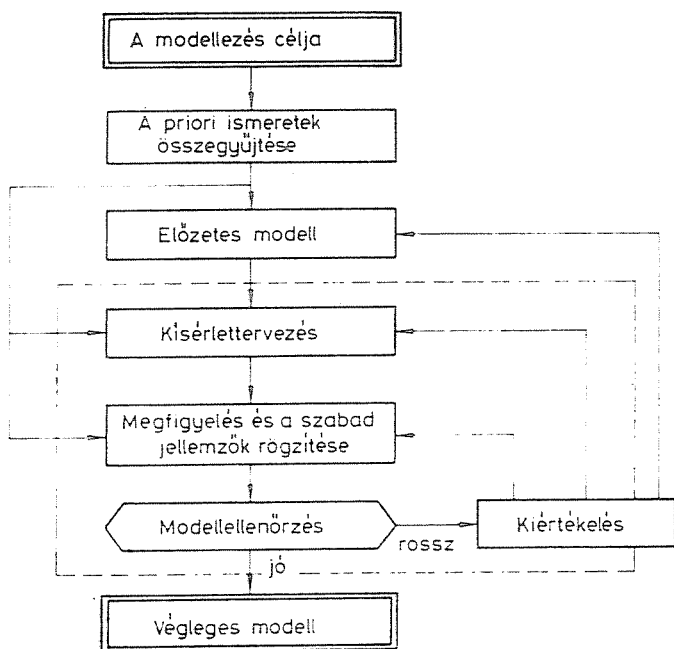
A tiszta deduktív, ill. a tiszta induktív módszer idealizálás, határesetei a gyakorlatban megvalósított modellezési folyamatnak. Az alkalmazott modellek valahol a kettő között foglalnak helyet, azoknak különböző arányú keverékei.

Az alkalmazott formális lehetőségek és általános érvényű összefüggések miatt a modell szintézisének a deduktív módszer az előnyösebb, ezért a gyakorlatban, a matematikai modell származtatásánál igyekszünk ezúton minél messzebbre eljutni és a kísérleti adatokra akkor támaszkodunk, amikor ez elkerülhetetlenné válik.

1.1.5. A modellalkotás lépései

A modellezés, mint a vizsgált jelenségre vonatkozó ismeretek megszerzésének és formális kifejezésének folyamata összetett, láncolt folyamat. A modellek egymásra épülnek, egymásból merítik a létrehozásukhoz szükséges információk egy részét. Egy konkrét modellbe zárt ismeretanyag a priori ismeret forrásaként szolgálhat egy másik modellalkotási probléma számára. Ennek megfelelően a modellezés folyamatának ábrázolása csak erős egyszerűsítésekkel lehetséges. Célja elsősorban néhány tipikus mozzanat bemutatása és semmi esetre sem egy általános modellezési metodika felvázolása. A modellalkotás ilyen egyszerűsített sémája az 1.4. ábrán látható.

A folyamat a *modellezés céljának* rögzítésével kezdődik, ami meghatározza a modell típusát és szempontokat nyújt a modell szükséges pontosságának rögzítéséhez.



1.4. ábra. A modellezés lépései

A következő lépés a modell felépítéséhez használható *a priori ismeretek összegyűjtése*, ami magában foglalja a jelenség vizsgálatánál alkalmazható törvényeket és kiegészítő ismereteket, továbbá a jelenségre vonatkozó strukturális és parametrikus információkat. Az *a priori ismeretek* birtokában végezhető el a modellalkotás deduktív szakasza, aminek eredménye az *előzetes modell* létrehozása. Az előzetes modell, az *a priori ismeretek* mennyiségétől függően több szabadságfokkal rendelkezhet, amint arról az előző pontban már szó volt. A modellnek ezen ismeretlen jellemzői specifikálják a feladatot a modellezés induktív szakasza számára, ami a jelenség empirikus vizsgálatára épül.

Az előzetes modell és az *a priori ismeretek* felhasználásával történik meg a modellen végzett megfigyelések tervének kialakítása, a *kísérlettervezés*. Passzív kísérletnél a kísérlettervezés a megfigyelendő jellemzők kiválasztását és a megfigyelés időpontjának, időtartamának rögzítését jelenti. Aktív kísérletnél ez bővül a gerjesztési pontok kiválasztásával és a tesztjelek jellemzőinek rögzítésével.

A kísérlettervezés elvégzése után következő lépés a jelenség *megfigyelése* és a nyert adatok, valamint az *a priori ismeretek* alapján az előzetes modell *szabad jellemzőinek rögzítése*.

Az így létrehozott modellt *ellenőrizni* kell, azaz meg kell vizsgálni a modell és a jelenség közötti hasonlóságot valamilyen működési jellemző és hasonlósági kritérium alapján. Amennyiben az ellenőrzés azt eredményezi, hogy a modell megfelel a modellezés céljának, akkor a modellezési folyamat lezárult és megkaptuk a *végleges modellt*. A végleges modell, mint már említettük, általában nem egyértelmű. Durván azt mondhatjuk, hogy minél kevesebb az *a priori ismeret*, annál több a modellezés célját kielégítő végleges modell.

Az ellenőrzés másik lehetséges kimenetele, hogy a modell nem kielégítő. A körülmények *kiértékelése* többféle beavatkozást eredményezhet. A legegyszerűbb esetben csak a kísérletet kell tovább folytatni és az újabb megfigyelések által nyújtott többletinformációval kell javítani a modell pontosságát. Ha ez nem vezet eredményre, akkor eggyel korábbi szinten kell beavatkozni, azaz módosítani kell a kísérlet körülményeit, tehát a megfigyelési pontok elhelyezését, az esetleges tesztjeleket. Végző esetben az is előfordulhat, hogy az előzetes modell specifikálásánál tett hipotézisek bizonyulnak helytelennek, ekkor az előzetes modellen kell lényegesebb strukturális vagy parametrikus módosítást végrehajtani.

A modellalkotás tehát több lépésből álló, iteratív jellegű folyamat, aminek eredményeként megkapjuk a vizsgált jelenség valamilyen formalizmussal kifejezett leírását, a jelenség modelljét.

A modell és modellezés lényegesebb fogalmainak áttekintése után áttérünk a mérés alapfogalmainak vizsgálatára.

1.2. A mérés alapfogalmai

A méréshez kapcsolódóan — éppen rendkívüli általánossága miatt — kialakult egy meglehetősen széles fogalomkör, aminek elemei, többnyire heurisztikus jelleggel rögzítik a szükséges alapfogalmakat. Annak ellenére, hogy a méréshez kapcsolódó fogalmak axiomatikus felépítésére történtek kísérletek [1.1] és megadható a mérés absztrakta, halmazelméleti apparátussal kifejezett modellje [1.2], célunk ezen fogalmak heurisztikus alapon való, minél egyszerűbb ismertetése. Ennek ára, hogy a tárgyalás a lehetségeshez képest kevésbé precíz, viszont így könnyebben megérthetők a mérés fogalmának értelmezésében bekövetkezett változások.

1.2.1. A mérés és modellezés kapcsolata

A mérés fogalmának értelmezéséhez mindenekelőtt a mérés és modellezés kapcsolatának elemzésére van szükség.

A modellalkotás lépéseit az előző szakaszban foglaltuk össze. Láttuk, hogy a teljes folyamatnak többnyire van egy empirikus szakasza, aminek feladata, hogy az előzetes modell szabad jellemzőit a jelenség megfigyelése segítségével rögzítse, majd a modellt a jelenséggel való összehasonlítás révén ellenőrizze. Nyilvánvaló, hogy a modellezésnek ez a kitiűntetett szakasza a mérés, aminek fő mozzanatai tehát:

- a kísérlettervezés;
- a megfigyelés és az előzetes modell szabad jellemzőinek rögzítése;
- a modell ellenőrzése;
- az ellenőrzés eredményének az első két mozzanatra vonatkozó kiértékelése.

A mérés felsorolt lépéseit az 1.4. ábrán szaggatott vonallal bekeretezve jelöltük. Az ábra szerint a mérés folyamatairól a következőket mondhatjuk.

A mérési folyamat bemenetén az előzetes modell és a vizsgált jelenségre vonatkozó a priori ismeretek vannak. Az előzetes modell szabad jellemzői specifikálják a mérési feladatot. A mérési folyamat kimenetén vagy a végleges modell jelenik meg, tehát a mérés rögzíti a specifikált szabad jellemzőket, vagy egy jelzés, ami szerint a megadott előzetes modellel a célkitűzés szerinti modellezési pontosság nem érhető el, az előzetes modellt módosítani kell. A módosítás mikéntje már a modellező feladata.

A mérési folyamat mozzanatait az előzőekben már felsoroltuk. Látható, hogy a mérési folyamat önmagában is lehet iteratív jellegű, hiszen a modell ellenőrzésének eredményeként módosításra kerülhet a mérési folyamat két első eleme.

Az eddigiek alapján megfogalmazhatjuk a mérés és modellezés kapcsolatának leglényegesebb vonatkozását, nevezetesen azt, hogy *a mérés mindig egy modellezési folyamatba van beágyazva, a mérés a modellalkotás autonóm szakasza*. Ebből a megállapításból további következtetéseket vonhatunk le.

1. A mérés fogalmának általánossági szintje lényegében megegyezik a modellezés fogalmának általánosságával, hiszen a kivételes esetnek tekinthető tiszta deduktív modellezési eljárástól eltekintve, minden modellezési folyamat tartalmaz mérési szakaszt.

2. Míg a modellezési folyamat egésze erősen kötődik a modellezett jelenség természetéhez, speciális tulajdonságaihoz, addig a mérési szakasz részeinek leírasi, tervezési módszerei nagyrészt egységesen tárgyalhatók. Ez a lehetőség a mérésnek a modellezési folyamatban elfoglalt helyéből adódik, hiszen ebben a vonatkozásban a mérési szakasz bemenetén és kimenetén az univerzális jel- és rendszerelméleti nyelven leírható matematikai modell és a hozzátartozó a priori ismeret található, ami lehetővé teszi az általános, a modellezett jelenség specifikumaitól független, egységes tárgyalást. A mérés számára egyedül a megfigyelés konkrét elvégzése tartalmaz a vizsgált jelenségre jellemző vonásokat, mivel ezen a ponton találkozik közvetlenül a mért objektum a mérést végző eszközzel. Ennek alapján jelenthető ki, hogy a mérés a modellezési folyamat autonóm szakasza, önálló általános fogalomrendszerrel és törvényszerűségekkel.

3. A mérési folyamat eredményének, a végleges modellnek a jóságát a modellezési és a mérési hiba befolyásolja. A két hibaok között nyilvánvalóan lényeges koncepcionális különbség van. A modellezési hiba a helytelen dedukció vagy pontatlan a priori ismeret mellett annak a következménye, hogy a modell — szükségszerűen — mindig egyszerűsített képe a valóságnak (lásd. szeparáció és szelekció fogalma), ami

miatt a vizsgált jelenséget csak véges pontossággal képes leírni. A mérési hiba forrásai a megfigyelési bizonytalanságok és a megfigyelt adatok kiértékeléséhez kapcsolódó pontatlanságok. A mérés és modellezés kapcsolatának következménye, hogy a modellezési hiba jelenti az ésszerű korlátot a mérés pontosságának specifikálásánál, hiszen értelmetlen dolog egy durva, pontatlan modell paramétereit nagy pontossággal és így esetleg drágán meghatározni.

A mérési és modellezési hiba közötti koncepcionális különbség megértése alapvető fontosságú a mérési folyamatok értelmezésénél, tervezésénél. A méréselmélet kizárólag a mérési hibával foglalkozik, a modellezési hiba értékelése a mérési eredménynek az adott modellezési feladatnál történő értelmezésével együtt, a modellt alkotó szakterület feladata.

A mérés és modellezés kapcsolatának áttekintése után áttérhetünk a méréssel kapcsolatos alapfogalmak értelmezésére.

1.2.2. A mérés alapfogalmainak értelmezése

Hagyományos értelmezés szerint a mérés egy fizikai vagy kémiai mennyiség nagyságának jellemzése, a választott mértékegységben kifejezett számértékével. Ezzel összhangban, a mérési eredmény egy szám és egy mértékegység, melyek az egységet és az egységhez való viszonyt rögzítik, a mérési hiba pedig a mérési eredmény tényleges és ideális értékének különbsége.

A fenti értelmezés a mai mérési problémák jó részénél nem alkalmazható. Igen egyszerű példaként szolgáljon az a mérési feladat, mikor egy digitális vezérlő belső állapotát kell megmérnünk. A mérés eredménye a vezérlő tárolóelemeinek állapota, alkalmasan kódolt formában megjelenítve. Annak ellenére, hogy nyilvánvalóan mérési feladatról van szó, a hagyományos értelmezés szerinti megfogalmazásokat több ponton nem tudjuk alkalmazni, hiszen nem egy mennyiség nagyságát mérjük, az eredmény nem feltétlenül szám, és a mértékegység sem értelmezhető a megszokott módon. Természetesen a hagyományos mérésfogalomnak ezek az ellentmondásai nemcsak a digitális rendszerek méréstechnikájában, hanem számos más területen is előjönnek (minőségellenőrzési mérések, többdimenziós identifikációs feladatok stb.), amik végül a mérés fogalmának általánosításához vezettek.

Az általánosított mérésfogalomhoz a mérésnek a modellezési folyamatban betöltött szerepén keresztül juthatunk el. Mint láttuk, a modellezés célja a vizsgált jelenség kiválasztott tulajdonságainak kifejezése a modell típusa által meghatározott formában. Ennek érdekében, első lépésként az a priori ismeretek felhasználásával definiáljuk az előzetes modellt, ami a mérési szakasz számára specifikálja, hogy a vizsgált tulajdonságot milyen jellemzők (többnyire paraméterek vagy állapotok) fejezik ki, azaz mi a mérés tárgya.

Az előzetes modell, ezekkel a szabad jellemzőkkel, egy modellosztályt rögzít, aminek azt az elemét kell a méréssel kiválasztanunk, azonosítanunk, amelyik a vizsgált jelenséghez egy adott kritérium szerint a leginkább hasonlít.

A mérés feladata tehát a vizsgált tulajdonságot legjobban reprezentáló modell kiválasztása, azaz a tulajdonság minden lehetséges megjelenését magába foglaló modellosztály többi elemétől való megkülönböztetése. Ez a célkitűzés azt jelenti, hogy egyrészt a tulajdonságot kifejező modelljellemzők lehetséges kimenetelei között valamilyen viszonynak, relációnak kell lenni, hiszen a tulajdonságok megkülönböztetése éppen e reláció alapján lehetséges, másrészt a mérésnek éppen ezt a viszonyt kell kifejeznie ahhoz, hogy a modellosztály egy elemét a többitől elkülönítve, azokhoz képest elhelyezze.

A modelljellemzők e viszonyának kifejezése a mérés során úgy történik meg, hogy a mért jellemzőkhöz a mérés, a modell jellegéhez illeszkedő szimbólumot rendel, másként megfogalmazva, a mért jellemzők halmazát *leképezi* egy szimbólumhalmazra. Ennek elemei között egy ugyanolyan típusú viszony, reláció van értelmezve, mint a modelljellemzők lehetséges kimeneteleinek halmazán, hiszen csak így lehet elérni, hogy a mérési eredmény a mért tulajdonságok közötti viszonyt fejezze ki.

Összefoglalva az előzőeket, a mérés általánosított értelmezését a következőképpen adhatjuk meg: *a mérés a mért jellemzők közötti viszony kifejezése szimbólumok közötti viszonyal.* Ennek megfelelően *a mérés a mért jellemzőket szimbólumokra, a jellemzők halmazán értelmezett viszonyt a szimbólumok halmazán értelmezett viszonyra képezi le.*

Az általánosítás néhány fontos következménye a következőkben fogalmazható meg:

1. A mérés lényege a mért jellemzők viszonyának kifejezése a többi lehetséges kimenetelhez képest és nem a mért jellemző egyszerű leképzése valamilyen szimbólumra.

2. A mérés fogalmához nem tartozik közvetlenül a számmal történő reprezentáció, a szimbólumkészlet elemei tetszőlegesen lehetnek (színek, betűk, alakzatok, fogalmak stb.).

3. A mérés nem szűkíthető le a mért jellemzők „nagyságának” kifejezésére, ez csak egy, a jellemzők halmazának elemei között értelmezhető viszonyok (relációk közül). A nagyság kifejezésére alkalmas „kisebb vagy egyenlő”, vagy „nagyobb vagy egyenlő” relációk mellett igen gyakran szükség van az ekvivalencia reláció alkalmazására, ami a halmaz elemei között azonosítást és nem sorbaállítást végez. A bevezetőben említett példánál, a vezérlő állapotának mérésénél is a mért jellemzők, tehát az állapotok halmazán az ekvivalencia relációt értelmezzük, hiszen az állapotok közötti viszony lényege a megkülönböztetés és nem valamiféle nagyság szerinti elrendezés.

A mérésfogalom általánosításával összhangban általánosítani kell a többi, méréshez kapcsolódó alapfogalmat is, így a *skála*, a *mérési eredmény* és a *mérési hiba* fogalmát.

A *skála* — mint ahogy az a mérés hagyományos értelmezéséből is ismert — a mérési eredmény értelmezéséhez szükséges információk összessége. Az általánosított mérésfogalomnál ennek megfelelően a skála a következő információkat tartalmazza:

- a mért jellemzők lehetséges kimeneteleinek definiálása;
- a mért jellemzők halmazán értelmezett relációk definiálása;
- a szimbólumok halmazának definiálása;
- a szimbólumok halmazán értelmezett relációk definiálása;
- a mért jellemzők és a szimbólumok közötti leképezés definiálása;
- a mért jellemzők halmazán értelmezett relációk és a szimbólumok halmazán értelmezett relációk közötti leképezés definiálása.

A *skálainformáció* tehát nem más, mint az adott méréshez kapcsolódó megállapodások, konvenciók együttese. Fizikai mennyiségek mérésénél a skálainformációt nemzetközi megállapodások, a *mértékrendszerek* rögzítik, és ez lehetővé teszi, hogy megadása igen tömör formában, a *mértékegység* segítségével történjék meg. Ugyancsak a fizikai mennyiségek sajátos tulajdonsága, hogy a definiált egységhez való viszony megadásával egyértelműen jellemezhető a lehetséges kimenetek közötti viszony. Minden olyan esetben azonban, ahol ilyen lehetőség nincs, a skála rögzítéséhez az összes felsorolt információt meg kell adni.

A mérési eredmény az előzőek alapján már egyszerűen értelmezhető: a mérési eredmény egy szimbólum és a skálainformáció együttese. Jól látható, hogy a hagyományos értelmezés szerinti megfogalmazás ennek speciális esete.

A mérési hiba a valóságos és ideális mérési eredmények közötti távolság, amit a szimbólumhalmazon definiált távolságmérték rögzít. Ez az általánosítás tehát annyit jelent, hogy a távolság fogalma nem szűkíthető le a különbségképzésre annak megfelelően, hogy a szimbólumhalmaz elemei nem feltétlenül a valós számok.

A fentiekben röviden áttekintettük a mérés alapfogalmainak egy általánosabb értelmezését. Ez az értelmezés lehetővé teszi, hogy a mérés fogalmait ellentmondás nélkül alkalmazzuk olyan növekvő jelentőségű területeken is, mint az végesállapotú rendszerek méréstechnikája, alakfelismerés, rendszeridentifikáció. Ismételten hangsúlyozzuk, hogy az elmondottaknak megadható egy formális leírása is, ennek ismeretése azonban nem volt célunk.

1.2.3. A mérés alapvető aspektusai

A mérést, az eredmény létrehozásához szükséges tevékenységek oldalairól megközelítve két lényeges elemre bonthatjuk, az egyik a mérendő jellemző és a szimbólum közötti leképzés megvalósítása, a másik a skálainformáció konstruálása. Ehhez a két mozzanathoz kapcsolódik egyben a mérés két alapvető aspektusa, a jel- és rendszerelméleti aspektus és a metrológiai aspektus.

A mérés jel- és rendszerelméleti aspektusa a mérendő jellemző és a hozzárendelt szimbólum közötti leképzéssel foglalkozik. Ebből a szempontból a mérési folyamat nem más, mint a *leképzést megvalósító rendszer*, a *mérőeszköz*, ami maga is egy fizikai jelenség, amelyre alkalmazhatók a jel- és rendszerelmélet fogalmai. A vizsgálat tárgya tehát a leképzés és megvalósításának fizikai körülményei, teljesen eltekintve a mérésnek a metrológiai fogalmakkal kapcsolatos vonásaitól.

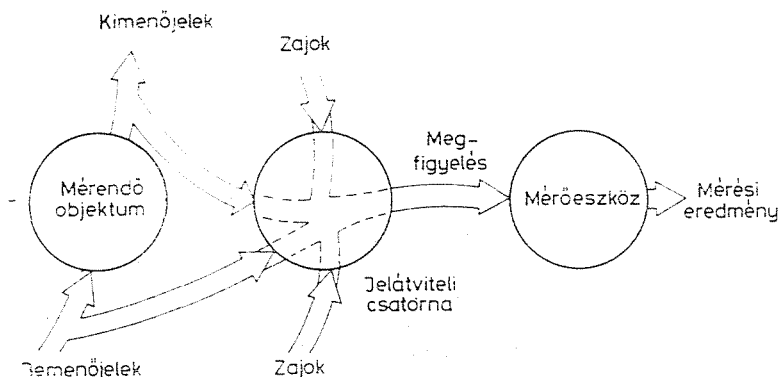
A mérési folyamatnak jel- és rendszerelméleti aspektusból való elemzésénél három komponenszt emelhetünk ki.

A *mérendő objektum* a mérést magában foglaló modellezési feladatnak a tárgya. A modell rögzítését lehetővé tevő mérendő jellemzőkre vonatkozó információt a mérendő objektum bemenő- és kimenőjelei hordozzák.

A *mérőeszköz* a mérés elvégzése érdekében kölcsönhatásba kerül a mérendő objektummal, ezek a kölcsönhatások energia és információ átadásával járó folyamatok. A mérőeszköz szelektív módon begyűjti az információt hordozó jeleket és feldolgozza a bennük rejlő információt. A feldolgozás egy műveletlánc, amelynek során a jeleket a mérés célkitűzésének megfelelő alakra hozzuk. Ezt a feldolgozást nevezzük a továbbiakban *mérési eljárásnak*. A feldolgozással együtt a mérőeszközben is szükségszerűen lezajlik egy meghatározott tulajdonságú energia- és információáramlás.

Ritka kivételtől eltekintve a mérendő objektum és a mérőeszköz között nincs közvetlen kölcsönhatás, a mérendő objektum megfigyelt jelei mielőtt eljutnának a mérőeszköz bemenetére, különböző eredetű torzító hatásoknak, zavaroknak vannak kitéve. Ennek a jelenségnek a reprezentálására vezetjük be a mérési folyamat harmadik komponensét, a *jelátviteli csatornát*, aminek tulajdonságai a mérés tervezéséhez szükséges a priori ismeretanyagnak igen fontos részei. A jelátviteli csatorna kimenetén jelenik meg tehát a mérőeszköz bemenetére kerülő megfigyelt jel.

A mérési folyamat jel- és rendszerelméleti aspektusból leírt modelljét az 1.5. ábra illusztrálja.



1.5. ábra. A mérési folyamat jel- és rendszerelméleti modellje

A mérési folyamat metrológiai aspektusa a skála konstrukciójának kérdéseivel foglalkozik. Mint a korábbiakban már utaltunk rá, a metrológia klasszikus területe a fizikai mennyiségek mérés technikájához kapcsolódik, ahol a fizika alaptörvényeire építve kialakultak a mértékrendszerek és a mértékrendszereket rögzítő alap- és származtatott egységek. A napjainkban világszerte elfogadott SI mértékrendszer felépítésével és tulajdonságaival a könyv mérés technikai részének bevezetéseként a 18. fejezetben foglalkozunk. Most mindössze annak az ismételt hangsúlyozására szorítkozunk, hogy minden jelenségsorozat mérési problémáihoz hozzátartozik a megfelelő metrológiai rendszer kialakítása is. Ezen a téren számos nyitott kérdés található, itt talán érdemes utalni az alakfelismerésre épülő minőségellenőrzési mérésekre, ahol a nemzetközileg elfogadott referenciák kidolgozása jobbra még csak kezdeti stádiumban van.

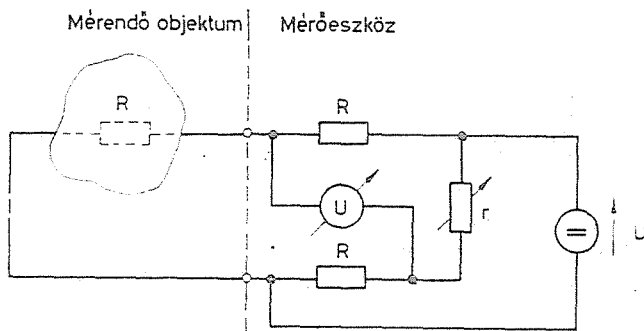
1.3. A mérési eljárások jellemzői

Ugyanúgy, ahogy a mérés alapfogalmainak értelmezését a mérésnek a modellezésben betöltött szerepe oldaláról közelítettük meg, a mérési eljárások alapvető jellemzőit is a modellezés körülményei határozzák meg. A következőkben a mérés jel- és rendszerelméleti aspektusát tartva szem előtt, összefoglaljuk a mérési eljárások fő tulajdonságait és típusait.

1.3.1. A mérési eljárás optimalitása

Az előzőekben szó volt arról, hogy jel- és rendszerelméleti aspektusból a mérés egy leképzést megvalósító rendszer, aminek bemenetén a megfigyelések, kimenetén a mérési eredmény található. E rendszer — a mérőeszköz — által megvalósított információfeldolgozás a mérési eljárás.

Felmerül a kérdés, hogy a mérési eljárás — mint rendszer — milyen specifikus tulajdonságokkal rendelkezik? A választ természetesen a mérési eljárás bemenete és kimenete közötti kapcsolat határozza meg. A bemeneten levő megfigyelések a mérendő jellemzőkre vonatkozó információt többnyire elfedve, más hatásokkal együtt hordozzák, a kimenetnek viszont — minél tisztábban — csak a hasznos információt kell tartalmaznia. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a mérési eljárásnak a mérendő jel-



1.6. ábra. A *Wheatstone*-híddal realizált mérési eljárás

lemzőkre vonatkozó információra szelektívnek kell lennie. A mérendő jellemzőket, mint tudjuk, az előzetes modell definiálja, az említett szelektivitás tehát azt jelenti, hogy a mérési eljárásnak „ismernie kell” ezt a modellt, másként kifejezve, a *mérési eljárásnak fizikailag vagy koncepcionálisan tartalmaznia kell a mérendő objektum előzetes modelljét*.

Számos jól ismert példa hozható fel arra az esetre, mikor a mérési eljárás fizikailag tartalmazza a mérendő objektum előzetes modelljét. Vegyük pl. az egyszerű *Wheatstone*-hidat (lásd. 1.6. ábra), ahol könnyen észrevehető, hogy a kiegyenlítő ellenállás a mérendő objektum fizikailag is meglevő modelljének tekinthető.

Az előzetes modell koncepcionális beépítése a mérési eljárásba egyszerűen azt jelenti, hogy a mérési eljárás tervezésénél felhasználtuk az előzetes modellt, a mérési eljárást úgy specifikáltuk, mintha az előzetes modell beépült volna a mérési eljárásba. Erre a későbbiekben mutatunk példát.

A tömörebb tárgyalás érdekében vezessük be a következő jelöléseket. Legyen $M(\alpha)$ az α szabad paraméterekkel — a mérendő jellemzőkkel — rendelkező előzetes modell. Az összes lehetséges α paraméterértékekhez tartozó modellek halmaza alkotja az $\mathcal{M}_\alpha$ modellosztályt, aminek egy kitüntetett eleme az $M(a)$ tekinthető a mérendő objektum, adott modellosztályon belüli ideális modelljének.

A mérés célja az $\mathcal{M}_\alpha$ modellosztály azon $M(\hat{a})$ elemének kiválasztása, ami a mérendő objektum $M(a)$ modelljéhez a leginkább hasonló. Ez azt jelenti, hogy a mérési eljárást egy olyan folyamatnak tekintjük, amely a mérési eljárásban fizikailag vagy koncepcionálisan meglevő $M(\alpha)$ előzetes modellt addig változtatja, amíg az $M(\hat{a})$ modellhez el nem jutunk. Nyitott kérdés még, hogy miért van szükség az $M(\hat{a})$ és $M(a)$ megkülönböztetésére, és mit jelent az, hogy „leginkább hasonló”?

$M(a)$ és $M(\hat{a})$ megkülönböztetését az teszi szükségessé, hogy elvi és gyakorlati okok miatt, a mérés során általában nem tudjuk elérni, csak megközelíteni az ideális $M(a)$ modell paramétereit. Ezekről az okokról a 3. és 4. fejezetben részletesen szó lesz.

A következő probléma a hasonlóság definiálása. A hasonlóság jellemzésére egy *hasonlósági kritériumra* van szükség, ami a hasonlóság mérésére egy mérőszámot generál.

Legyen

$$C = C[M(a), M(\alpha)]$$

a hasonlósági kritérium jelölése. Ekkor azt mondhatjuk, hogy méréssel a jelenség olyan $M(\hat{a})$ modelljét keressük az $\mathcal{M}_\alpha$ modellosztályon belül, amely az előbb értelmezett kritérium minimumát biztosítja:

$$C[M(a), M(\hat{a})] = \min_{M \in \mathcal{M}_a} C[M(a), M(a)].$$

Ennek alapján már definiálhatjuk az *optimális mérési eljárás* fogalmát: *optimális az a mérési eljárás, amely a modellezési feladathoz hozzárendelt $\mathcal{M}_a$ modellosztályból kiválasztja egy C hasonlósági kritérium minimumát biztosító $M(\hat{a})$ modellt, a mérendő objektum megfigyelése alapján. Az így meghatározott $\hat{a}$ paraméterértéket az a paramétervektor optimális becslésének nevezzük.*

Az előzőekben értelmezett optimalitás a mérési eljárások leglényegesebb tulajdonsága, hiszen a mérést, legfontosabb vonatkozása, a pontossága szempontjából jellemzi.

1.3.2. A mérési eljárások alapstruktúrái

A mérési eljárások megvalósítása, azaz a mérőeszközbe való beépítése két alapstruktúra szerint képzelhető el, az egyik az *explicit*, a másik az *implicit* struktúra.

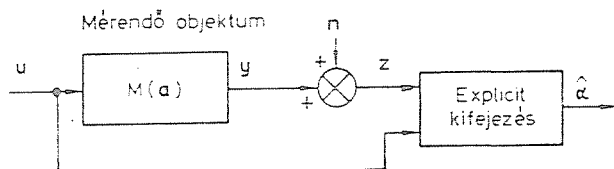
Az *explicit mérési eljárás* (más, szokásos elnevezése még: nemrekurzív, nyílt hurkú, közvetlen, egy lépéses) a következő megvalósítási módot jelenti. Feltételezzük, hogy az előzetes modell parametrikus, az ideális $M(a)$ modell paramétereire vonatkozó információt a z megfigyelések hordozzák adott u gerjesztés mellett és a hasonlósági kritérium a $C(z, u, a)$ függvény (lásd 1.7. ábra). A minimális hiba elérésének szükséges feltétele a

$$\frac{\partial C(z, u, a)}{\partial a_i} = 0; \quad a^T = [a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_m]; \quad i = 1, \dots, m \quad (1.1)$$

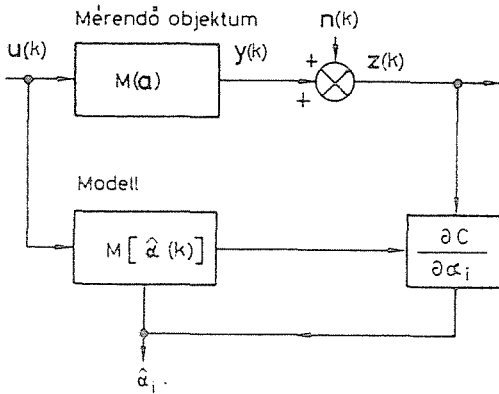
összefüggés teljesülése a modell összes a_i paraméterére. Tegyük fel, hogy az (1.1) szerinti egyenletrendszer megoldható az a_i paraméterekre, ezzel megkapjuk az optimális $\hat{a}_i$ paraméterértékek *közvetlen matematikai kifejezését*. E kifejezés független változói a kísérlet során végzett megfigyelések, a függő változók pedig maguk a paraméterek. Az explicit mérési eljárások egy tipikus esetének blokkvázlata az 1.7. ábrán látható, ahol u a mérendő objektum bemenőjele, y a kimenőjele, a jelátviteli csatorna az y kimenőjelhez valamilyen additív n zajt kever hozzá, és z az így nyert zajos megfigyelése a kimenőjelnek.

Természetesen az (1.1) összefüggés szerinti származtatási mód és az 1.7. ábrán látható blokkvázlat csak példának tekinthető. Az explicit mérési eljárások lényege az, hogy a mérési eredményt egy explicit formula szolgáltatja, ami rögzíti a megfigyelések feldolgozásának módját.

Az *implicit mérési eljárás* (más néven: modelljavító, közvetett, zárt hurkú, iteratív, rekurzív) több lépésben, iteratív önjavító algoritmussal állítja elő a mérési ered-



1.7. ábra. Az explicit mérési eljárás modellje



1.8. ábra. Az implicit mérési eljárás modellje

ményeket. Az eljárás lényege, hogy minden új megfigyeléshez származtat egy új mérési eredményt úgy, hogy a korábbi eredményt a beérkező megfigyelés valamilyen függvényével korrigálja. Mivel itt is az (1.1) feltétel betartása a cél a minimális hiba érdekében, az algoritmust úgy kell felépíteni, hogy a mérési eredmények az optimumfeltétel felé konvergáljanak, tehát:

$$\frac{\partial C(z, u, \alpha)}{\partial \alpha_i} \rightarrow 0 \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Az implicit mérési eljárások felépítése olyan (lásd 1.8. ábra), hogy magukban foglalják ténylegesen az előzetes modellt a változtatható α paraméterekkel. A mérési eljárás algoritmus a nem más, mint a hasonlósági kritérium szukcesszív meghatározása és a modellparaméterek változtatása a mérendő objektum és a mérési eljárásba épített modell egyre nagyobb hasonlósága érdekében.

Az explicit és implicit mérési eljárások összehasonlítása a következő eredményre vezet:

1. Az explicit eljárásoknál először össze kell gyűjtenünk valamennyi megfigyelési adatot, ami alapján az eljárást realizáló algoritmus véges sok lépésben meghatározza a mérési eredményt. Az implicit eljárásoknál ezzel szemben csak az újonnan megfigyelt adat és a korábbi mérési eredmény tárolására van szükség, a mérési eredmények a megfigyelésekkel együtt alakulnak, azaz a megfigyelési időszak alatt is hozzáférhetők. Ezért mondhatjuk, hogy az explicit eljárások off-line, az implicit eljárások on-line jellegű mérésekhez illeszkednek.

2. Az explicit eljárások származtatásához ismerni kell a hibakritérium analitikus formáját, hiszen annak kiértékelésével kapjuk az explicit formulát. Az implicit eljárásoknál (mint a 3. fejezetben látni fogjuk) erre nincs szükség, elég, ha a hibakritérium aktuális értékét mérjük és a hibakritérium alakjáról csak korlátozott a priori ismeretekkel rendelkezünk.

Az, hogy a mérési feladatot explicit vagy implicit struktúrájú mérési eljárással realizáljuk, általában tervezői döntés kérdése, kivéve azokat az eseteket, mikor explicit formula származtatására nincs lehetőség.

A mérési eljárások alapstruktúráinak vizsgálata után áttérünk a mérési eljárások főbb típusainak összefoglalására.

1.3.3. A mérési eljárások típusai

A mérési eljárások fő típusait a mérési eljárás származtatásánál alkalmazott modell jellege, a mérési eljárás realizálásának módja és a mérendő objektum modelljének típusa szerint különböztetjük meg.

Determinisztikus mérési eljárások

A mérési eljárás származtatási módjára vonatkoztatva, a determinisztikus jelző nem jelent mást, mint azt, hogy a kritérium megfogalmazásánál és az optimumfeltétel meghatározásánál nem használjuk a valószínűségelmélet apparátusát. A valószínűségelméleti apparátus alkalmazásának, ill. mellőzésének hátterét a mérendő objektumra és a megfigyelési szituációra vonatkozó a priori ismeret jellege képezi. Durván azt mondhatjuk, hogy amennyiben egy jelenség teljesen ismert, vagy éppen ellenkezőleg, semmit nem tudunk róla, akkor determinisztikus leírást használunk. Ha a jelenségről vannak részleges ismereteink, akkor azok kifejezésére az egyik előnyösen alkalmazható lehetőség a valószínűségszámítási modellek használata.

A determinisztikus mérési eljárás tehát nem azt jelenti, hogy a mérési folyamat hibamentes, hanem mindössze azt, hogy a származtatásánál kizárólag determinisztikus modelleket alkalmazunk.

Sztochasztikus mérési eljárások

A sztochasztikus mérési eljárások jellemzője, hogy a származtatásuknál valószínűségelméleti modelleket alkalmazunk. Az ilyen modellek alkalmazásának tipikus helyei a mérési folyamaton belül: a mérendő objektum bemenőjele és kimenőjele, a jelátviteli csatorna zaja, továbbá a mérendő jellemzőkre vonatkozó a priori ismeretek kifejezése.

Folytonos idejű mérési eljárások

A folytonos idejű mérési eljárásoknál a mérési eljárást realizáló rendszer és az információfeldolgozás módja analóg elvű. Analóg elvű realizálást elsősorban egyszerűbb mérési eljárásoknál alkalmazunk, ahol viszonylag kisszámú elemből szintetizálható a berendezés és a megkövetelt pontosság nem túl nagy.

Diszkrét idejű mérési eljárások

A mérési eljárások realizálásának másik módja a digitális elvű felépítés. A digitális berendezések időben diszkrét rendszerek, ezért az így megvalósított mérési eljárásokat az ennek megfelelő apparátussal kell leírni. A nagyintegráltságú félvezető elemek elterjedésének köszönhetően a bonyolultabb mérőrendszerek többnyire digitális felépítésűek, ezért a 3. és 4. fejezetben, ahol a mérési eljárások tervezési módszereit tárgyaljuk, a hangsúlyt a diszkrét idejű módszerekre helyezzük.

Parametrikus mérési eljárások

A mérendő objektum modelljének — és ehhez kapcsolódóan a mérendő jellemzőnek — két alapvető típusa a parametrikus és a nemparametrikus modell. Parametrikus modellnél a mérési feladat véges sok ismeretlen modellparaméter rögzítése, amit vagy diszkrét, vagy folytonos mérési eljárással tehetünk meg. A mérés bonyolultsága szem-

pontjából egyértelműen a paraméteres modellek a kedvezőbbek, származtatásukhoz azonban strukturális jellegű a priori ismeretekre van szükség, ami nem mindig áll rendelkezésre.

Nemparametrikus mérési eljárások

Nemparametrikus mérési eljárásoknál a mérendő jellemző egy vagy több folytonos változó függvénye. Jól ismert példák erre a lineáris hálózatok frekvenciaátviteli karakterisztikája, vagy egy sztochasztikus folyamat autokorreláció függvénye. Nemparametrikus modellekhez tipikusan be-/kimeneti jellegű rendszerleírásoknál jutunk, amikor a mérendő objektum „fekete doboz” jellegű.

A mérési eljárások típusainak áttekintésével lezárjuk a mérés és modellezés általános problémáinak taglalását. Összefoglalásként ismételten hangsúlyozzuk a fejezet leglényegesebb megállapítását, miszerint *a mérés mindig egy modellezési folyamat része*, aminek ugyan megvannak az általánosítható tulajdonságai és sajátos problémafelvetései, de a mérés alapfogalmának megértése, interpretálása csak a modellezéssel való kapcsolatának tisztázása útján lehetséges.

2. Jelek és rendszerek

A mérendő jel vagy rendszer modellezése során olyan jellemzőket (tulajdonságokat, törvényeket) keresünk, melyek valamilyen értelemben „stabilitást” mutatnak, és ennélfogva számszerű értékeik (vagy függvényeik) alkalmasnak mutatkoznak az éppen vizsgált objektum valamilyen szempont szerinti (részleges vagy teljes) leírására. Teljesen természetesnek vesszük, hogy a periodikus jeleket pl. a periódusidejükkel jellemezzük, a hálózatok vizsgálatánál *Ohm* és *Kirchhoff* törvényeit használjuk, a sztochasztikus jeleket pedig különféle momentumaival írjuk le.

Ez a fejezet ezeknek a jellemzőknek a kiválasztásával, a jelek, ill. a rendszerek reprezentálásával kapcsolatos alapvető ismereteket foglalja össze. Ezek az ismeretek szolgálnak kiindulási alapként a mérési eljárások analízise és szintézise során is.

A legfontosabb alapfogalmak körülhatárolását és kapcsolataik vázolását a 2.1. szakasz tartalmazza. Ennek a szakasznak az a célja, hogy az Olvasó áttekintő képet kapjon a jel- és rendszerelméleti módszer lényegéről és a méréselméletben betöltött szerepéről.

A jelek alapvető leírási módjait tárgyalja a 2.2. szakasz. Áttekintí az időben folytonos és az időben diszkrét jelek leírási módszereit, ezeknek a módszereknek a kapcsolatát, valamint a sztochasztikus folyamatok reprezentálásával kapcsolatos alapvető eljárásokat.

A gyakorlatban használt jelmodellek többnyire adott problémakörhöz kapcsolódva, nemegyszer empirikus úton jöttek létre. Ebből adódóan összevetésük és értékelésük sokszor rendkívül nehéz. Egy célszerűen megalkotott absztrakt matematikai struktúra, a *jeltér* fogalmának bevezetésével azonban lehetőség nyílik a rendelkezésre álló jelmodellek tulajdonságainak általánosabb szintű elemzésére, másrészt ezen jelmodellek általánosítására, közös jellemvonásainak kiemelésére. Ezekkel a kérdésekkel a 2.3. szakasz foglalkozik.

A különféle jelábrázolási módszerek és a jelfeldolgozás gyakorlati eljárásai szoros kölcsönhatásban állnak egymással. Az elméletileg egyenértékű jelábrázolási módszerek gyakorlati kivitelezhetősége jelentősen eltérő lehet, ugyanakkor a gyakorlati kivitelezhetőség számos elméleti problémát vet fel. Néhány ilyen kérdést vázol a 2.4. szakasz.

A rendszerekkel kapcsolatos alapvető leírási módszereket a 2.5. szakasz tartal-

mazza. Összefoglalja a reprezentáció lehetőségeit a bemenő- és a kimenőjel közötti közvetlen kapcsolat felhasználásával, majd rátér az állapotegyenleten alapuló leírási módokra. Tárgyalja a megfigyelhetőség, vezérelhetőség és identifikálhatóság fogalmait, valamint röviden a stabilitás kérdését is.

A jel- és rendszermodellek kiválasztását sokféle, sokszor egymásnak ellentmondó szempont alapján kell a gyakorlati munka során elvégeznünk. Ezeknek a problémáknak az illusztrálására néhány, a gyakorlat szempontjából fontos témakört vázolunk a 2.6. szakaszban.

2.1. Bevezetés

Ebben a szakaszban összefoglaljuk a *jel- és a rendszerelmélet* néhány fontos alapfogalmát. A fogalmak tárgyalásánál elsősorban a méréselméleti vonatkozásokat emeljük ki. Ezt azért tartjuk szükségesnek kihangsúlyozni, mivel ezek a fogalmak meglehetősen általánosak, és ennél fogva sokféle szempont szerint értelmezhetők.

2.1.1. A jel és a rendszer fogalma

A mérés során konkrét jelenségeket vizsgálunk. *Jelen* általában egy konkrét jelenség olyan jellemzőjét értjük, mely információt hordoz valamilyen objektumra vonatkozóan. Bármilyen természetű legyen is a jel, végső soron mindig objektumok valamilyen kölcsönhatása révén jön létre.

A *rendszer* kölcsönhatások és kölcsönös összefüggések által összekapcsolt objektumok halmaza. Egy ilyen halmaz elemeit és határait a figyelembe vett kölcsönhatások és kölcsönös összefüggések jelölik ki.

A *jel és a rendszer* fogalmának méréselméleti jelentősége nyilvánvalóvá válik, ha arra gondolunk, hogy méréseink során mérőeszközünk mindig kölcsönhatásba lép valamilyen objektummal, tehát rendszerrel van dolgunk, továbbá a kölcsönhatás következtében a kívánt információ mindig jel segítségével jut el hozzánk.

A különféle objektumok közötti kölcsönhatások többféleképpen elemezhetők, alapvető szempont azonban, hogy ezek a kölcsönhatások egyrészt *energiaátadással*, másrészt *információátadással* járnak. Fogalmazhatunk úgy is, hogy a kölcsönhatások egyik oldala az, hogy energiafolyamatok, egy másik oldala pedig az, hogy információátadással járó folyamatok. Lényegesnek tartjuk kihangsúlyozni, hogy ugyanazon jelenség két oldaláról van szó. Ezt előrebocsátva természetesen hangzik, hogy információátadásra csak energiaátadással egyidejűleg, azáltal kísérve kerülhet sor, továbbá, hogy megfelelő mennyiségű a priori ismeret birtokában az energiaátadással járó folyamatokhoz információs kapcsolatot is rendelhetünk.

Az objektumok közötti kölcsönhatások alapvető sajátossága az is, hogy időben zajlanak le, és így a kölcsönhatások megfigyelő szempontjából kitüntetett összetevőinek, az eseményeknek egymásutániságáról, és ennek alapján a rendszer „fejlődéséről” beszélhetünk.

A kölcsönhatások jellege és kimenetele objektív törvényszerűségek által irányított, ill. meghatározott. Ez a tény alapvető fontosságú a jelek és rendszerek jellemzőinek kutatásánál, ugyanis ezeknek a törvényszerűségeknek a feltárása révén olyan ismeretek birtokába jutunk, melyek későbbi vizsgálataink során mint a priori információk állnak rendelkezésünkre.

A kölcsönhatásokkal kapcsolatos ismereteink meghatározott formában kerülnek felhasználásra. Kitéüntetett szerepet játszik az információk azon csoportja, mely a rendszer *állapotát* rögzíti. Egy rendszer állapotának a benne fellépő kölcsönhatások adott időpontra vonatkozó viszonyait megadó információk összességét nevezzük. A rendszer állapota a kölcsönhatások jellegétől, mennyiségi viszonyaitól függően rendkívül sokféle lehet, mégis egy rendszer állapotának ismerete alapvetően két dolog ismeretét jelenti. Egyrészt ismerni kell a rendszer szerkezetét, belső felépítésének formáját. Ez általában a rendszer elemei közötti tartós összefüggések formájában jelenik meg. Másrészt az összefüggések mennyiségi viszonyainak ismerete szükséges. Az előbbi a *rendszer struktúrájának*, az utóbbit a *rendszer paramétereinek* nevezzük. Koncentrált paraméterű hálózatokra gondolva, pl. a struktúra nem más, mint a hálózat topológiája, az elemek kapcsolódási módja, a paraméterek pedig az egyes elemértékek; az energiatárolókon mutató intenzitásviszonyok, valamint a gerjesztések pillanatértékei.

2.1.2. Jel- és rendszermodellek

A kölcsönhatásokra vonatkozó ismereteink rendszerezésének egy másik formája az, melynek során a kölcsönhatások jellegzetességeitől függő alcsoportokat hozunk létre. Ezek az alcsoportok alkotják a különféle *modellosztályokat*, melyek a jelek és rendszerek viselkedésmódjának adott szempontok szerinti leírását tartalmazzák. Az egyes modellek a figyelembe veendő szempontok, továbbá az absztrakció szintjétől függően sokfélék lehetnek. Jellegüket az is befolyásolja, hogy a mérési feladat megfogalmazásánál milyen célt tűztünk magunk elé. Vannak olyan esetek, amikor elegendő a „statikus” viszonyok ismerete, az „állandósult állapot” rögzítése, máskor jellemezni kell a „dinamikus” viszonyokat, lehetőséget kell teremteni a jövőbeni viselkedés (közelítő) megadására, vagy biztosítani kell az optimális működés feltételeit.

A mérési eljárások tervezése során többnyire a jelek és rendszerek *matematikai modelljét* használjuk. Ezeknek a modelleknek a felállításával, elemzésével, továbbalakításával a *jel- és a rendszerelmélet* foglalkozik. A következőkben röviden áttekintjük azokat a megfontolásokat, melyek az egyes modellosztályok megalkotásához elvezettek, és felsoroljuk a fontosabb modellek főbb jellegzetességeit.

A modellezés általános kérdéseivel foglalkozó szakasz alapján ismert, hogy a modell elkészítésének folyamata egybeesik a jelenséggel való ismerkedés folyamatával. Egy jellel vagy rendszerrel azonban csak úgy ismerkedhetünk meg, hogy megfigyeljük, ill. megmérjük bizonyos jellemzőit (jellemző változóit, paramétereit). Ezt viszont csak akkor tehetjük meg, ha a priori ismereteink alapján meg tudjuk mondani, hogy például a vizsgált rendszer mely pontján és hogyan mérve juthatunk el hasznosítható információkat hordozó jelekhez, ill. hol és hogyan lépünk kölcsönhatásba valamilyen objektummal annak érdekében, hogy a megmérendő jellemzőkhöz „hozzáférjünk”.

A matematikai modell elkészítése során a jeleket, ill. a rendszert azzal identifika-
ljuk, hogy megadjuk jellemzőit, ill. jellemző változóinak kapcsolatát és azok mennyiségi viszonyait. Az elkészített modell absztrakt matematikai objektumok közötti absztrakt matematikai kapcsolatokat ad meg. Matematikai fogalmakkal élve azt mondhatjuk, hogy a *rendszer absztrakt reláció*. Fizikai rendszerek esetén ez a reláció fizikai törvények által meghatározott kölcsönhatásokat hordoz matematikai formában. Egy impedancia feszültsége és árama eleget kell tegyen *Ohm* törvényének, a villamos hálózatok belső kapcsolatait a *Kirchhoff*-törvényekkel írjuk le, stb. A jel- és rendszerelméleti modell megalkotásakor ezeket a törvényszerűségeket használjuk fel.

Ezeknek a törvényszerűségeknek a sokrétűsége igen sokféle modellfajta létrejöttéhez vezetett mind a jelekkel, mind a rendszerekkel kapcsolatosan. Mégis azt mondhatjuk, hogy az egyes modellfajták alapvetően két szempont figyelembevételével születnek. Az egyik szempont a vizsgált objektumok, ill. kölcsönhatások jellege, míg a másik a kitűzött cél, a megoldandó mérési feladat jellege. Csak a két szempont együttes figyelembevételével dönthető el, hogy a vizsgálatba milyen objektumokat kell bevonnunk, mely kölcsönhatásokat kell dominálóaknak tekinteni, ill. az események időbeni és térbeni lefolyását hogyan vegyük figyelembe.

Jelmodellek

Sztochasztikus jelek

Sztochasztikus jelmodellt használunk, ha a jelet létrehozó kölcsönhatások „kimenetele” a megfigyelő számára véletlennek tűnik elsősorban abból adódóan, hogy a kölcsönhatások létrejöttének okát azok nagy száma és bonyolultsága miatt nem ismeri, vagy a jelenség fizikai természetéből adódóan nem ismerheti. Sztochasztikus jelmodell alkalmazása esetén a kölcsönhatások „kimeneteléhez” (valószínűségelméleti eredmények felhasználásával) *valószínűségeloszlást* rendelünk. Ezt úgy tesszük (legalábbis elyenben), hogy a jelet kiváltó kölcsönhatást nagyon sokszor létrehozzuk, és az eredményeket a matematikai statisztika módszereivel kiértékeljük. Ez a lehetőség, mint ismeretes, azon alapszik, hogy a véletlen tömegjelenségek egyik alapvető tulajdonsága relatív gyakoriságuk stabilitása (nagy számok törvénye). Sztochasztikus jelmodell használatakor ezek szerint valamilyen ismerettel kell rendelkezünk a kölcsönhatások valószínűségi jellemzőire vonatkozóan. Mivel az eloszlásfüggvényeket sok esetben nem ismerjük, a modell alkalmazásakor közelítő érvényű hipotézissel élünk. A jelenségek sokrétűségéből és összetettségéből adódóan az eloszlásfüggvényekre vonatkozó hipotézis felállításánál sokszor segítségünkre van a *központi határeloszlás tétel*, mely a *normális eloszlás* széles körű alkalmazhatóságát támasztja alá.

Sztochasztikus jelmodellel dolgozhatunk olyan esetben is, ha a kölcsönhatások „kimenetele” a megfigyelő számára egyáltalán nem véletlen, mivel a kölcsönhatás valamilyen összetevőjét ismeri, azonban a mérési feladat jellege szempontjából elegendő a jel valószínűségi jellemzőinek ismerete (pl. átlagérték, szórás). Ezt a megközelítést indokoltá teheti az is, hogy bizonyos esetekben a valószínűségi jellemzők származtatása egyszerűbb eszközöket igényel, mint a kimenetel „pontos” regisztrálása.

Maguk a sztochasztikus jelmodellek is több csoportra oszthatók. Ezeket a csoportokat a véletlen jelenségek tulajdonságai (eloszlása, időfüggése, stb.) alapján definiálják.

Determinisztikus jelek

Determinisztikus jelmodellt használunk, ha a jelet létrehozó kölcsönhatások „kimenetele” a megfigyelő számára egyértelműen meghatározottnak tűnik, és a mérési feladat jellege is ennek alkalmazását indokolja. Bizonyos esetekben determinisztikus jelmodellt alkalmazunk akkor is, ha a kölcsönhatások „kimenetele” a megfigyelő számára sem tűnik egészen egyértelműen meghatározottnak, de a valószínűségi viszonyok nem ismertek, és valamilyen feltételezett valószínűségeloszlás alkalmazása helyett várhatóan jobb eredményt érünk el, ha determinisztikus modellel dolgozunk.

A determinisztikus jelek is több csoportra oszthatók. A felosztást alapvetően befolyásolja az a matematikai apparátus, amely ezen modellek alkalmazása során használható.

Folytonos jelek

Folytonos jelmodell alkalmazása esetén azt akarjuk biztosítani, hogy a jelet létrehozó kölcsönhatás jellemzésére a vizsgált térrész tetszőleges pontjában egy adott időintervallumon belül tetszőleges időpillanatban lehetőség nyíljon. A folytonos jelmodellek leírásához hatékony matematikai apparátus áll rendelkezésre, némileg hátrányt jelent azonban, hogy ez nem illeszkedik közvetlenül a digitális jelfeldolgozás széles körben elterjedt eszközeihez.

A folytonos jelmodellek kapcsán meg kell jegyezni, hogy méréseink során sohasem tudjuk egy időben változó jel pillanatértékét meghatározni, mivel a mérés energiaátadással jár, és ez sohasem végtelen rövid időtartamú. Ugyanilyen oknál fogva a méréssel csak a tér egy kitüntetett tartományának jellemzésére nyílik lehetőség, egyetlen pontban mérni nem tudunk.

Diszkrét jelek

Diszkrét jelmodellek használata esetén a jelet létrehozó kölcsönhatás információs oldala olyan, hogy „jellemezésére” közvetlenül csak a vizsgált térrész kitüntetett pontjaiban, kitüntetett időpillanatokban kerül sor. Ilyen modell alkalmazását indokolhatja pl. az, hogy a vizsgált kölcsönhatás intenzitása csak kitüntetett pontok környezetében és/vagy kitüntetett időpillanatokban számottevő. Sokkal jelentősebb azonban, hogy bizonyos, a gyakorlat szempontjából nem túl szigorú feltételek (a mintavételi törvények) teljesülése esetén ez a modell a folytonos esettel egyenértékű leírást ad. A kitüntetett tér- és időpontok egyenletes elhelyezkedése esetén a diszkrét jelmodellek leírására is legalább olyan hatékony matematikai eszközök állnak rendelkezésünkre, mint folytonos esetben. Kedvező sajátosság, hogy ezek a módszerek jól illeszkednek a digitális jelfeldolgozás eszközeihez.

Rendszermodellek

A jeleket az imént az őket létrehozó kölcsönhatás „kimenetele” és „jellemzési módja” szerint csoportosítottuk. A rendszereket ezeken a szempontokon kívül a kölcsönhatás „jellege” szerint is csoportosítjuk, és a csoportosításnál most a rendszer struktúrájának és paramétereinek alakulását elemezzük.

Sztochasztikus rendszerek

Sztochasztikus rendszermodellt alkalmazunk, ha a kölcsönhatások révén a megfigyelő a rendszer belső összefüggéseit (struktúráját és/vagy paramétereit) véletlennek látja, ill. a mérési feladat megoldása szempontjából egy ilyen jellegű megközelítés kedvezőnek mutatkozik. Sztochasztikus rendszermodell esetén a rendszer belső összefüggéseinek valószínűségi jellemzőiből indulunk ki, ill. ha nem ismerjük ezeket, a priori ismereteink felhasználásával valamilyen feltételezéssel élünk ezekre vonatkozóan.

Determinisztikus rendszerek

Determinisztikus rendszermodell használatára kerül sor, ha a rendszer belső összefüggései (struktúrája és paramétere) a megfigyelő számára egyértelműen meghatározottak tűnnek, és a mérési feladat jellege is egyértelműen ennek alkalmazását indokolja.

Folytonos rendszerek

Folytonos rendszermodell esetén elvileg a vizsgált térrész minden pontjában és minden időpontban jellemezni tudjuk a rendszer belső összefüggéseit. Ezek az összefüggések természetesen matematikai absztrakciók eredményei. „Mégmérésüknél” a folytonos jelek kapcsán már megemlített korlátokba ütközünk, melyek azonban részben az absztrakció finomításával, ill. precízebb mérési összeállítások alkalmazásával a feladat szempontjából feloldhatók.

Diszkrét rendszerek

Diszkrét rendszermodell esetén a rendszer jellemzésére közvetlenül csak a vizsgált térrész kitüntetett pontjaiban és kitüntetett időpontokban nyílik lehetőség. Ilyen jellegű modell felállítása akkor lehet indokolt, ha a vizsgált objektumok a tér kitüntetett részeire koncentrálhatók, és a kölcsönhatások jellege olyan, hogy elegendő csak kitüntetett időpontokban jellemezni őket. Ezekről eltérő pontokban sok esetben a rendszer összefüggései nem értelmezhetők (egy más rendszerrel van dolgunk), vagy a diszkrét jelekhez hasonló módon, bizonyos feltételek teljesülése esetén az összefüggések a diszkrét pontokban rendelkezésre álló információk alapján feltárhatók.

Felosztott paraméterű rendszerek

Felosztott paraméterű rendszermodellt használunk, ha a rendszer belső összefüggései a vizsgált térrészben a megfigyelő számára a helykoordináták valamilyen függvényeként mutatkoznak, és a mérési probléma jellege olyan, hogy nem lehetséges olyan modellt alkalmazni, mely csak makroszkopikus méretű, homogénnek tekinthető térrészelemek kölcsönhatásait veszi figyelembe.

Koncentrált paraméterű rendszerek

Koncentrált paraméterű rendszermodellt alkalmazhatunk, ha a mérési feladat szempontjából megengedhető olyan modell, melyben csak makroszkopikus méretű térrészelemek szerepelnek, és ezeket belső helykoordinátáktól függetlenül tudjuk jellemezni, valamint a kölcsönhatások is függetlenek a belső helykoordinátáktól. Ezt a modellfajtát használjuk legelterjedtebben viszonylagos egyszerűségénél fogva, valamint azért, mert ennek a tárgyalására áll rendelkezésre a legjobban kidolgozott matematikai apparátus.

Idővariáns rendszerek

Idővariáns rendszermodellt használunk, ha a rendszer összefüggései az idő függvényében változnak, és ennek figyelembevétele a mérési feladat szempontjából indokolt.

Időinvariáns rendszerek

Időinvariáns rendszermodellt alkalmazhatunk, ha vizsgálatunk szempontjait nézve a rendszer összefüggései időtől függetlennek tekinthetők. Ez a feltételezés, noha végső soron durvább a modell, a rendelkezésre álló matematikai eszközök miatt mindenképpen kedvező, így hacsak lehet, törekszünk ilyen modellek használatára.

Nemlineáris rendszermodell-válik szükségessé, ha a rendszer belső összefüggései a kölcsönhatások intenzitásvizonyaitól függenek. Ez a függés rendkívül sokféle lehet, ennek megfelelően sokféle nemlineáris rendszertípus létezik. A nemlineáris rendszermodellek kezelése elég nehéz, viszonylag bonyolult apparátust igényel.

Lineáris rendszerek

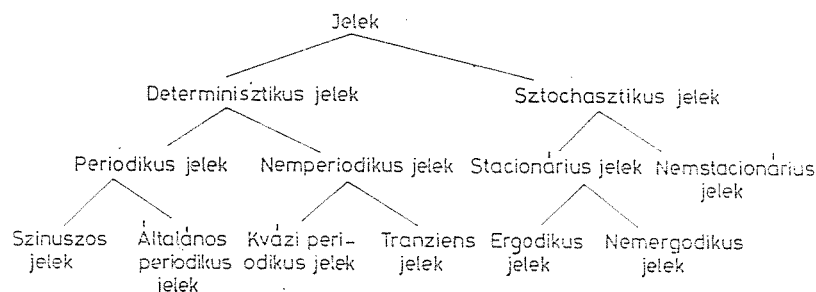
Lineáris rendszermodell alkalmazása esetén azt feltételezzük, hogy vizsgálatunk szempontjait tekintve megengedhető, hogy a rendszer belső összefüggéseit a kölcsönhatások intenzitásvizonyaitól függetlennek tekinthessük. Ekkor alkalmazható a *szuperpozíció*, ami a matematikai kezelhetőség szempontjából rendkívül kedvező.

A teljesség kedvéért meg kell említeni, hogy különbséget teszünk az ún. *statikus* és az ún. *dinamikus* rendszermodellek között. A statikus rendszerek azzal jellemezhetők, hogy bennük az energiaszintekkel kapcsolatosan csak energiaátalakítást tapasztalhatunk, a feladat szempontjából „hasznosított” energiátárolást nem. Dinamikus rendszereknél a kölcsönhatások részben az energiátárolási jelenségek által meghatározottak, időbeni lefolyásukat a tárolt és a továbbítandó energiamennyiségek időbeni alakulása határozza meg. A valóságos folyamatok többnyire dinamikus rendszermodellel jellemezhetők, de sok mérési feladat esetében a statikus megközelítés is elegendő.

2.2. Jelek alapvető leírási módjai

Ebben a szakaszban azokat a módszereket foglaljuk össze, melyek általánosan elterjedtek, mivel gyakorlati alkalmazásuk többnyire nem ütközik nehézségbe, ill. a felmerült problémák jelentős részére az idő folyamán sikerült kielégítő megoldást találni. Ezek a leírási módszerek egyrészt a jelmodell felállításánál vannak segítségünkre, a különféle jelek matematikai modelljét hozzák létre, másrészt a regisztrált jelek feldolgozásánál játszanak fontos szerepet.

Az előző szakaszban röviden vázoltunk néhány jelmodell osztályt, és vázoltuk azt is, hogy ezek közül adott esetben melyiknek alkalmazása indokolt. Jellegzetes tulajdonságok figyelembevételével további csoportosítás lehetséges, az egyes osztályok alosztályokra bonthatók. Az alosztályok egyrészt fizikai megfontolásokból, másrészt a rendelkezésre álló matematikai eszközök adottságai révén különülnek el. A jelek egy szokásos csoportosítását a 2.1. ábra mutatja.



2.1. ábra. A jelek egy szokásos csoportosítása

Ezt a felosztást követjük mi is a következőkben. Előbb a *determinisztikus jelek* leírásával foglalkozunk, majd rátérünk a *sztochasztikus jelek* reprezentációira. A gyakorlat szempontjait tekintve kitüntetett szerepet játszanak a különféle jelek időben diszkrét reprezentációi, ezért a folytonos reprezentációk mellett ezeket is részletesen tárgyaljuk, majd kitérünk az időben folytonos és az időben diszkrét reprezentációk kapcsolatára is. Az egyes módszerek és a különféle jelfeldolgozási eljárások kapcsolatát ebben a szakaszban csak röviden érintjük, a témakör valamivel részletesebb tárgyalását a 2.4. szakasz tartalmazza. A jelek leírása nem választható el teljes mértékben a rendszerek leírásától. A jelet reprezentálhatjuk rendszermodellel és viszont, a fordított megoldásra is több lehetőség mutatkozik. Az alábbiakban elsősorban rendszermodellről független eljárásokat vázolunk, a leírási módszerek dualitásának bemutatására a 2.5. és 2.6. szakaszokban kerül sor.

2.2.1. Időben folytonos jelek leírása

Determinisztikus jelek leírására természetes módon kínálkozik a jel-idő függvény, melyet egyszerűen lehet grafikusán ábrázolni. A további elemzés, feldolgozás szempontjából azonban sokszor kedvezőtlen, mivel az időfüggvény önmagában végtelen sok adatot jelent. Általában igyekszünk a jelet a lehető legkevesebb adattal leírni. Ezzel egyidejűleg törekszünk olyan (közös) jelösszetevők feltárására, melyekből a vizsgált jelek egy-egy családja felépíthető, vagy legalábbis adott szempontok szerint kielégítően jellemezhető. Fogalmazhatunk úgy is, hogy a jelek leírására első lépésként valamilyen „struktúrát” alkotunk (ill. választunk), majd a paramétereket rögzítjük. A struktúra a vizsgált jelben mutatkozó tartós tulajdonságokat leíró modellösszetevő, a paraméterek pedig a mennyiségi viszonyokat adják meg.

Szinuszos jelek

Szinuszosnak nevezzük azokat a jeleket, melyek leírására alkalmas a következő jel-modell

$$M_s = \{x; \quad x(t) = Re[e^{z + j(2\pi f_0 t + \theta)}], \quad -\infty < t < \infty, \quad \alpha, f_0, \theta \in R\}, \quad (2.1)$$

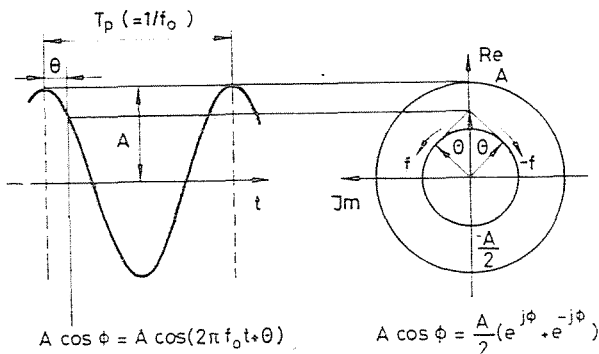
vagy egyenértékű megfelelője

$$M_s = \left\{x; \quad \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \lambda^2 x(t) = 0, \quad -\infty < t < \infty, \quad \lambda \in R\right\}. \quad (2.2)$$

ahol M_s a szinuszos jelek modellosztályát jelöli,

- x a modellosztály egy eleme,
- t a független (idő) változó,
- α valós konstans, a jelamplitúdó paramétere,
- f_0 valós konstans, a szinuszos jel frekvenciája,
- θ valós konstans, a szinuszos jel kezdőfázisa,
- R a valós számok halmaza,
- $\lambda = 2\pi f_0$.

A szinuszos jel időfüggvényét, komplex vektorral való leírhatóságát a 2.2. ábra mutatja be. Látható, hogy a szinuszos jelek leírására három paraméter (A, T_p, θ) elegendő.



2.2. ábra. A szinuszos jel időfüggvénye és reprezentációja ellenkező irányban forgó komplex vektorok összegeként

Periodikus jelek

A periodikus jelek közös tulajdonságát kifejező modell az alábbi:

$$M_P(T_p) = \{x; x(t+T_p) = x(t), -\infty < t < \infty\}, \quad (2.3)$$

ahol $M_P(T_p)$ a T_p periódusidejű periodikus jelek osztályát jelöli.

Ezzel csaknem egyenértékű, de a gyakorlat szempontjából sokkal kedvezőbb a következő megadás, amely a *Fourier*-sorba fejthető periodikus függvények osztályát ($M_{PF}(T_p)$) jelöli ki:

$$M_{PF}(T_p) = \left\{ x; x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n2\pi f_0 t + B_n \sin n2\pi f_0 t), \right. \\ \left. -\infty < t < \infty, A_0, A_n, B_n f_0 \in \mathbb{R} \quad \forall n \right\}. \quad (2.4)$$

($\forall n$ jelentése: minden n -re.)

Az egyenértékűség ugrásokat nem tartalmazó, a T_p intervallumban négyzetesen integrálható függvényekre vonatkozik, mely feltételek a gyakorlatban majdnem mindig teljesíthetők. Ez a reprezentáció lehetővé teszi, hogy a periodikus jeleket az A_0 , A_n , B_n ($n=1, 2, \dots$) ún. *Fourier-együtthatókkal* jellemezzük. Elvileg végtelen sok *Fourier-együttható* írja le az $x(t)$ jelet, a gyakorlatban azonban elegendő véges számú is egy adott pontosságú reprezentációhoz. A *Fourier*-sorok fontos tulajdonsága, hogy négyzetintegrálra nézve konvergensek, ezért véges számú *Fourier*-komponens esetén a jel gyors változása szakaszainál túllendülés (kiemelés) tapasztalható: a közelítés hibája ide koncentrálódik.

A *Fourier*-soroknak több ekvivalens alakja van, ezeket, továbbá az együtthatók kiszámítására szolgáló összefüggéseket a 2.1. táblázat tartalmazza. (A *Fourier*-sorral történő reprezentáció csak egy lehetőség a jelek ortogonális függvényrendszer segítségével történő leírására. A 2.3. szakaszban részletesen tárgyaljuk az ortogonális függvényrendszerekkel történő reprezentációk minőségi jellemzőit és származtatási módját.)

A *Fourier*-soros leírásban szereplő paraméterek összességét a periodikus jel *spektrumának* nevezzük. Ezt a spektrumot a frekvencia függvényében ábrázolva ún.

A Fourier-együtthatók kiszámítására alkalmas összefüggések

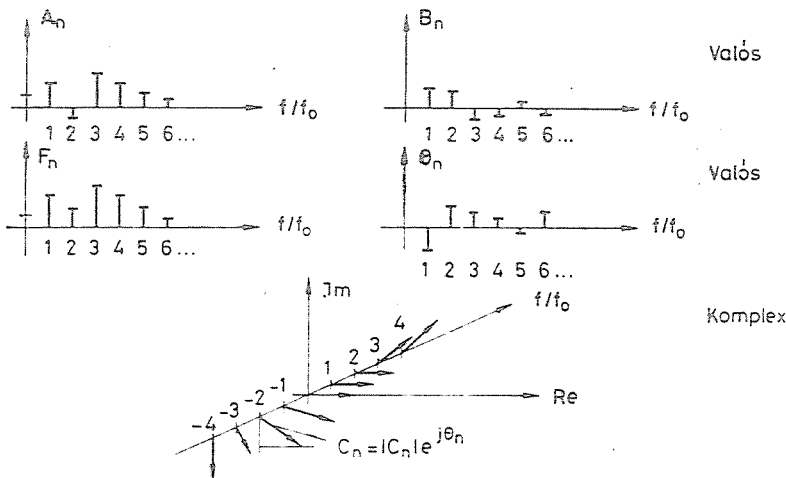
$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n2\pi f_0 t + B_n \sin n2\pi f_0 t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos (n2\pi f_0 t + \Theta_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn2\pi f_0 t}$$

$A_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) dt$ $A_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) \cos n2\pi f_0 t dt$ $B_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) \sin n2\pi f_0 t dt$ $A_n = 2 \operatorname{Re} C_n$ $B_n = -2 \operatorname{Im} C_n$	$F_0 = A_0$ $F_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ $\operatorname{tg} \Theta_n = -\frac{B_n}{A_n}$ $F_n = 2 C_n $ $\Theta_n = \arg C_n$	$C_n = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) e^{-jn2\pi f_0 t} dt$ $C_0 = F_0, C_n = \bar{C}_{-n}$ $C_n = \frac{1}{2} (A_n - jB_n), n \neq 0$ $C_n = \frac{1}{2} F_n e^{j\Theta_n}$
---	---	---

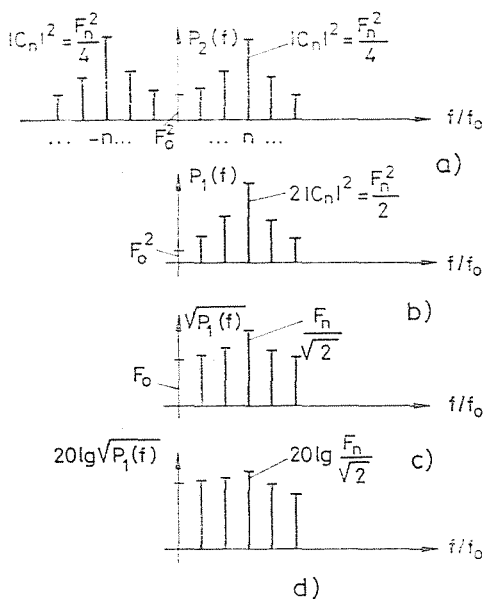
vonalas spektrumot kapunk (2.3. ábra). Egyszerű, és a gyakorlatban jól használható kapcsolat áll fenn a Fourier-együtthatók és a periodikus jel által szállított energia között.

A periodikus jel átlagteljesítménye :

$$P_{\text{átlag}} = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} x^2(t) dt = F_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n^2}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2. \quad (2.5)$$



2.3. ábra. Periodikus jelek spektruma



2.4. ábra. Periodikus jelek teljesítményspektruma

a kétoldalas teljesítményspektrum; b egyoldalas teljesítményspektrum; c effektívérték-spektrum; d effektívérték-spektrum dB-ben ábrázolva

A jelteljesítmény alakulását a frekvencia függvényében az ún. *teljesítményspektrum* fejezi ki. Tipikus megjelenési formáit a 2.4. ábra foglalja össze.

Kváziperiodikus jelek

A kváziperiodikus jelek tulajdonságait kifejező matematikai modell:

$$M_{KP} = \left\{ x; x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos 2\pi f_n t + B_n \sin 2\pi f_n t), \right. \\ \left. -\infty < t < \infty, A_0, A_n, B_n, f_n \in \mathbb{R} \forall n \right\}, \quad (2.6)$$

melynek $f_n = n f_0$, $\forall_n$ mellett fellépő speciális esete a *Fourier-sorral* történő reprezentáció. A kváziperiodikus jelek, ezt az elfajuló esetet kivéve, nem rendelkeznek véges periódusidővel. Spektrumuk vonalas, de a spektrumvonalak nem egy alaphfrekvencia egész számú többszöröseinél helyezkednek el. Ilyen tulajdonságú jelmodellt használunk számos jelátviteli feladat megoldása során (modulációs rendszerek), de mérés-technikai problémáknál is fontos lehet, ahol elsősorban annak eldöntése a feladat, hogy a regisztrált jelet egy vagy több független, önmagában periodikus jelet szolgáltató forrás hatása hozza létre. Az első esetben periodikus jelet regisztrálunk, az utóbbiban rendszerint kváziperiodikus jelet.

Tranziens jelek

Tranziens jeleknek azokat az egyszeri nemperiodikus folyamatokat nevezzük, melyek véges energiájúak:

$$M_T = \left\{ x; \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty \right\}. \quad (2.7)$$

A műszaki gyakorlatban szereplő tranziens jelek jellemzésére elsősorban mérés-technikai megfontolásokat követve bevezettek néhány praktikus időtartománybeli paramétert (felfutási idő, beállási idő, túllövés, stb.), melyek azonban csak *részleges leírást* adnak. A *teljes leírásra* kedvezőbb lehetőség nyílik a frekvenciatartományban a *Fourier-transzformáció* és a *Laplace-transzformáció* révén. A *Fourier*-sorral történő reprezentációhoz hasonlóan itt is elmondhatjuk, hogy a *Fourier*-, ill. a *Laplace*-transzformáció elméletileg csak egy-egy lehetőség a jelek integráltranszformációval történő reprezentálására. Ebben a szakaszban, jelentőségüknél fogva csak a *Fourier*-, ill. a *Laplace*-transzformációkkal foglalkozunk, az általánosabb szintű megközelítést a 2.3. szakasz tartalmazza.

Ha $x(t)$ -re teljesül:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty, \text{ azaz abszolút integrálható,}$$

b) véges intervallumon belül csak véges számú helyi szélsőértéke van,

c) véges intervallumon belül csak véges számú szakadása van,

akkor *Fourier*-transzformálható, az

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (2.8)$$

integrál létezik. Az inverz transzformáció:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df. \quad (2.9)$$

A *Fourier*-transzformáció szokásos felírási módjait a 2.2. táblázat foglalja össze.

A *Fourier*-transzformációval nyert függvények f szerint folytonosak, ezért ezeket folytonos spektrumoknak nevezzük. A tranziens jel által szállított energia frekvenciatartománybeli eloszlását a *Fourier*-transzformációval egyszerűen számíthatjuk, ugyanis érvényes a

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\bar{X}(-f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = 2 \int_0^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (2.10)$$

egyenlőség (*Parseval-tétele*), tehát $|X(f)|^2$ az *energiaspektrumot* adja.

A *Fourier*-transzformált előállítható abban az esetben is, ha $x(t)$ egy abszolút integrálható és egy $f_0 = 1/T_p$ alaphérfrekvenciával *Fourier*-sorba fejthető jelkomponens összegeként jön létre. Ekkor

$$X(f) = X_1(f) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(f - nf_0), \quad (2.11)$$

ahol $X_1(f)$ az abszolút integrálható rész transzformáltja; $\{C_n\}$ pedig a periodikus rész komplex *Fourier*-együtthatója. ($\{C_n\}$ jelöli a C_n , $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ *Fourier*-együtthatók halmazát).

A gyakorlat szempontjából fontos az az eset, amikor a tranziens jel $t=0$ pillanat előtt nulla, azaz

A Fourier-integrál számításával kapcsolatos összefüggések

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \frac{A(f) - jB(f)}{2} = |X(f)| e^{j\Phi(f)}$$

$A(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos 2\pi ft dt$	$ X(f) = \frac{1}{2} \sqrt{A^2(f) + B^2(f)}$	$X(-f) = X^*(f)$
$B(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin 2\pi ft dt$	$\operatorname{tg} \Phi(f) = -\frac{B(f)}{A(f)}$	$ X(-f) = X(f) $ $\operatorname{arc} X(-f) = -\operatorname{arc} X(f)$
$A(f) = 2 \operatorname{Re} X(f) = 2 X(f) \cos \Phi(f)$ $B(f) = -2 \operatorname{Im} X(f) = -2 X(f) \sin \Phi(f)$		$A(-f) = A(f)$ $B(-f) = -B(f)$

$$x(t) = \int_0^{\infty} (A(f) \cos 2\pi ft + B(f) \sin 2\pi ft) df$$

$$x(t)|_{t < 0} = \int_0^{\infty} (A(f) \cos 2\pi ft + B(f) \sin 2\pi ft) df|_{t < 0} = 0. \quad (2.12)$$

Ezt az összefüggést felhasználva:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 2 \int_0^{\infty} A(f) \cos 2\pi ft df & t \geq 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

ill.

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 2 \int_0^{\infty} B(f) \sin 2\pi ft df & t \geq 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Ezek szerint a komplex spektrum valós és képzetes része külön-külön meghatározza a belépő jel időfüggvényét. Mindebből következik, hogy a valós rész kifejezhető a képzetes résszel és viszont. A Fourier-transzformáció alkalmazásával

$$A(f) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} B(\lambda) \sin 2\pi \lambda t \cos 2\pi ft d\lambda dt, \quad (2.15)$$

$$B(f) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} A(\lambda) \cos 2\pi\lambda t \sin 2\pi f t \, d\lambda \, dt. \quad (2.16)$$

A komplex függvénytan eredményeinek felhasználásával ha $X(s)$ ($s = \sigma + j\omega$) analitikus a komplex sík jobb oldalán és annak határán, továbbá

$$\lim_{f \rightarrow \infty} X(j2\pi f) = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{A(f)}{2} = \text{állandó},$$

akkor,

$$A(f) - A(\infty) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\eta)}{f - \eta} \, d\eta, \quad (2.17)$$

$$B(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\eta)}{f - \eta} \, d\eta, \quad (2.18)$$

ahol

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{f-\varepsilon} + \int_{f+\varepsilon}^{\infty} \right); \quad \varepsilon > 0.$$

Ez utóbbi összefüggéseket az $\ln X(s) = \ln |X(s)| + j \arg X(s)$ függvényre alkalmazva (abban az esetben, ha az a jobbfélsíkon analitikus $\ln |X(f)|$ és $\phi(f)$ kapcsolatát kapjuk meg. (Ezek az eredmények a hálózatelelméletben *Bode tételei* néven ismertek.)

A műszaki gyakorlatban elterjedt egységimpulzus és egységugrás jelek hatásának *Fourier-transzformációs* módszerrel történő nyomonkövetése során konvergencia-problémák merülnek fel. Ennek kiküszöbölésére a *Fourier-transzformációt* egy $e^{-\sigma t}$ (ahol $\sigma > 0$) faktoriall módosítják a konvergencia érdekében:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} \, dt, \quad s = \sigma + j\omega. \quad (2.19)$$

Ily módon a majdnem mindenütt egyértékű $x(t)$ jelek transzformálhatók, ha létezik egy olyan c szám, melyre

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T |x(t)| e^{-ct} \, dt < \infty. \quad (2.20)$$

Ezt a transzformációt *belépő jelekre* értelmezzük, és *egyoldalas Laplace-transzformációnak* nevezzük.

Az inverz transzformáció:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} X(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} \, ds. \quad (2.21)$$

A Laplace-transzformáció alkalmazásakor általában nem a (2.19), ill. a (2.21) összefüggéseket használjuk, hanem a transzformáltakat táblázatból vesszük. A Laplace-transzformáció legfontosabb tulajdonságait és néhány egyszerű függvény transzformáltját a 2.3. táblázat mutatja be. (Ha a reprezentálandó jel nem belépő, tehát nem azonosan nulla $t < 0$ esetén, akkor az ún. kétoldalas Laplace-transzformációt használjuk, amely ismét csak a (2.19) szerint számítható azzal az eltéréssel, hogy ilyenkor az integrálást $-\infty$ -tól $+\infty$ -ig kell elvégezni.)

2.3. táblázat

A Laplace-transzformációval kapcsolatos összefüggések

A Laplace-transzformáció néhány tétele:		
Tulajdonság	$x(t)$	$X(s)$
Linearitás	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$
Deriválás	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(-0)$
Integrálás	$\int_0^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(s)}{s}$
Komplex deriválás	$t^n x(t)$	$(-1)^n \frac{d^n X(s)}{ds^n}$
Eltolás	$\varepsilon(t - \tau)x(t - \tau)$	$e^{-s\tau}X(s)$
Csillapítás	$x(t)e^{-\alpha t}$	$X(s + \alpha)$
Konvolúció	$\int_0^t x_1(t - \tau)x_2(\tau) d\tau$	$X_1(s)X_2(s)$
Kezdeti érték	$\lim_{t \rightarrow 0} x(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$
Végérték	$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$

Laplace-transzformált párok:

Időtartomány $x(t)$	s -tartomány $X(s)$
$\delta(t)$	1
$\varepsilon(t)$	$1/s$
$\frac{t^{n-1}e^{-\alpha t}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s + \alpha)^n}$
$\frac{2t^{n-1}e^{-\alpha t}}{(n-1)!} \cdot (a \cos \beta t - b \sin \beta t)$	$\frac{a - jb}{(s + \alpha - j\beta)^n} + \frac{a + jb}{(s + \alpha + j\beta)^n}$

2.2.2. Időben diszkrét jelek leírása

Az időben diszkrét jelmodellek időtartománybeli jellemzésére az $\{x_n\}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ valós (vagy komplex) számsorozatot használjuk. $\{x_n\}$ az ún. *diszkrét jel*, n pedig a diszkrét időváltozó. A gyakorlat szempontjából általában annak a speciális esetnek van jelentősége, amikor a diszkrét értékek időbeni távolsága T_s (az ún. mintavételezési idő) állandó. Ha a reprezentáció egy időben folytonos $x(t)$ jel leírására vállalkozik, akkor formálisan azt írhatjuk, hogy $x_n = x(nT_s) \quad \forall n$ -re. A mintavételezésnek ez a matematikai interpretációja teljes mértékben kielégítő mind elméleti, mind gyakorlati szempontból, mégis nagyon sok helyen a mintavételezés fizikai kivitelezése kapcsán ettől eltérő megfogalmazással találkozunk. Ezek szerint a mintavételezés fizikai folyamatát egy impulzusorozattal történő modulációval modellezzük a következő módon:

$$x^*(t) = T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s), \quad (2.22)$$

ahol $x(t)$ a mintavételezésre kerülő folytonos jel, $x^*(t)$ a mintavételezést megvalósító egység kimenőjele, tehát a mintavételezett jel.

A mintavételezés T_s periódusidejének jelenlétét egyrészt dimenzionális okok indokolják, másrészt az az igény, hogy $x^*(t)$ energiáját tekintve is összevethető legyen az $x(t)$ jellel. Integrálva ugyanis (2.22) jobb oldalát az idő szerint azt kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_s x(nT_s). \quad (2.23)$$

Az időben diszkrét jelmodellek időtartománybeli reprezentálása — elsősorban a szabályozástechnikai irodalomban — a (2.22) alakú összefüggésre épül. Elterjedtségénél fogva a következőkben az ezzel a reprezentációval kapcsolatos főbb megállapításokat is (alkalmas formában) vázolni fogjuk.

Frekvenciatartománybeli reprezentáció

Az időben diszkrét jelek frekvenciatartománybeli reprezentációját három megközelítésben mutatjuk be.

Frekvenciatartománybeli reprezentáció a periodikus jelek tulajdonságai alapján:

Az időben diszkrét jelek leírásánál fontos szerephez jutnak a frekvenciatartományban periodikus jelek. (A frekvenciatartományban a periodicitást az időtartománybeli T_p periódusidővel teljes analógiában egy B_p „periódus frekvenciával” jellemezzük.) Defináljuk ugyanis az $X(f) \in M_{PF}(B_p)$ Fourier-sorát a következőképpen:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{-jn \frac{2\pi}{B_p} f}, \quad (2.24)$$

ahol (a 2.1. táblázat segítségével, és $C_{-n} = D_n$ jelöléssel):

$$D_n = \frac{1}{B_p} \int_0^{B_p} X(f) e^{jn \frac{2\pi}{B_p} f} df. \quad (2.25)$$

Ezek szerint az $X(f)$ jel leírható egy $\{D_n\}$ diszkrét sorozat segítségével, melyet értelmezhetünk az időtengely mentén is, mégpedig úgy, hogy az egyes mintákat egymástól rendre $T_s = 1/B_p$ távolságra elhelyezkedőknek tekintünk. A gondolatmenetet meg

fordítva egy $\{x_n\}$ diszkrét sorozat frekvenciatartománybeli megfelelője egy olyan periodikus függvény lesz, melynek „periódus frekvenciája” $B_p = 1/T_s$.

Ha $\{x_n\}$ frekvenciatartománybeli reprezentációja $X(f)$, akkor csak az marad hátra, hogy x_n és D_n kapcsolatát megadjuk. A (2.24—2.25) összefüggéseket elemezve látható, hogy ezt a kapcsolatot egy konstans szorzó erejéig elvben tetszőlegesen rögzíthetjük. A következőkben elsősorban a fizikai mintavételezéshez kötődő szempontok miatt [lásd (2.38)] az

$$x_n = D_n B_p = D_n / T_s \quad (2.26)$$

megfeleltetést használjuk. (Egy másik szokásos megfeleltetés $x_n = D_n$).

Mindezek alapján az időben diszkrét „tranzienst” jel frekvenciatartománybeli leírásával kapcsolatos összefüggések:

$$X(f) = \frac{1}{B_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-jn \frac{2\pi}{B_p} f} = T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-jn 2\pi T_s f}, \quad (2.27)$$

$$x_n = \int_0^{B_n} X(f) e^{jn \frac{2\pi}{B_p} f} df = \int_0^{1/T_s} X(f) e^{jn 2\pi T_s f} df. \quad (2.28)$$

Az eddigiekben vázolt gondolatmenet alapján látható, hogy az idő-, ill. frekvenciatartománybeli reprezentációk nagyfokú szimmetriát mutatnak. Erre a szimmetriára alapozva néhány további érdekes következtetésre juthatunk:

— a frekvenciatartományban diszkrét és periodikus jelnek az időtartománybeli megfelelője is diszkrét és periodikus;

— felhasználva a (2.8) és (2.9) összefüggések szimmetriáját: a frekvenciatartományban nem periodikus, „tranzienst” jelek az időtartományban folytonosak;

— a frekvenciatartományban kváziperiodikus jelek az időtartományban nem egyenletes mintavételi idejű diszkrét jeleknek felelnek meg.

A legelső megállapítás alapvető a *digitális jelfeldolgozás* szempontjából, ezért ezzel az esettel a továbbiakban részletesebben is foglalkozunk.

Induljunk ki abból, hogy az időben diszkrét jel periodikus is. Mint látni fogjuk, a jelek véges időtartamú volta (véges regisztrátumhossz) következtében ez az eset kitüntetett szerephez jut, mivel a véges időtartamú jelet felfoghatjuk egy periodikus jel egyetlen periódusaként. A periodikus jelek felírhatók *Fourier*-sor alakban. Tételezzük fel, hogy egy diszkrét jel periódus N mintából áll, ($T_p = NT_s$). N legyen páros. (Páratlan N esetére az összefüggések hasonló módon származtathatók.) Mivel N adatból $N/2$ komplex *Fourier*-együttható számítható, csak olyan jelek egyértelmű reprezentálására nyílik lehetőség ezzel a modellel, melyek

$$\frac{N}{2} \frac{1}{T_p} = \frac{1}{2T_s} \quad (2.29)$$

értéknél kisebb frekvenciájú komponensekből állnak. (Mintavételi tétel, lásd 2.2.3. pont.) Csak ilyen esetekre szorítkozva a 2.1. táblázatban szereplő összefüggések analógiájára a diszkrét *Fourier*-sor:

$$x_k = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} C_n e^{j \frac{2\pi}{N} nk}; \quad k=0, 1, \dots, N-1, \quad (2.30)$$

ahol

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}; \quad -\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} - 1. \quad (2.31)$$

Legyen

$$X_n = \begin{cases} C_n & 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1, \\ C_{n-N} & \frac{N}{2} \leq n \leq N-1. \end{cases} \quad (2.32)$$

Ezzel (2.30), ill. (2.31):

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad (2.33)$$

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \quad (2.34)$$

alakban írható. Ezt a diszkrét trigonometrikus polinompárt nevezzük *diszkrét Fourier-transzformációnak* (DFT), mely központi jelentőségű a digitális jelfeldolgozásban. Az eddigiekben vázolt reprezentációk főbb jellegzetességeit a 2.5. ábra foglalja össze.

(Megjegyezzük, hogy sokszor a (2.33–2.34) transzformációt úgy definiálják, hogy az $1/N$ tényező az $\{x_k\}$ -t megadó inverz transzformáció összefüggésében szerepel. Ez annak az esetnek felel meg, melynél (2.26) helyett $x_n = D_n$ választással élünk.)

Frekvenciatartománybeli reprezentáció a moduláló impulzussorozat tulajdonságai alapján. A frekvenciatartománybeli reprezentáció származtatható a (2.22) összefüggésből kiindulva is. A mintavételezést modellező (modulálatlan) impulzus sorozat

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

periodikus függvény $C_n = \frac{1}{T_s} (\forall n)$ Fourier-együtthatókkal:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j \frac{2\pi}{T_s} nt}. \quad (2.35)$$

Ezek szerint a mintavételezett jel [lásd (2.22)]:

$$x^*(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j \frac{2\pi}{T_s} nt}, \quad (2.36)$$

melynek Fourier-transzformáltja:

$$X_*(f) = \mathcal{F}\{x^*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j \frac{2\pi}{T_s} nt} \right] e^{-j 2\pi f t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X \left(f - \frac{n}{T_s} \right). \quad (2.37)$$

A modulált impulzus sorozat Fourier-transzformáltja tehát periodikus függvény, és előállítható a folytonos $x(t)$ jel $X(f)$ Fourier-transzformáltjából. Ugyanakkor $X_*(f)$ Fourier-sorba fejthető [vö. a (2.27) összefüggéssel]:

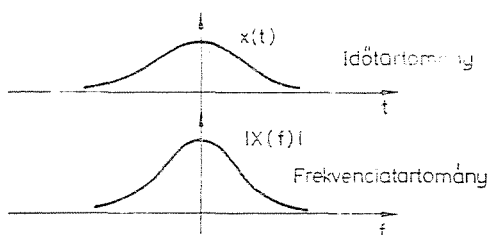
$$X_*(f) = T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) e^{-j 2\pi f n T_s}. \quad (2.38)$$

1. FOURIER-INTEGRÁL

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

Végtelen és folytonos idő- és frekvenciatartomány

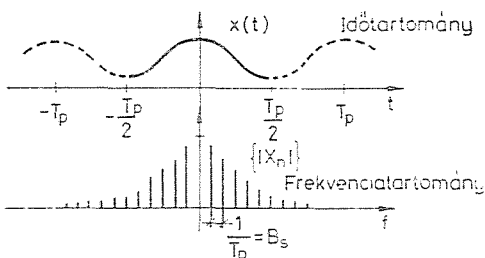


2. FOURIER-SORFEJTÉS

$$X_n = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t) e^{-jn2\pi t/T_p} dt$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn2\pi t/T_p}$$

Periodikus és folytonos időtartomány, diszkrét frekvenciatartomány

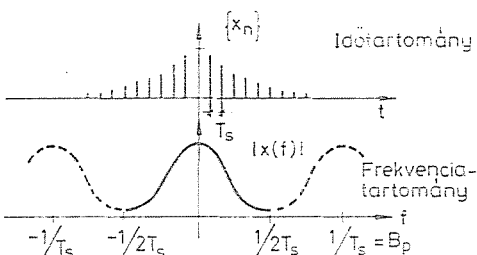


3. MINTAVÉTELEZETT JELEK

$$X(f) = T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-jn2\pi Ts f}$$

$$x_n = \int_{-1/2T_s}^{1/2T_s} X(f) e^{jn2\pi Ts f} df$$

Diszkrét időtartomány, periodikus frekvenciatartomány

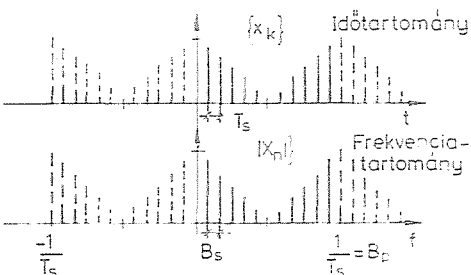


4. DISZKRÉT FOURIER-TRANSZFORMÁCIÓ

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j \frac{2\pi nk}{N}}$$

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j \frac{2\pi nk}{N}}$$

Diszkrét idő- és frekvenciatartomány



2.5. ábra. Fourier-típusú reprezentációk

Ismerjük meg a gondolatmenetet a frekvenciatartománybeli leírásra vonatkozóan (B_s a frekvenciatartományban a szomszédos minták távolsága):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nB_s) = \frac{1}{B_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j \frac{2\pi n f}{B_s}} \quad (2.39)$$

A frekvenciatartománybeli $X(f)$ jel $X^*(f)$ mintavételezett megfelelője:

$$X^*(f) = X(f) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j \frac{2\pi}{B_s} n f}. \quad (2.40)$$

Az inverz *Fourier*-transzformáció alkalmazásával:

$$x_*(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X^*(f)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(t - \frac{n}{B_s}\right). \quad (2.41)$$

A frekvenciatartománybeli „modulált impulzussorozat” inverz *Fourier*-transzformáltja tehát periodikus függvény, és előállítható a folytonos $x(t)$ időfüggvényből. Ugyanakkor $x_*(t)$ *Fourier*-sorba fejthető:

$$x_*(t) = B_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nB_s) e^{jn2\pi B_s t}. \quad (2.42)$$

Az $x(t)$, $x^*(t)$, $x_*(t)$, valamint az $X(f)$, $X^*(f)$, $X_*(f)$ jelek kapcsolatát a 2.6. ábra mutatja be. Látható, hogy a mintavételezéssel származtatott $x_*(t)$ és $X_*(f)$ függvények átlapolódás következtében eltérnek az $x(t)$, ill. az $X(f)$ jelektől. Ha azonban

$$x(t) = 0 \quad t < t_0 \quad \text{és} \quad t \geq t_0 + 1/B_s \quad (t_0 \text{ valós állandó}), \quad (2.43)$$

ill.

$$X(f) = 0 \quad f < -\frac{1}{2T_s} \quad \text{és} \quad f > \frac{1}{2T_s}, \quad (2.44)$$

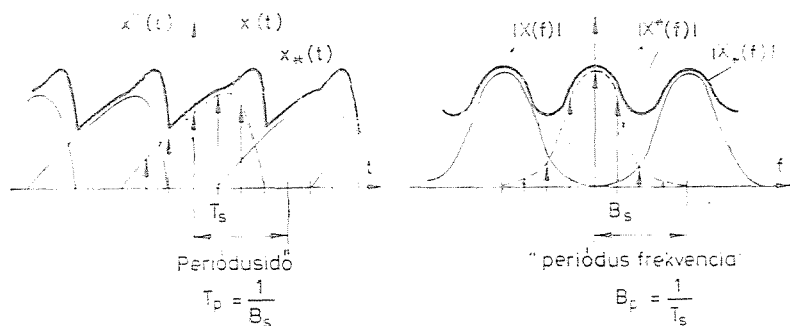
akkor

$$x(t) = x_*(t) \quad t_0 \leq t \leq t_0 + 1/B_s, \quad (2.45)$$

ill.

$$X(f) = X_*(f) \quad -\frac{1}{2T_s} \leq f \leq \frac{1}{2T_s}. \quad (2.46)$$

Ezek szerint a (2.43—2.44) feltételek betartása esetén lehetőség nyílik a kölcsönösen diszkrét idő- és frekvenciatartománybeli reprezentációra, melyet a (2.33—2.34) összefüggéssel definiált diszkrét *Fourier*-transzformáció valósít meg.



2.6. ábra. Az $x(t)$, $x^*(t)$ és $x_*(t)$, valamint az $X(f)$, $X^*(f)$ és $X_*(f)$ jelek kapcsolata

Megjegyzés:

1. Ha $x(t)=0$ $t < 0$ és $x(0) \neq 0$, az ugrás miatt

$$X_*(f) = \mathcal{F}\{x^*(t)\} = T_s \frac{x(0)}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \quad (2.47)$$

alakú, mivel a transzformáció az ugráshelyeken a jobb, ill. a bal oldali határértékek számtani közepét helyettesíti be. Ez esetünkben egy

$$T_s \frac{x(0)}{2} \delta(t)$$

nagyságú komponens, melynek spektruma

$$T_s \frac{x(0)}{2}.$$

2. A *Fourier*-transzformációra épülő matematikai jelmodell értelmében a sávkorlátozott frekvencia-spektrumú jelek időben végtelen hosszúságúak, az időben véges hosszúságú jelek pedig nem sávkorlátozott frekvenciaspektrumúak. Ezek szerint a véges idő, ill. a véges frekvenciasáv alapján történő kölcsönös megfeleltetés csak periodikus időfüggvény, ill. spektrum feltételezése mellett képzelhető el. Ugyanakkor nem szabad figyelmen kívül hagyni, hogy a valóságban nem tudjuk kimutatni, hogy pl. egy véges időtartamú jelhez végtelen sávzélességű spektrum tartozik, ill. megfordítva, hogy véges sávzélesség végtelen időtartamot jelent. Ez a tény pontosan az alkalmazott matematikai modell érvényességi határára utal, amit sosem szabad figyelmen kívül hagyni. A *Fourier*-transzformációra épülő modell azonban a fenti korlát ellenére a gyakorlat szempontjából kielégítő pontosságúnak mutatkozik.

Frekvenciatarománybeli reprezentáció a Laplace-transzformáció felhasználásával. A modulált impulzus sorozat jellemzésére a *Laplace*-transzformációs módszert is használhatjuk. A (2.37) összefüggéshez hasonlóan írható, hogy:

$$X_*(s) = \mathcal{L}\{x^*(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(s + j \frac{2\pi}{T_s} n\right). \quad (2.48)$$

A *Laplace*-transzformációt egyoldalas esetre definiáltuk, ezért itt is

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}; \quad \text{ahol } x(t) \equiv 0 \quad t \leq 0 \text{ esetén.}$$

Ha $x(0) \neq 0$, akkor a (2.47) összefüggéssel analóg módon:

$$X_*(s) = T_s \frac{x(0)}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(s + j \frac{2\pi}{T_s} n\right). \quad (2.49)$$

Ugyanakkor a (2.38) összefüggés megfelelője:

$$X_*(s) = \mathcal{L}\{x^*(t)\} = T_s \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s) e^{-nsT_s}. \quad (2.50)$$

$e^{sT_s} = z$ helyettesítéssel az egyoldalas z transzformáció kifejezéséhez jutunk:

$$X_*(z) = T_s \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s) z^{-n}. \quad (2.51)$$

Szokás ezt a transzformációt a *Laplace*-transzformációtól függetlenül is definiálni. (Az alábbiakban a * indexet elhagyjuk.) Az $\{x_n\}$ $n=0, 1, \dots$ diszkrét sorozat z transzformáltja:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = \mathcal{Z}\{x_n\}, \quad (2.52)$$

minden olyan z -re, melyre ez a kifejezés konvergens. $X(z)$ a konvergenciatartományban ($|z| \leq 1$) analitikus, tehát pólusai, ill. szingularitásai a komplex z sík egységsugarú körén belül helyezkednek el.

A (2.51) és (2.52) összefüggések eltérnek a T_s tényezőben. Ezt azzal szokták át-hidalni, hogy az időegységet $T_s = 1$ formában rögzítik. Mi a továbbiakban kizárólag az eddigi összefüggésekkel való összhang érdekében a T_s tényezőt megtartjuk, tehát a

$$X(z) = T_s \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \quad (2.53)$$

definíciót használjuk. A $z = e^{j2\pi f T_s}$ helyettesítéssel élve

$$X(f) = T_s \sum_{n=0}^{\infty} x_n e^{-j2\pi f n T_s}, \quad (2.54)$$

azaz $X(f)$ periodikus $1/T_s$ „periódusfrekvenciával”, és *Fourier*-együtthatói a $T_s x_n$ értékek. Ezek szerint

$$x_n = \int_0^{1/T_s} X(f) e^{j2\pi f n T_s} df, \quad (2.55)$$

ill. $z = e^{j2\pi f T_s}$ és $dz = j2\pi f T_s z df$ felhasználásával

$$x_n = \frac{1}{2\pi j T_s} \oint_C X(z) z^{n-1} dz, \quad (2.56)$$

ahol C az egységsugarú kör. A (2.56) összefüggés az inverz z -transzformáció komplex kifejezése, mely a reziduumentétel felhasználásával értékelhető ki. A z -transzformáció néhány fontos tulajdonságát és néhány egyszerű függvény transzformáltját a 2.4. táblázat mutatja be.

Megjegyezzük, hogy a kétoldalas *Laplace*-transzformációhoz hasonlóan definiálható a kétoldalas z -transzformáció is. Ennek definíciós összefüggése ugyancsak a (2.52) összefüggés szerinti, de a szummázást $-\infty$ -tól ∞ -ig kell elvégezni.

2.2.3. Kapcsolat a diszkrét idejű és a folytonos idejű jelábrázolás között

Az időben diszkrét jelek frekvenciatartománybeli reprezentációjának összefüggéseit elemezve felmerül a kérdés, hogy milyen feltételek mellett lehet egy időben folytonos jelet időben diszkrét jellel reprezentálni. A következőkben az erre a kérdésre adható választ ismertetjük.

Igaz a következő állítás:

ha $x(t)$ nem tartalmaz $B_p/2$ -nél nagyobb frekvenciájú komponenst, akkor egyértelműen leírható $1/B_p$ intervallumonkénti mintái felhasználásával. Az állítás helyessé-

A z-transzformáció néhány tétele

Tulajdonság	$\{x_n\}$	$X(z)$
Eltolás	$\{x_{n-m}\}$	$z^{-m}X(z)$
Konvolúció	$\sum_{k=0}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)$	$X_1(z)X_2(z)$
Kezdeti érték	$\lim_{n \rightarrow 0} x_n$	$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} X(z)$
Végérték	$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$	$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} X(z)$
z-transzformált párok		
Időtartomány	$\{x_n\}; x_n = 0; n < 0$	z tartomány $X(z)$
	$\{\delta_n\}$	1
	$\{1^n\}$	$\frac{z}{z-1}$
	$\{n\}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
	$\{e^{-an}\}$	$\frac{z}{z - e^{-a}}$

ge egyszerűen belátható, ugyanis $F\{x(t)\} = x(f)$ felírható egy olyan B_p frekvenciaperiódusú periodikus függvény *Fourier*-soraként, mely a $-\frac{B_p}{2} \leq f < \frac{B_p}{2}$ intervallumban pontosan a kívánt spektrumot írja le. Ez a *Fourier*-sor

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{-j \frac{2\pi f n}{B_p}} \quad (2.57)$$

alaku (vö. 2.24), ahol

$$D_n = \frac{1}{B_p} \int_{-B_p/2}^{B_p/2} X(f) e^{j \frac{2\pi f n}{B_p}} df. \quad (2.58)$$

Mivel azonban

$$x(t) = \int_{-B_p/2}^{B_p/2} X(f) e^{j 2\pi f t} df, \quad (2.59)$$

a *Fourier*-transzformáció értelmében D_n a következőképpen írható:

$$D_n = \frac{1}{B_p} x\left(\frac{n}{B_p}\right). \quad (2.60)$$

amiből következik, hogy $x(t)$ teljes pontossággal reprezentálható a belőle származtatott

$$\left\{ x\left(\frac{n}{B_p}\right) \right\}$$

időben diszkrét jellel. A folytonos és diszkrét jel kapcsolata (2.57), (2.59) és (2.60) összefüggések felhasználásával

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{B_p}\right) \frac{\sin \pi B_p \left(t - \frac{n}{B_p}\right)}{\pi B_p \left(t - \frac{n}{B_p}\right)}, \quad (2.61)$$

mely egy interpolációs összefüggésnek tekinthető.

A gondolatmenetet a frekvenciatartományban megismételve: ha $x(t)$ egy T_p intervallumon kívül mindenütt nulla, akkor $X(f)$ Fourier-transzformáltja egyértelműen leírható $1/T_p$ intervallumonkénti mintával. Ennek értelmében

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{T_p}\right) \frac{\sin \pi T_p \left(f - \frac{n}{T_p}\right)}{\pi T_p \left(f - \frac{n}{T_p}\right)}. \quad (2.62)$$

Ezeket az állításokat *mintavételi tételeknek* nevezzük. A mintavételi tételek bizonyos, általában nem túl szigorú feltétel betartása mellett sokféle jelosztályra általánosíthatók. Így a mintavételi értékekkel történő reprezentációra lehetőség nyílik pl.: a sztochasztikus folyamatoknál is (lásd 2.2.4. pont), de lehetséges a Fourier-től eltérő integráltranszformációk esetén is definiálni őket, ill. mintavételezhetünk többváltozós, valamint sáváteresztő spektrumú ($B_0, B_0 + \Delta B$) jeleket egyaránt. Mintavételezhetünk úgy is, hogy a mintavételi értékek elhelyezkedése (pl. az időtengely mentén) nem egyenletes.

Ha a mérési, ill. jelfeldolgozási feladatunk megoldása során mintavételezést alkalmazunk, akkor legtöbbször törekszünk az egyértelmű megfeleltetés biztosítására, azaz a mintavételi tételek betartására. A mintavételi tételek a gyakorlat számára átfogalmazott alakjait *mintavételi szabályoknak* nevezzük. Egy maximum $\pm B$ sáv szélességű Fourier-spektrumú időfüggvény egyenletes időközű mintavételezésekor pl. teljesülnie kell a következő egyenlőtlenségnek:

$$f_s > 2B, \quad (2.63)$$

ahol f_s a mintavételezés frekvenciáját jelöli. (2.63) tekinthető a gyakorlat szempontjából legfontosabb mintavételi szabálynak, melyet mintavételes mérési eljárások tervezésénél, ha azt a mérési feladat jellege megköveteli, be kell tartanunk. A mintavételezés gyakorlati megvalósítása többféle, elméleti szempontból is érdekes kérdést vet fel. Ezekkel azonban ebben az alfejezetben nem foglalkozunk, néhány problémakör vázolására a jelanalízis kapcsán a 24. fejezetben kerül sor.

Az eddigiek során láttuk, hogy az időben folytonos és az időben diszkrét jelreprezentációk szoros kapcsolatban állnak egymással, és a mintavételi szabályok betartása esetén egymásba át is alakíthatók. Ezt a kapcsolatot kihasználva az alábbiakban a két esetet nem választjuk szét, csak akkor, ha elengedhetetlenül szükséges. A vizsgált x jelet úgy tekintjük, mint

$$x = \{x(t); t \in T\}, \quad (2.64)$$

ahol időben diszkrét esetben T a diszkrét időpontok egy megszámlálható halmazát jelöli, míg időben folytonos esetben T a valós tengely egy intervallumát jelöli.

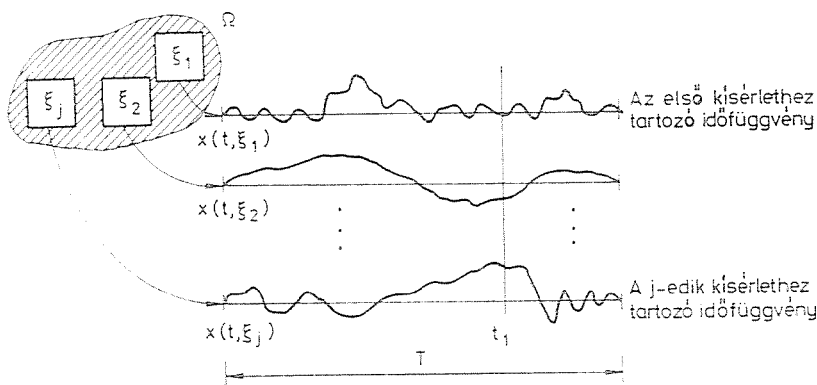
2.2.4. Sztochasztikus folyamatok leírása

A sztochasztikus jelmodellek (sztochasztikus folyamatok) a kölcsönhatások véletlen jellegét leíró valószínűségi eseménytér minden eleméhez egy-egy időfüggvényt rendelnek hozzá. Ez a modellosztály tehát tömören

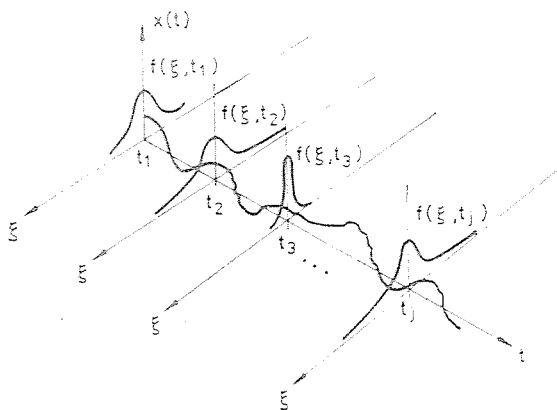
$$M_R = \{x; x(t, \xi), t \in T, \xi \in \Omega\} \quad (2.65)$$

formában írható, ahol Ω az eseményteret jelöli. Másképpen fogalmazva a sztochasztikus folyamat felfogható időfüggvények egy olyan sokaságaként, melynek elemeit az eseménytér elemei generálják. Ezt illusztrálja a 2.7. ábra.

Ugyanakkor rögzítve egy $t_1 \in T$ időpontot egy valószínűségi változóval állunk szemben. A valószínűségi változót pl. sűrűségfüggvényével jellemezve a sztochasztikus folyamat úgy is tekinthető, mint időpontról időpontra változó sűrűségfüggvényű valószínűségi változó (2.8. ábra).



2.7. ábra. A sztochasztikus folyamat mint mintafüggvény sokaság



2.8. ábra. A sztochasztikus folyamat mint sűrűségfüggvény sokaság

A (2.65) felírásmódból kiindulva alapvetően négyféle interpretáció lehetséges:

- ha t és ξ rögzített, akkor $x(t, \xi)$ egy szám;
- ha t változik és ξ rögzített, akkor $x(t, \xi)$ egy időfüggvény;
- ha t rögzített és ξ változik, akkor $x(t, \xi)$ egy valószínűségi változó;
- ha t és ξ is független változók, akkor $x(t, \xi)$ egy sztochasztikus folyamat.

A legáltalánosabb eset, a sztochasztikus folyamat teljes leírása meglehetősen összetett feladat. A teljes leírás sajátossága, hogy $t_1, t_2, \dots, t_n$ tetszőleges $I = \{t_i \in T; \forall i\}$ véges halmazára képes megadni az $f_{x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}}(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n})$ együttes eloszlásfüggvényt, ahol $x(t_i, \xi) = x_{t_i}$ egyszerűsített jelölést alkalmaztunk. Az indexben elhelyezett x_{t_i} az aktuális valószínűségi változót jelöli, míg az argumentumban a sűrűségfüggvény ehhez a valószínűségi változóhoz rendelt független változóját. Az együttes eloszlás függvények ismeretében előállíthatjuk a folyamat tetszőleges számú (együttes) momentumát. Valamennyi momentum ismerete elegendő kiindulási alap a sztochasztikus folyamatokkal kapcsolatosan feltett kérdések jelentős részénél. Azonban nehézséget jelent ezeknek az együttes eloszlásfüggvényeknek az előállítása általános esetben. A probléma áthidalására kétféle utat választhatunk. Az egyik út olyan modellek használata, melyek a sztochasztikus folyamatok bizonyos osztályait jelölik ki azáltal, hogy valamilyen struktúrát is rögzítenek. A másik úton megelégszünk a folyamat részleges leírásával: véges számú momentum figyelembevételével. Tipikusan az első és a második momentum felhasználására kerül sor. Az alábbiakban először a sztochasztikus folyamatok valószínűségi jellemzőit, ill. a részleges leírás idő- és frekvenciatartománybeli módszereit tárgyaljuk. Ezt követően a gyakorlat szempontjából legfontosabb sztochasztikus modelleket vizsgáljuk. Ez utóbbiak létjogosultsága abból fakad, hogy egyrészt képesek valószínűségi folyamatok kielégítő pontosságú jellemzésére, másrészt a modell paraméterek meghatározása az alkalmasan rögzített strukturális információ következtében lényegesen egyszerűbb, mint az általános eset összefüggéseinek felhasználásával.

A sztochasztikus folyamatok statisztikai jellemzői

A bevezetőben említettük, hogy a sztochasztikus folyamatok teljes leírása azt jelenti, hogy tetszőlegesen rögzítve a $t_1, t_2, \dots, t_n$ paramétereket, az így létrehozott $x(I) = [x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}]^T$ valószínűségi vektorváltozó valamennyi statisztikai jellemzőjét ismerjük, ill. a rendelkezésünkre álló adatokból meg tudjuk határozni. A valószínűségelméletből ismert, hogy egy valószínűségi vektorváltozó teljes leírásához elegendő az

$$F_{x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}}(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}) \quad (2.66)$$

együttes eloszlásfüggvény, ill. az

$$f_{x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}}(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}) \quad (2.67)$$

együttes sűrűségfüggvény, vagy a

$$\Phi_{x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}}(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (2.68)$$

együttes karakterisztikus függvény ismerete. Ezek szerint a sztochasztikus folyamat statisztikai jellemzőit meg tudjuk adni, ha az összes lehetséges I halmazra nézve ismerjük a (2.66—2.68) függvények valamelyikét. Nagyon sok esetben a (2.66—2.68) függvényeknek csak az első és másodrendű alakjait használjuk, mivel ezek meghatározása még reális célkitűzés, ill. azért, mert gyakran alkalmazhatunk Gauss-folyamat vagy Markov-folyamat modellt, melyeknél (mint látni fogjuk) az első és másodrendű függvények ismerete teljes leírást tesz lehetővé. Ezek szerint tehát pl. az

$$f_{x_t}(x_t), \quad f_{x_{t_1} x_{t_2}}(x_{t_1}, x_{t_2}) \quad t, t_1, t_2 \in T \quad (2.69)$$

sűrűségfüggvényeket használjuk a jellemző paraméterek kiszámításához. A (2.66—2.68) függvények első és másodrendű alakjaiból kiszámítható fontos sztochasztikus folyamat paraméterek a következők:

A folyamat várható érték—idő függvénye:

$$\mu_x(t) = E\{x_t\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_t f_{x_t}(x_t) dx_t, \quad (2.70)$$

ami azt fejezi ki, hogy a folyamat átlagos „szintje” hogyan alakul a t paraméter függvényében.

A folyamat négyzetes középérték—idő függvénye:

$$\psi_x^2(t) = E\{x_t^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_t^2 f_{x_t}(x_t) dx_t, \quad (2.71)$$

ami a folyamat átlagos teljesítményével arányos.

A folyamat varianciája:

$$\text{var } \{x_t\} = E\{(x_t - E\{x_t\})^2\} = \psi_x^2(t) - \mu_x^2(t), \quad (2.72)$$

ami a folyamat átlagos „váltakozóáramú” teljesítményével arányos. Annak alkalmas mérőszáma, hogy a pillanatértékek eltérése az átlagtól milyen mértékű.

A folyamat autokorreláció függvénye:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E\{x_{t_1} x_{t_2}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_1} x_{t_2} f_{x_{t_1} x_{t_2}}(x_{t_1}, x_{t_2}) dx_{t_1} dx_{t_2}, \quad (2.73)$$

mely fizikai jelentését tekintve az időben eltolt mintavételi értékek közötti átlagos, kölcsönös teljesítménnyel arányos, azaz egy általánosított teljesítményként fogható fel. Statisztikai jelentését tekintve az időben eltolt mintavételi értékek statisztikai függését kifejező mérőszám.

A folyamat autokovariancia függvénye:

$$C_{xx}(t_1, t_2) = E[(x_{t_1} - E\{x_{t_1}\})(x_{t_2} - E\{x_{t_2}\})] = R_{xx}(t_1, t_2) - \mu_x(t_1)\mu_x(t_2) \quad (2.74)$$

mely a variancia fogalom általánosítása eltolt mintavételi értékek esetére.

Két folyamat keresztkorreláció függvénye:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E\{x_{t_1} y_{t_2}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_1} y_{t_2} f_{x_{t_1} y_{t_2}}(x_{t_1}, y_{t_2}) dx_{t_1} dy_{t_2} \quad (2.75)$$

mely két sztochasztikus folyamat különböző időpontokban felvett értékei közötti átlagos, kölcsönös teljesítménnyel arányos, ill. statisztikai értelmezés szerint egy olyan mérőszám, mely két sztochasztikus folyamat időben eltolt mintavételi értékek statisztikai függését fejezi ki.

Két folyamat kereszkovariancia függvénye:

$$C_{xy}(t_1, t_2) = E[(x_{t_1} - E\{x_{t_1}\})(y_{t_2} - E\{y_{t_2}\})] = R_{xy}(t_1, t_2) - \mu_x(t_1)\mu_y(t_2), \quad (2.76)$$

mely a variancia fogalom általánosítása két sztochasztikus folyamatra és eltoló mintavételi értékek esetére.

Megjegyzés:

Két sztochasztikus folyamat együttes sűrűségfüggvényét az eddigiekkel összhangban az

$$[x_{t_1}, y_{t_2}]^T$$

valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvényeként definiáljuk.

A sztochasztikus folyamatokat két csoportra osztjuk attól függően, hogy statisztikai jellemzőik hogyan függenek a t paramétertől.

Az $x(t, \xi)$ sztochasztikus folyamatot *nemstacionáriusnak* nevezzük, ha a rögzített t paraméter esetén értelmezett $x(\xi)$ valószínűségi változó statisztikai jellemzői függenek a t paraméter rögzített értékétől, azaz ezek a statisztikai jellemzők függvényei az „abszolút” időnek. Ellenkező esetben a folyamatot *stacionárius* folyamatnak nevezzük. A stacionárius folyamattal kapcsolatban a következő definíciók használatosak:

— Az $x(t, \xi)$ sztochasztikus folyamatot *erősen stacionárius* vagy egyszerűen stacionárius folyamatnak nevezzük, ha a hozzárendelt statisztikai jellemzők mindegyike invariáns a t paraméter (azaz az időtengely) eltolására nézve. Ezek szerint pl. a (2.66—2.68) függvények közül a sűrűségfüggvényt kiragadva, stacionárius folyamat esetén tetszőleges m pozitív egész és $I = \{t_i \in T; i = 1, 2, \dots, m\}$ halmaz mellett

$$f_{x_{t_1} \dots x_{t_m}}(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_m}) = f_{x_{t_1+\tau} \dots x_{t_m+\tau}}(x_{t_1+\tau}, x_{t_2+\tau}, \dots, x_{t_m+\tau}), \quad (2.77)$$

ahol τ az eltolás mértéke. Ebből a tulajdonságból viszont következik, hogy a folyamat statisztikai jellemzői nem függenek az „abszolút” időtől, legfeljebb valamilyen időkülönbségtől.

— Az $x(t, \xi)$ folyamatot *aszimptotikusan stacionáriusnak* nevezzük, ha tetszőleges m pozitív egész és

$$I = \{t_i \in T; i = 1, 2, \dots, m\} \text{ esetén a}$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} f_{x_{t_1+\tau} \dots x_{t_m+\tau}}(x_{t_1+\tau}, x_{t_2+\tau}, \dots, x_{t_m+\tau}) \quad (2.78)$$

határérték létezik. Ilyenkor azt tapasztaljuk, hogy a statisztikai jellemzők a folyamat „fejlődése” során egyre inkább stabilis értékük felé tartanak.

— Az $x(t, \xi)$ folyamatot *gyengén stacionáriusnak* nevezzük, ha az első és másodrendű sűrűségfüggvényei az időtengely eltolására nézve invariánsak. Ennek megfelelően az $x(t, \xi)$ sztochasztikus folyamat minden olyan statisztikai jellemzője, mely az első, ill. a másodrendű sűrűségfüggvény felhasználásával állítható elő, az abszolút időtől független. A *gyenge stacionaritás* fogalma a gyakorlat szempontjából igen fontos, mivel a (2.77) feltétel teljesülését az összes lehetséges (együttes) sűrűségfüggvény helyett csak az első és másodrendű esetre kell ellenőrizni, valamint azért, mert nagyon sok esetben használunk olyan részleges leírást, mely az első és másodrendű momentumok megadására szorítkozik. Ekkor értelemszerűen a stacionaritást elegendő a részleges leírásnak megfelelő mértékben megkövetelni.

A gyakorlatban előforduló sztochasztikus jelek reprezentálására elképzelt folyamatmodellek paramétereinek meghatározásához nagyon gyakran nem áll rendelkezésre annyi kísérleti eredmény, hogy a statisztikai jellemzőket sokaság szerinti várható

értékek segítségével származtassuk. Ilyen esetben célszerű megvizsgálni, hogy nem lehetséges-e a vizsgált jelet ergodikus folyamatmodell felhasználásával reprezentálni, ilyenkor ugyanis a sokaság szerinti várható érték képzések helyett az időátlagok számítása elegendő, azaz elegendő egyetlen realizáció regisztrálása.

Az $x(t, \xi)$ stacionárius folyamat *ergodikus*, ha tetszőleges $g(\cdot)$ függvényre

$$E\{g(x_t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(x_t) dt, \quad (2.79)$$

azaz a sokaság szerinti átlag a teljes időtartományra vonatkozó átlaggal egyezik. Ennek a tulajdonságnak a felfedése konkrét fizikai jelenségeknél általában nehéz feladat. Az erős stacionaritás szükséges, de nem elégséges tulajdonság. Olyan stacionárius folyamatoknál, ahol a sokaság szerinti átlagérték véges, biztosan teljesül, hogy (2.79) jobb oldala stabilitást mutat, azaz majdnem minden mintafüggvényre egy közös határértékhez tart, de egyáltalán nem biztos, hogy ez a határérték megegyezik a (2.79) kifejezés bal oldalán szereplő értékkel.

Az egyezéshez további korlátozások szükségesek, ezekkel azonban itt nem foglalkozunk.

A (2.70—2.76) összefüggésekkel definiált folyamat-jellemzők felírási módjait stacionárius és ergodikus esetre a 2.5. táblázat foglalja össze. Ezenkívül a 2.6. táblázatban felsoroljuk a korrelációfüggvények legfontosabb függvénytani tulajdonságait.

Megjegyzés:

1. A korrelációs együttható általánosításaként stacionárius folyamatok esetére definiálják a normalizált korrelációs függvényeket:

$$r_{xx}(\tau) = \frac{C_{xx}(\tau)}{C_{xx}(0)}; \quad |r_{xx}(\tau)| \leq 1, \quad (2.80)$$

$$r_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sqrt{C_{xx}(0)C_{yy}(0)}} \quad |r_{xy}(\tau)| \leq 1. \quad (2.81)$$

2. Ha az $x(t, \xi)$ sztochasztikus folyamat komplex értékeket is felvehet, akkor a (2.70—2.76) összefüggésekben, ill. a 2.5. táblázatban a második helyen feltüntetett sztochasztikus folyamatot komplex konjugáltjával kell figyelembe venni.

3. A jelölés egyszerűsítése érdekében a továbbiakban minden olyan esetben ahol nem értelemszavaró, elhagyjuk a t paramétertől való függésre utaló argumentumokat és indexeket.

4. Ha a sztochasztikus folyamat a t paraméternek csak diszkrét értékeitől függ, akkor „időben” (t paraméterben) diszkrét sztochasztikus folyamatról vagy sztochasztikus sorozatról beszélünk. Az imént vázolt összefüggéseket a diszkrét esetre értelemszerűen használhatjuk. A teljesség kedvéért a 2.5. táblázatban szereplő kifejezéseket az „időben” diszkrét esetre a 2.7. táblázatban újból feltüntettük.

2.1. példa

A következőkben bemutatunk egy olyan sztochasztikus folyamatot, mely ergodikus. Legyen

$$x(t, \xi) = A \sin \left(\frac{2\pi}{T_p} t + \Theta(\xi) \right),$$

A sztochasztikus folyamatok néhány fontos statisztikai jellemzője

Név	Jelölés	Definíció	Nemstacionárius folyamat	Stacionárius folyamat	Ergodikus folyamat
Várható érték – idő függvény	$\mu_x(t)$	$\mu_x(t) = E\{x_t\}$	$= \int_{-\infty}^{\infty} x_t f_{x_t}(x_t) dx_t$	$\mu_x(t) = \mu_x = \text{állandó}$	$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$
Négyzetes középérték – idő függvény	$\psi_x^2(t)$	$\psi_x^2(t) = E\{x_t^2\}$	$= \int_{-\infty}^{\infty} x_t^2 f_{x_t}(x_t) dx_t$	$\psi_x^2(t) = \psi_x^2 = \text{állandó}$	$\psi_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$
Variancia	$\text{var}\{x_t\}$	$= E\{(x_t - E\{x_t\})^2\}$	$= \psi_x^2(t) - \mu_x^2(t)$	$\text{var}\{x_t\} = \text{var}\{x\} = \sigma_x^2 = \psi_x^2 - \mu_x^2 = \text{állandó}$	$\text{var}\{x\} = \psi_x^2 - \mu_x^2$
Autokorreláció függvény	$R_{xx}(t_1, t_2)$	$R_{xx}(t_1, t_2) = E\{x_{t_1} x_{t_2}\}$	$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_1} x_{t_2} \times \\ \times f_{x_{t_1} x_{t_2}}(x_{t_1}, x_{t_2}) dx_{t_1} dx_{t_2}$	$R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(\tau);$ $\tau = t_1 - t_2$	$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t + \tau) \times \\ \times x(t) dt$
Autokovariancia függvény	$C_{xx}(t_1, t_2)$	$= E\{(x_{t_1} - E\{x_{t_1}\}) \times (x_{t_2} - E\{x_{t_2}\})\}$	$= R_{xx}(t_1, t_2) - \mu_x(t_1) \mu_x(t_2)$	$C_{xx}(t_1, t_2) = C_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau) - \mu_x^2$	$C_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau) - \mu_x^2$
Keresztkorreláció függvény	$R_{xy}(t_1, t_2)$	$R_{xy}(t_1, t_2) = E\{x_{t_1} y_{t_2}\}$	$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_1} y_{t_2} \times \\ \times f_{x_{t_1} y_{t_2}}(x_{t_1}, y_{t_2}) dx_{t_1} dy_{t_2}$	$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(\tau)$	$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t + \tau) \times \\ \times y(t) dt$
Keresztkovariancia függvény	$C_{xy}(t_1, t_2)$	$= E\{(x_{t_1} - E\{x_{t_1}\}) \times (y_{t_2} - E\{y_{t_2}\})\}$	$= R_{xy}(t_1, t_2) - \mu_x(t_1) \mu_y(t_2)$	$C_{xy}(t_1, t_2) = C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y$	$C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y$

Korrelációfüggvények tulajdonságai

Autokorreláció-függvény	Keresztkorreláció-függvény
1. $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$ páros	1. $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$
2. $R_{xx}(0) = \sigma_x^2$	2. $ R_{xy}(\tau) ^2 = R_{xx}(0)R_{yy}(0)$ és ebből
3. $R_{xx}(0) \geq R_{xx}(\tau) $	$ R_{xy}(\tau) \leq \frac{1}{2} [R_{xx}(0) + R_{yy}(0)]$
4. $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{xx}(\tau) = \mu_x^2$ ha nincs periodikus összetevője	3. $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{xy}(\tau) = \mu_x \mu_y$
5. Ha a folyamat periodikus (T_p): $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau + nT_p)$ $n=0, \pm 1, \dots$	ha nincs periodikus összetevője

ahol $\Theta(\xi)$ valószínűségi változó, melynek valószínűség-sűrűségfüggvénye:

$$f_{x_i}(x_i) = f_{x_i}(\Theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{ha } 0 \leq \Theta \leq 2\pi, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (2.82)$$

A folyamat autokorreláció függvénye a sűrűségfüggvény felhasználásával:

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= E \left\{ A \sin \left(\frac{2\pi}{T_p} (t + \tau) + \Theta \right) A \sin \left(\frac{2\pi}{T_p} t + \Theta \right) \right\} = \\ &= \frac{A^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi}{T_p} (t + \tau) + \Theta \right) \sin \left(\frac{2\pi}{T_p} t + \Theta \right) d\Theta = \frac{A^2}{2} \cos \frac{2\pi}{T_p} \tau. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Időátlag képzésével:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{T_p} \int_0^{T_p} \sin \frac{2\pi}{T_p} (t + \tau) \sin \frac{2\pi}{T_p} t dt = \frac{A^2}{2} \cos \frac{2\pi}{T_p} \tau \quad (2.84)$$

tehát a folyamat (legalábbis gyengén) stacionárius és ergodik.

Nagyon sok gyakorlati probléma megoldásánál kedvező, ha jellemezni tudjuk a sztochasztikus folyamatot a frekvenciatartományban is. Erre a célra az ún. *teljesítménysűrűség-függvény* használatos, mely közvetlenül arra ad választ, hogy az $(f, f+df)$ frekvenciasávba mekkora jelteljesítmény jut. A determinisztikus jelekre vonatkozó ismereteinkből tudjuk, hogy a gyors változású jelek nagyobb sávzélességűek, tehát nagyobb frekvencián is számottevő teljesítményt szállítanak, míg ugyanez a lassú változású jelekről nem mondható el. A teljesítménysűrűség-függvény fizikai jelentése ennek a tulajdonságnak az általánosítása sztochasztikus folyamatokra. Mivel a frekvenciatartománybeli reprezentáció nemstacionárius esetben függvénye marad a t (idő) paraméternek, és ebből fakadóan matematikai nehézségek lépnek fel, a frekvenciatartománybeli leírást többnyire csak stacionárius folyamatok esetére definiálják:

— A teljesítménysűrűség-függvény az $x(t, \xi)$ folyamat $R_{xx}(\tau)$ autokorreláció függvényének Fourier-transzformáltja:

Az időben diszkrét sztochasztikus folyamatok néhány fontos statisztikai jellemzője

Név	Jelölés	Definíció	Nemstacionárius folyamat	Stacionárius folyamat	Ergodikus folyamat
Várható érték— idő függvény	$\mu_X(n)$	$\mu_X(n) = E\{x_n\}$	$= \sum_{\forall n} x_n f_{x_n}(x_n)$	$\mu_X(n) = \mu_X = \text{állandó}$	$\mu_X = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k$
Négyzetes közép- érték—idő függvény	$\psi_X^2(n)$	$\psi_X^2(n) = E\{x_n^2\}$	$= \sum_{\forall n} x_n^2 f_{x_n}(x_n)$	$\psi_X^2(n) = \psi_X^2 = \text{állandó}$	$\psi_X^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k^2$
Variancia	$\text{var}\{x_n\}$	$= E\{(x_n - E\{x_n\})^2\}$	$= \psi_X^2(n) - \mu_X(n)$	$\text{var}\{x_n\} = \text{var}\{x\} = \sigma_x^2 =$ $= \psi_X^2 - \mu_X^2 \text{ állandó}$	$\text{var}\{x\} = \psi_X^2 - \mu_X^2$
Autokorreláció függvény	$R_{xx}(n_1, n_2)$	$R_{xx}(n_1, n_2) = E\{x_{n_1} x_{n_2}\}$	$= \sum_{\forall n_1} \sum_{\forall n_2} x_{n_1} x_{n_2} \times$ $\times f_{x_{n_1} x_{n_2}}(x_{n_1}, x_{n_2})$	$R_{xx}(n_1, n_2) = R_{xx}(n);$ $n = n_1 - n_2$	$R_{xx}(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_{k+n} x_k$
Autokovariancia függvény	$C_{xx}(n_1, n_2)$	$= E\{(x_{n_1} - E\{x_{n_1}\}) \times$ $\times (x_{n_2} - E\{x_{n_2}\})\}$	$= R_{xx}(n_1, n_2) - \mu_X(n_1) \mu_X(n_2)$	$C_{xx}(n_1, n_2) = C_{xx}(n) =$ $= R_{xx}(n) - \mu_X^2$	$C_{xx}(n) = R_{xx}(n) - \mu_X^2$
Keresztkorreláció függvény	$R_{xy}(n_1, n_2)$	$R_{xy}(n_1, n_2) = E\{x_{n_1} y_{n_2}\}$	$= \sum_{\forall n_1} \sum_{\forall n_2} x_{n_1} y_{n_2} \times$ $\times f_{x_{n_1} y_{n_2}}(x_{n_1}, y_{n_2})$	$R_{xy}(n_1, n_2) = R_{xy}(n)$	$R_{xy}(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_{k+n} y_k$
Keresztkovarian- cia függvény	$C_{xy}(n_1, n_2)$	$= E\{(x_{n_1} - E\{x_{n_1}\}) \times$ $\times (y_{n_2} - E\{y_{n_2}\})\}$	$= R_{xy}(n_1, n_2) - \mu_X(n_1) \mu_Y(n_2)$	$C_{xy}(n_1, n_2) = R_{xy}(n) - \mu_X \mu_Y$	$C_{xy}(n) = R_{xy}(n) - \mu_X \mu_Y$

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau, \quad (2.85)$$

ill. az inverz transzformált

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) e^{j2\pi f\tau} df. \quad (2.86)$$

A (2.85–2.86) az ún. *Wiener–Hincsin* összefüggés, melynek értelmében $R_{xx}(\tau)$ és $S_{xx}(f)$ *Fourier*-transzformált párok.

— Az $x(t, \xi)$ és $y(t, \xi)$ sztochasztikus folyamatok frekvenciatartománybeli együttes leírására elsősorban a keresztteljesítménysűrűség-függvény szolgál:

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (2.87)$$

A keresztteljesítménysűrűség-függvény két folyamat szorzata által az $(f, f+df)$ frekvenciasávban hordozott jelteljesítményt adja meg. Az inverz transzformált a keresztkorreláció-függvény meghatározásának egyik lehetősége:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) e^{j2\pi f\tau} df. \quad (2.88)$$

A teljesítménysűrűség-függvények fontos tulajdonságait a 2.8. táblázat foglalja össze.

Megjegyzés:

1. A keresztteljesítménysűrűség-függvény normált változata a komplex koherencia-függvény:

$$\gamma_{xy}(f) = \frac{S_{xy}(f)}{\sqrt{S_{xx}(f)S_{yy}(f)}} \quad (2.89)$$

2.8. táblázat

A teljesítménysűrűség-függvények fontos tulajdonságai

Teljesítménysűrűség-függvény	Keresztteljesítménysűrűség-függvény
1. $S_{xx}(f) = S_{xx}(-f)$	1. $S_{xy}(f) = \bar{S}_{xy}(-f) = S_{yx}(-f)$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) df = R_{xx}(0) = \psi_x^2$	2. $ S_{xy}(f) ^2 \leq S_{xx}(f)S_{yy}(f)$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) d\tau = S_{xx}(0)$	3. $S_{xy}(f) = C_{xy}(f) - jQ_{xy}(f)$ általában komplex értékű $C_{xy}(f)$ az ún. <i>koincidencia-spektrum</i> , $Q_{xy}(f)$ az ún. <i>kvadrátúra-spektrum</i> .
4. $S_{xx}(f)$ mindig valós, mert $R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau)$, tehát fázisinformációt nem hordoz.	

mely abszolút értékének négyzete

$$|\gamma_{xy}(f)|^2 = \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_{xx}(f)S_{yy}(f)} \quad (2.90)$$

sokféle jel- és rendszertulajdonság leírásánál hasznosítható. (Lásd 2.5. szakasz.)

2. $S_{xx}(f)$ páros volta miatt szokás definiálni az ún. egyoldalas teljesítménysűrűség-függvényt is:

$$G_{xx}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau, \quad f \geq 0. \quad (2.91)$$

3. Az $S_{xy}(f)$ keresztteljesítménysűrűség-függvény fontos szerephez jut lineáris rendszerek átviteli sajátosságainak elemzésekor.

4. Az $S_{xx}(f)$, $S_{xy}(f)$, ill. $\gamma_{xy}(f)$ elvben definiálható nemstacionárius folyamatokra (idővariáns spektrumok) is, de ennek gyakorlati jelentősége elsősorban csak az időben lassan változó autokorreláció függvényű, ún. kvázistacionárius folyamatok esetében van.

5. Az „időben” diszkrét sztochasztikus folyamatok teljesítménysűrűség-függvényét egy olyan *Fourier*-sor alakjában definiáljuk, melynek együtthatói az illető folyamat diszkrét autokorreláció-függvényének megfelelő értékei. A komplex frekvenciatartománybeli teljesítménysűrűség-függvény pedig a diszkrét autokorreláció-függvény (kétoldalas) z transzformáltja. Az „időben” diszkrét sztochasztikus folyamatok frekvenciatartománybeli leírásával kapcsolatos legfontosabb összefüggéseket és azok tulajdonságait a 2.9. táblázat foglalja össze.

Sztochasztikus folyamatmodellek

A következőkben röviden áttekintjük azokat a sztochasztikus folyamatmodelleket, melyeket számos konkrét mérési eljárásban hasznosítunk, és melyekre a könyv további fejezetei többször hivatkoznak.

Gauss-folyamat. Az $x(t, \xi)$ sztochasztikus folyamatot *Gauss*-folyamatnak nevezzük, ha minden $I = \{t_i \in T; i = 1, 2, \dots, n\}$ halmazra és minden c_i konstansra a

$$z(\xi) = \sum_{t_i \in I} c_i x(t_i, \xi) \quad (2.92)$$

valószínűségi változó *Gauss*-eloszlású. A *Gauss*-folyamat sűrűségfüggvénye:

$$f_{x_{t_1} x_{t_2} \dots x_{t_n}}(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \Sigma_{xx}^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} (x - \mu_x)^T \Sigma_{xx}^{-1} (x - \mu_x) \right), \quad (2.93)$$

ahol

$$\begin{aligned} x &= [x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}]^T; & \mu_x &= \mu_x(I) = E\{x\}; & \Sigma_{xx} &= \Sigma_{xx}(I) = \\ &= E\{(x - \mu_x)(x - \mu_x)^T\}. \end{aligned}$$

A (2.93) összefüggésből látható, hogy a *Gauss*-folyamatot egyértelműen jellemzi $\mu_x(I)$ és $\Sigma_{xx}(I)$, azaz ennek a két jellemzőnek az ismerete elegendő a teljes leíráshoz.

A teljesítménysűrűség-függvények időben diszkrét jelek esetén

Az időben diszkrét folyamat teljesítménysűrűség-függvénye:	$S_{xx}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{xx}(n) e^{jn2\pi f}$
Az időben diszkrét folyamat autokorreláció-függvénye:	$R_{xx}(n) = T_s \int_{-1/2T_s}^{1/2T_s} S_{xx}(f) e^{jn2\pi f} df$
A (kétoldalas) z transzformáció felhasználásával:	$S_{xx}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{xx}(n) z^{-n};$ $R_{xx}(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{S_{xx}(z)\}$
Két időben diszkrét folyamat kereszteljesítménysűrűség-függvénye:	$S_{xy}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{xy}(n) e^{-jn2\pi f}$
A (kétoldalas) z transzformáció felhasználásával:	$S_{xy}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{xy}(n) z^{-n};$ $R_{xy}(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{S_{xy}(z)\}$
Két időben diszkrét folyamat keresztkorreláció-függvénye:	$R_{xy}(n) = T_s \int_{-1/2T_s}^{1/2T_s} S_{xy}(f) e^{jn2\pi f} df$
Teljesítménysűrűség-függvény	Kereszteljesítménysűrűség-függvény
$S_{xx}(f) = S_x(-f)$ 2. $\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) df = R_{xx}(0) = \psi_x$ 3. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{xx}(n) = S_{xx}(0).$ 4. $S_{xx}(f)$ mindig valós, mert $R_{xx}(-n) = \overline{R_{xx}(n)},$ tehát fázisinformációt nem hordoz.	1. $S_{xy}(f) = \overline{S_{yx}(-f)} = S_{yx}(-f)$ 2. $ S_x(f) ^2 = S_{xx}(f) S_{yy}(f)$ 3. $S_{xy}(f) = C_{xy}(f) - jQ_{xy}(f)$ általában komplex értékű. $C_{xy}(f)$ az ún. koincidencia-spektrum. $Q_{xy}(f)$ az ún. kvadrátúra-spektrum.

Markov-folyamat. Az $x(t, \xi)$ sztochasztikus folyamatot *Markov-folyamat*nak nevezzük, ha minden rendezett $I = \{t_i \in T; t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n\}$ halmazra

$$f_{x_{t_n} | x_{t_{n-1}} \dots x_{t_1}}(x_{t_n} | x_{t_{n-1}}, \dots, x_{t_1}) = f_{x_{t_n} | x_{t_{n-1}}}(x_{t_n} | x_{t_{n-1}}). \quad (2.94)$$

Ez a tulajdonság biztosítja, hogy a másodrendű sűrűségfüggvényből előállítható az n -ed rendű sűrűségfüggvény, azaz elegendő az első és a másodrendű sűrűségfüggvény ismerete. A *Markov-folyamatot* definiáló (2.94) összefüggés másképpen fogalmazva azt fejezi ki, hogy a folyamat egy adott t_{n-1} időpillanatbeli ismerete elegendő a

t_n időpillanatbeli viszonyok származtatásánál, a múltbeli ($t_i < t_{n-1}$) viszonyok ismerete nem szükséges.

Ha a t_{n-1} időpillanatbeli értékek mellett további időpontokra ($t_{n-2}, t_{n-3}, \dots$) is épít a modellt, akkor a figyelembe vett korábbi időpontok számával összhangban másod-, harmad- stb. rendű *Markov*-folyamattal van dolgunk. Ilyen megfogalmazásban a (2.94) összefüggés az ún. elsőrendű *Markov*-folyamatot definiálja.

A *Markov* folyamatmodell központi jelentőségű a jel reprezentációk sorában, mivel minden olyan jel, mely előállítható egy differenciálegyenlet (vagy diszkrét esetben egy differenciaegyenlet) megoldásaként, rendelkezik a *Markov*-folyamat tulajdonságaival. Ugyanez igaz értelemszerűen minden olyan jelre is, mely megadható állapotváltozós modell (lásd. 2.5.2. pont) segítségével. Ezeknél ugyanis egy adott állapotból a következő állapotba jutást a megelőző állapotok nem befolyásolják, a folyamat következő időpillanatbeli viszonyainak jellemzéséhez a jelen időpillanatbeli viszonyokon kívül csak feltételes sűrűség- (vagy eloszlás-) függvények, az ún. átmenetváló-sűrűségek sűrűség- (vagy eloszlás-) függvényei szükségesek.

Független növekményű folyamat. Az $x(t, \xi)$ sztochasztikus folyamatot független növekményű folyamatnak nevezzük, ha az $x(t_i) - x(t_j)$ és az $x(t_n) - x(t_m)$ növekmények ($t_j < t_i \leq t_m < t_n, t \in T$) feltételes valószínűsége tetszőleges valós λ és ξ mellett

$$P\{x(t_i) - x(t_j) \leq \lambda | x(t_n) - x(t_m) = \xi\} = P\{x(t_i) - x(t_j) \leq \lambda\}. \quad (2.95)$$

Ez azt fejezi ki, hogy a sztochasztikus folyamat növekményei tetszőleges két nem átlapolódó időintervallumon függetlenek egymástól, azaz a $\Theta = x(t_i) - x(t_j)$ és a $\psi = x(t_n) - x(t_m)$ valószínűségi változók függetlenek, tehát

$$P\{\Theta \leq \lambda_1; \psi \leq \lambda_2\} = P\{\Theta \leq \lambda_1\}P\{\psi \leq \lambda_2\},$$

(λ_1 és λ_2 tetszőleges valós.)

A független növekményű folyamatok közül leggyakrabban a *Wiener* (vagy *Brown*-mozgás), ill. a *Poisson* folyamatmodelleket használjuk.

Wiener-folyamat. Az $x(t, \xi)$ $t \in [0, \infty]$ skalár sztochasztikus folyamatot *Wiener*- (vagy *Brown*-mozgás) folyamatnak nevezzük, ha:

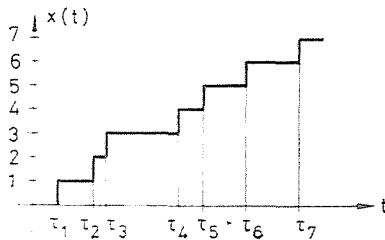
1. $x(0, \xi) = 0$ majdnem minden ξ -re;
2. $x(t)$ független növekményű;
3. $t \geq s$ esetén

$$P[x(t) - x(s) < \lambda] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{\xi^2}{2(t-s)}} d\xi \quad (2.96)$$

vagyis a növekmény *Gauss*-eloszlású és $|t-s|$ varianciájú. Maga a folyamat nulla várható értékű ($E\{x(t)\} = 0$), varianciája pedig $E\{x^2(t)\} = t$. (Ez a modell nagyon jól leírja a molekulák rendszertelen mozgását, az ún. hőmozgást, mely egyébként a molekuláris hőelmélet egyik alapfeltevése. Ennek kísérleti igazolása az ún. *Brown*-mozgás.)

Poisson-folyamat és általánosításai. Az $x(t, \xi)$ $t \in [0, \infty]$ sztochasztikus folyamatot *Poisson*-folyamatnak nevezzük, ha:

1. majdnem minden ξ realizációhoz $x(t, \xi)$ egy egységnyi lépésközü lépcsősfüggvény, melyre $x(0) = 0$, (2.9. ábra).



2.9. ábra. A *Poisson*-folyamat egy realizációja

2. annak valószínűsége, hogy az ugrások száma k , t és s között :

$$P\{x(t) - x(s) = k\} = \frac{(\lambda|t-s|)^k}{k!} e^{-\lambda|t-s|}, \quad \lambda > 0. \quad (2.97)$$

3. $x(t)$ független növekményű.

4. A diszkontinuitások ún. elsőfajú diszkontinuitások, azaz $x(t-0) \neq x(t) = x(t+0)$.

Ha λ függ az időtől, akkor ún. nemhomogén *Poisson*-folyamattal van dolgunk. Az általánosított *Poisson*-folyamat definiálásához induljunk ki egy $x(t, \xi)$ egyszerű *Poisson*-folyamatból, melynél

$$P\{x(t) - x(s) = k\} = \frac{(\lambda|t-s|)^k}{k!} e^{-\lambda|t-s|}.$$

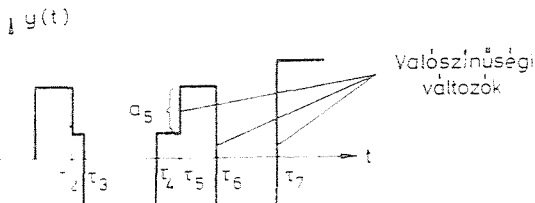
Ekkor az

$$y(t) = \sum_{i=1}^{x(t)} a_i \varepsilon(t - \tau_i) \quad (2.98)$$

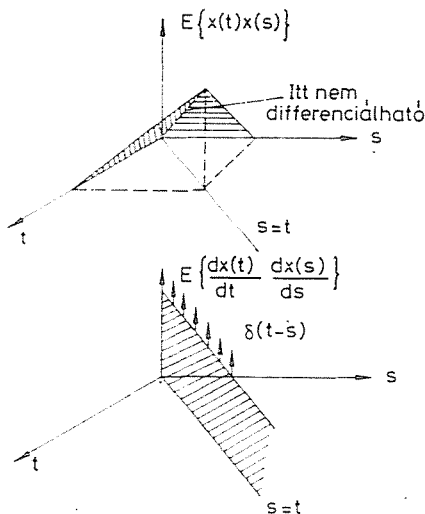
folyamatot, ahol a_i $x(t)$ -től független $f_{a_i}(a_i)$ sűrűségfüggvényű valószínűségi változó, $\varepsilon(t)$ az egységugrás-függvény, τ_i pedig az egyszerű *Poisson*-folyamat i -edik ugráshelyének időkoordinátája, általánosított (vagy másodrendű) *Poisson*-folyamatnak nevezük (2.10. ábra). Az $y(t, \xi)$ folyamat is független növekményű, és ezek szerint egyben *Markov*-folyamat is. Az általánosított *Poisson*-folyamat gyakorlat szempontjából fontos esete az, ahol az $\{a_i\}$ együtthatók független, egyformán nulla várható értékű és σ_a^2 varianciájú, normális eloszlású valószínűségi változók.

Fehérzaj-folyamat. A fehérzaj-folyamat alapvető fontosságú modell mind folyamatok valamilyen rendszer segítségével történő generálásánál, mind rendszermodellek analízisének. A fehérzaj-folyamat a *Wiener*- (vagy *Brown*-mozgás) folyamat formális deriválásával származtatható. Az $x(t, \xi)$ *Wiener*-folyamatból kiindulva tekintsük a korreláció függvényt: $E\{x(t)x(s)\} = \min(t, s)$. Ezek után tekintsük az $x(t)$ folyamat formális deriváltját: $dx(t)/dt$. Képezve a derivált folyamat kovariancia függvényét

$$E\left\{\frac{dx(t)}{dt} \frac{dx(s)}{ds}\right\} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E\{x(t)x(s)\} = \delta(t-s) \quad (2.99)$$



2.10. ábra. Egy általános *Poisson*-folyamat egy realizációja



2.11. ábra. Illusztráció a fehérzaj-folyamat származtatásához

adódik, ami definiálja a fehérzaj-folyamatot. Ez az eredmény matematikai megalapozottsággal a disztribúcióelmélet eszközeivel származtatható, itt csak egyszerű illusztrációt közlünk (2.11. ábra).

Megjegyzés:

1. A fehérzaj-folyamatot ismertnek tételezve fel, pl. az időben diszkrét esetre a *Wiener*-folyamat a következő formában is definiálható: ha $w(t, \xi)$ fehérzaj-folyamat, továbbá *Gauss*-eloszlású nulla várható értékkel és egységnyi szórással, akkor az $x(t, \xi)$ $t_i \in T$ sztochasztikus folyamatot, melyre

$$x_{t_{n+1}} = x_{t_n} + w_{t_n} \quad (2.100)$$

Wiener-folyamatnak nevezzük. (Az x_{t_0} kezdeti értéknek ugyancsak *Gauss*-eloszlásúnak kell lennie adott átlag és szórásparaméter mellett.)

2. Az általánosított *Poisson*-folyamatból kiindulva annak formális deriváltja ugyancsak a fehérzaj-folyamatot adja.

A független növekményű folyamatokkal kapcsolatos két fontos állítás a következő:

a) Ha $x(t, \xi)$ folytonos majdnem minden ξ -re, akkor az $x(I) = x(t_i + \Delta) - x(t_i)$ valószínűségi változó *Gauss*-eloszlású.

b) Ha $x(t, \xi)$ csak megszámlálhatóan sok egész értéket vesz fel (azaz lépcsős függvény), akkor az $x(I) = n$ esemény valószínűsége:

$$P\{x(I) = n\} = \frac{(\lambda \Delta)^n}{n!} e^{-\lambda \Delta}, \quad (2.101)$$

azaz $x(I)$ *Poisson* eloszlású.

Ezek a tulajdonságok jól használhatók független növekményű folyamatokkal gerjesztett rendszerek analízise során.

A mintavételi tétel sztochasztikus folyamatok esetén

Sztochasztikus folyamatok esetén az időben folytonos és időben diszkrét reprezentációk közötti kapcsolat megteremtése éppoly fontos, mint determinisztikus jelek esetén. Ennek a kapcsolatnak központi eleme a mintavételi tétel, mely követelményt állít a sztochasztikus folyamat frekvenciatartománybeli tulajdonságaira vonatkozóan. Ezek szerint ha

$$\langle \mathcal{F}\{R_{xx}(f)\} = S_{xx}(f) = 0, \quad |f| > B \quad (2.102)$$

akkor az

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x \left(\frac{n}{2B} \right) \frac{\sin 2\pi B \left(t - \frac{n}{2B} \right)}{2B \left(t - \frac{n}{2B} \right)} \quad (2.103)$$

sortfejtésre (vö. 2.61. most $B_p = 2B$) teljesül, hogy

$$E\{|x(t) - \hat{x}(t)|^2\} = 0, \quad (2.104)$$

tehát a sávkorlátozott folyamat átlagos négyzetes értelemben reprezentálható

$T_s = \frac{1}{2B}$ időpillanatonkénti mintáinak segítségével.

2.3. Jelek ábrázolása jelterekben

A különféle jelreprezentációk számos közös vonást mutatnak. Ezeknek a vonásoknak egy viszonylag szemléletes interpretációjára nyílik lehetőség, ha a jeleket ún. jelterekben ábrázoljuk. A jelterek lényegében az euklideszi tér általánosításának tekinthetők, ahol valamilyen formában továbbra is érvényes az euklideszi térben megszokott távolságfogalom, mely orientál a tér egyes pontjai, azaz az egyes függvények között.

A jelterekben való reprezentáció matematikai háttere a funkcionálanalízis, mely a geometria, a lineáris algebra és az analízis eredményeinek egy olyan rendszerezése, mely jelentős segítséget nyújt számos matematikai probléma egységes szemléletű megközelítéséhez. A funkcionálanalízis eredményeinek alkalmazását elsősorban azok szemléletformáló ereje indokolja, a konkrét megoldási módszerek tulajdonképpen hagyományos algebrai eljárásokon alapulnak. A szemléletformálást azonban alapvetően fontosnak kell tekintenünk, mivel ezáltal a jelreprezentáció és az ezzel szoros kapcsolatban álló jelfeldolgozás egy viszonylag egyszerű, egységes, alapvetően geometriai képhez helyezhető. Ez nem csupán a különféle problémák megfogalmazásánál nyújt segítséget, hanem az egyes eljárások összehasonlításánál is.

Ebben a szakaszban áttekintjük az elterjedten használt jelterekkel kapcsolatos legfontosabb fogalmakat, és összefoglaljuk a diszkrét és folytonos reprezentációk főbb jellemzőit.

Az itt ismertetésre kerülő fogalmakat és módszereket a későbbiekben, elsősorban a 4. fejezetben „alkalmazásokban” fogjuk vizsgálni. Az ott szereplő eljárások megértéséhez az alábbiak ismerete mindenképpen szükséges. Igyekeztünk a helyenként nagyon absztraktnak tűnő fogalmakat leíró jelleggel, példákon keresztül bemutatni, a matematikai vonatkozásokat függelékbe helyeztük.

2.3.1. A jelterek tulajdonságai

Ebben a pontban a jelterek néhány, a jelreprezentáció szempontjából alapvető tulajdonságát mutatjuk be leíró jelleggel. A matematikai vonatkozásokat az F2.3. függelékben foglaltuk össze.

A jelterek speciális követelményeknek eleget tevő jelhalmazok. A követelmények jellegétől függően, bizonyos jelterekben a jelek közötti tájékozódást egy speciális leképezés (ún. funkcionál) támogatja, mégpedig úgy, hogy a tér minden elempárjához hozzárendel egy valós számértéket. Ez a hozzárendelés, ill. számérték felfogható egy *általánosított távolságnak*. Ha a hozzárendelésnél biztosítjuk, hogy az általánosított távolság nemnegatív, független a kiválasztott elempár elemeinek sorrendjétől, továbbá teljesül a háromszög egyenlőtlenség, akkor *metrikus térrel* van dolgunk. A távolságfogalom bevezetésén túlmenően a különféle jelreprezentációkkal kapcsolatban rendszerint további igények is felmerülnek. Ezek egy része kielégíthető oly módon, hogy *algebrai műveleteket* értelmezünk a jelterekben. Kitüntetett szerephez jutnak a *lineáris terek*, melyekben az algebrai műveleteket a linearitás mint feltétel figyelembevételével rögzítik. A metrikus tereket definiáló távolságfogalom és a lineáris terekben értelmezett algebrai fogalmak *összekapcsolása* oly módon valósítható meg, hogy a lineáris térben minden elemre definiáljuk annak „mértékét”, az ún. *normáját*. Ez nem más, mint a térbeli elem (mint vektor) „hossza”, melynek értelmezése a norma aktuális definíciójának ismeretében történhet meg. A jelterek felépítése lényegében azzal a lépéssel zárul, hogy a jeltér minden elempárjához hozzárendeljük az ún. *belső vagy skalárszorzatot*, mely az elempár elemeinek egymáshoz viszonyított elhelyezkedésére vonatkozóan ad alkalmas mérőszámot. Egy térbeli elem önmagára vonatkoztatott belső szorzata célszerűen annak norma négyzetével egyenlő. Az ilyen tereket belső szorzat tereknek nevezzük. Ezek tehát olyan speciális lineáris terek, melyeknél a belső szorzat fogalomhoz kapcsolódik a norma, majd ezt követően az utóbbihoz a metrikus térbeni távolság. A belső szorzat segítségével definiáljuk a lineáris tér vektorainak *ortogonalitását*. A lineáris vektorterek ortogonalitási fogalma általánosításaként azt mondjuk, hogy az x és y X térbeli elemek akkor és csak akkor ortogonálisak, ha (x, y) skalárszorzatuk nulla. Az ortogonalitás központi jelentőségű, gyakran fogjuk használni a továbbiakban.

A jelterekkel kapcsolatos legfontosabb fogalmak illusztrálására a következőkben bemutatunk néhány példát.

2.2. példa

Ebben a példában néhány lehetséges távolságfogalmat mutatunk be. A szám n -esek rendezett sorozata (R^n) esetében az $x = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ és $y = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ térbeli elemek távolságát többféleképpen is megadhatjuk. Az

$$a) d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| \quad (2.105)$$

$$b) d_2(x, y) = \left[\sum_{i=1}^n |a_i - b_i|^2 \right]^{1/2} \quad (2.106)$$

$$c) d_3(x, y) = \max \{ |a_i - b_i|; i = 1, 2, \dots, n \} \quad (2.107)$$

távolság definíciók mindegyike megfelel a követelményeknek. [A (2.106) definíció az ún. *euklideszi távolságfogalom*.] Hasonló távolságfogalmak definiálhatók függvé-

nyekre is. Például a $T = \{t; a \leq t \leq b\}$ intervallum felett értelmezett valós, vagy komplex időfüggvények tere esetén $(x, y \in X)$ többek között a

$$a) \quad d_1(x, y) = \int_T |x(t) - y(t)| \, dt \quad (2.108)$$

$$b) \quad d_2(x, y) = \left[\int_T |x(t) - y(t)|^2 \, dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.109)$$

$$c) \quad d_3(x, y) = \sup \{|x(t) - y(t)|; t \in T\} \quad (2.110)$$

távolságfogalmak mindegyike rögzítheti a metrikus teret.

A jelek reprezentálásával kapcsolatosan ezek a definíciók többnyire úgy jelentkeznek mint alkalmas hibakritériumok, melyek a reprezentáció „jóságának” alkalmas mérőszámai. A különféle jelreprezentálási feladatokban a minősítés alapjául szolgáló hibakritérium más és más lehet, de lényegében mindig valamilyen távolságfogalom alkalmazásáról van szó.

2.3. példa

A jelek jeltérbeni ábrázolása során fontos szerephez jutnak a lineárisan független elem- (ill. vektor) rendszerek. Központi jelentőségű a bázis fogalma, mely olyan lineárisan független rendszer, mely „kifeszíti” a teret, ennél fogva elemeinek alkalmas lineáris kombinációjával a tér minden eleme leírható. A valós vagy komplex szám n -esek R^n , ill. C^n halmaza n -dimenziós lineáris teret alkot, melynek minden eleme kifejezhető

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \quad (2.111)$$

alakban, ahol $\{e_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ n lineárisan független elem, pl. a következők szerint:

$$\begin{aligned} e_1 &= \{1, 0, \dots, 0\}, \\ e_2 &= \{0, 1, \dots, 0\}, \\ &\vdots \\ e_n &= \{0, 0, \dots, 1\}. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Az $\{\alpha_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ együttható-készletet az x vektor $\{e_i\}$ bázisra (koordináta-rendszerre) vonatkozó (R^n , ill. C^n -beli) reprezentációjának nevezzük.

2.4. példa

A jeltér valamely elemének normájaként előszeretettel definiálunk olyan mennyiséget mely kapcsolatban van a jel valamilyen fizikai jellegzetességével. Leggyakrabban a jel energiájával, ill. teljesítményével szoros kapcsolatban levő mennyiségeket használunk. A szám n -esek körében sok esetben megfelelő norma a következő:

$$\|x\| = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.113)$$

ami megfelel a (2.106) szerinti euklideszi távolságfogalomnak. A T intervallum felett definiált valós vagy komplex függvényekhez pl. hozzárendelhetjük az

$$\|x\| = \left[\int_T |x(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.114)$$

normát, ami megfelel a (2.109) szerinti távolságfogalomnak, ill. melynek négyzete a jel energiájaként interpretálható.

2.5. példa

A normált lineáris terek között kitüntetett szerephez jutnak az ún. l^p , ill. L^p terek. Az l^p tér ($1 \leq p \leq \infty$) azokból a skalár sorozatokból áll, melyekre

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p < \infty, \quad (2.115)$$

ill. a normájuk

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.116)$$

Jól látható, hogy ez a definíció a (2.113) definíció általánosítása $p \neq 2$, és végtelen dimenziós esetre. A (2.115) feltétel ezek szerint azt fejezi ki, hogy a végtelen dimenziós tér $\{\alpha_i; i = 1, 2, \dots\}$ sorozattal reprezentált eleme véges energiájú, ahol az energiát egy általánosított formában, p -edik hatvány szerint értelmezzük. Az $L^p(T)$ tér ($1 \leq p \leq \infty$) azokból a valós értékű x függvényekből épül fel, melyeket a T intervallumban értelmezzünk, és melyekre $|x(t)|^p$ Lebesgue értelemben integrálható. (A gyakorlat legtöbb esetére a Riemann integrálhatóság is teljesül.) A norma definíciója

$$\|x\|_p = \left[\int_T |x(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (2.117)$$

Itt is jól látható, hogy a norma a (2.114) definíció általánosítása $p \neq 2$ esetre. Az általánosított értelemben vett véges energiataralom tulajdonság $|x(t)|^p$ integrálhatósággal ekvivalens. Érdemes megjegyezni, hogy egyrészt a fizikai energiafogalommal való szoros kapcsolat miatt, másrészt a kedvező számítástechnikai kezelhetőség miatt leggyakrabban a $p=2$ esetet, azaz az l^2 , ill. $L^2(T)$ tereket használjuk. A későbbiekben látni fogjuk, hogy a (2.116—2.117) norma fogalmak, mint alkalmas hibakritériumok fontos szerephez jutnak. $p=2$ esetén a minimális hiba feltételének megkeresése egy deriválást követően lineáris összefüggés kiértékelését igényli, ami jelentős mértékben leegyszerűsíti a számítást.

2.6. példa

Ebben a példában a belső sorozat (skalársorozat) rögzítésének néhány lehetséges módját mutatjuk be.

A szám n -esek C^n terében a belső szorzatot az

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \quad x, y \in C^n \quad (2.118)$$

összefüggéssel definiálhatjuk. A jeltérben geometriai fogalmakkal tájékozódva a belső szorzatot olyan mennyiségként foghatjuk fel, mint ami a jeltér x és y eleme mint vektor által bezárt szög függvénye. Mivel mindig fennáll az $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$ egyenlőtlenség (*Schwarz-egyenlőtlenség*), a vektorok által bezárt szöget definiálhatjuk

$$\cos \Theta = \frac{\operatorname{Re} (x, y)}{\|x\| \|y\|}, \quad (2.119)$$

formában, amiből látszik, hogy ortogonális vektorok esetén, amikor $(x, y) = 0$, a vektorok által bezárt szög 90° , tehát merőlegesek egymásra. [A (2.119) összefüggés párhuzamba hozható minden olyan konkrét energia, ill. teljesítményszámítással, ahol az x , ill. y vektorok nem egyirányúak.]

Az l^2 térben a belső szorzatot az

$$(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i \bar{y}_i \quad x, y \in l^2 \quad (2.120)$$

összefüggéssel definiálhatjuk. Itt az i indexet a későbbi időtartománybeli vonatkozások miatt $-\infty$ -től futtatjuk.

Az $L^2(T)$ térben a belső szorzatot az előbbiek analógiájára

$$(x, y) = \int_T x(t) \bar{y}(t) dt \quad x, y \in L^2 \quad (2.121)$$

formában rögzítjük.

2.7. példa

A jelanalízis vizsgálatainak egyik fontos iránya annak elemzése, hogy a jelek bizonyos jellemzői hogyan változnak az idő függvényében. A jelterekben történő reprezentáció kapcsán felmerül annak lehetősége, hogy az idő függvényében lezajló változásokat térbeli távolságokkal reprezentáljuk. Szorítkozunk az $L^2(-\infty, \infty)$ térre, és vizsgáljuk benne az $x = x(t)$ és az $x_\tau = x(t + \tau)$ elemek távolságát:

$$\begin{aligned} d^2(x, x_\tau) &= \|x - x_\tau\|^2 = (x - x_\tau, x - x_\tau) = (x, x) + (x_\tau, x_\tau) - \\ &\quad - (x_\tau, x) - (x, x_\tau) = \|x\|^2 + \|x_\tau\|^2 - 2\operatorname{Re}(x, x_\tau). \end{aligned} \quad (2.122)$$

Az előző példával összhangban a belső szorzat egy alkalmas definíciója:

$$(x, x_\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{x(t + \tau)} dt. \quad (2.123)$$

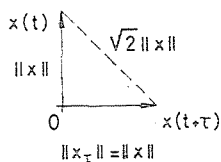
Definiáljuk továbbá az $r_x(\tau)$ függvényt:

$$r_x(\tau) = \operatorname{Re} (x, x_\tau) = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{x(t + \tau)} dt. \quad (2.124)$$

Mivel a jel $\|x\|^2$ energiatartalma nem függ a τ eltolástól, $r_x(\tau)$ felhasználásával

$$d^2(x, x_\tau) = 2[r_x(0) - r_x(\tau)] \quad (2.125)$$

írható. A belső szorzat és a távolság kifejezését elemezve megállapíthatjuk, hogy ha a jel időben gyors változású, akkor $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau)$ nagyobb értéket ad, mint lassú változás esetén. Konstans jelre a távolság nullának adódik. Ha $\mathbf{x}(t)$ és $\mathbf{x}(t+\tau)$ ortogonálisak, tehát $r(\tau)=0$, akkor $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau)=\sqrt{2}\|\mathbf{x}\|$. Ezt az esetet illusztrálja a 2.12. ábra.



2.12. ábra. Illusztráció $\mathbf{x}(t)$ és $\mathbf{x}(t+\tau)$ ortogonalitásához

Megjegyzés:

1. Az l^2 tér esetén az $\{x_n\}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ időben diszkrét időfüggvényt vizsgáljuk. A (2.123) belső-szorzat definíció megfelelője ilyenkor $\{x_\tau\}=\{x_{n+k}\}$ jelöléssel:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \bar{x}_{n+k}. \quad (2.126)$$

Az $r_x(\tau)$ megfelelője pedig:

$$r_x(k) = \text{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \bar{x}_{n+k}. \quad (2.127)$$

2. Az L^2 , ill. l^2 terekben az időeltolás hatása vizsgálható az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}_\tau$ elemek között is. Az összefüggéseinkben $\mathbf{x}_\tau$ helyére $\mathbf{y}_\tau$ -t írva megkapjuk az ehhez szükséges összefüggéseket.

3. Az $r_x(\tau) = \text{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau)$ függvény a sztochasztikus folyamatok reprezentálására használt autokorrelációs függvénnyel, az $r_{xy}(\tau) = \text{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_\tau)$ függvény pedig a keresztkorrelációs függvénnyel rokon. Mint azt a sztochasztikus folyamatok jelterekben történő reprezentációja kapcsán látni fogjuk, a korrelálatlanság (azaz a korrelációs függvény nulla volta) ortogonalitásnak felel meg, (vö. 2.12. ábra).

4. Érdemes megfigyelni, hogy a (2.123) és a (2.126) összefüggések $\mathbf{x}_\tau = \mathbf{y}$ helyettesítéssel ugyanazt adják, mint a (2.120–2.121) definíciók.

A jelterekkel kapcsolatos legfontosabb alapfogalmak áttekintése után rátérünk a jelek jeltérbeni reprezentációjának néhány konkrét vonatkozására. Bemutatjuk, hogy a belső szorzat bevezetésével mennyire hatékony eszközhöz jutottunk.

Induljunk ki abból, hogy M egy tetszőleges n dimenziós lineáris tér, melyet az $\{\mathbf{u}_i; i=1, 2, \dots, n\}$ bázis feszít ki. Ekkor $\mathbf{x} \in M$ esetén

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i. \quad (2.128)$$

Az egyenlet mindkét oldalán belső szorzatokat számolva:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) \alpha_i \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (2.129)$$

melyből kiszámítható $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, mely az $\mathbf{x}$ jelnek az $\{\mathbf{u}_i\}$ bázisra vonatkoztatott reprezentációja. Hasonlóan kedvező eredményt kapunk az ún. *reciprok bázis* be-

vezetésével. Az M tér $\{u_i\}$ bázisához hozzárendelünk egy $\{v_i\}$ bázist úgy, hogy elemei páronként ortogonálisak:

$$(u_i, v_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.130)$$

ahol $\delta_{ij} = 1$ ha $i = j$, egyébként $\delta_{ij} = 0$.

A (2.128) összefüggésben mindkét oldalon „szorozva” v_j -vel:

$$(x, v_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (u_i, v_j) = \alpha_j = (x, v_j) \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.131)$$

Ezek szerint az $\{u_i\}$ bázis és a $\{v_i\}$ reciprok bázis felhasználásával:

$$x = \sum_{i=1}^n (x, v_i) u_i = \sum_{i=1}^n (x, u_i) v_i \quad (2.132)$$

minden $x \in M$ esetén. Az $\{u_i\}$ és $\{v_i\}$ az M lineáris tér tetszőleges reciprok bázis párja.

Az M tér bázisai között kitéüntetett szerephez jutnak azok az $\{u_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ bázisok, melyekre fennáll:

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij}, \quad (2.133)$$

tehát kölcsönösen ortogonálisak, és normájuk egységnyi. Ezeket a bázisokat ortonormált bázisoknak nevezzük. Segítségükkel minden $x \in M$ vektor

$$x = \sum_{i=1}^n (x, u_i) u_i \quad (2.134)$$

alakban írható.

Az ortonormált bázis további kedvező tulajdonsága, hogy nemcsak az M tér vektoraihoz rendel egy-egy értelműen szám n -eseket, hanem megőrzi a belső szorzat értékét is. Ugyanis

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, \quad y = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i \quad x, y \in M \text{ esetén}$$

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^n \beta_j u_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j (u_i, u_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{\beta}_i = (\alpha, \beta). \quad (2.135)$$

Az ortonormált bázisok fentiekben vázolt kedvező tulajdonságai miatt felvetődik, hogy hogyan konstruálható egy ilyen bázisrendszer. A probléma megoldására számítástechnikailag igen kedvező a *Gram—Schmidt ortonormálási eljárás* (lásd F2.3. függelék).

A gyakorlat szempontjából nagyon fontos az az eset, amikor x nem eleme az M térnek, és mégis szeretnénk előállítani egy közelítő M -beli reprezentációját. Ekkor azt keressük, hogyan kell meghatározni az $\{\alpha_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ együtthatókat ahhoz, hogy a (2.128) alakú kifejezés a lehető legjobb közelítést adja. Ezzel a kérdéssel, ill. ennek általánosításaival foglalkozunk a következő két szakaszban.

A jelterek felépítése, ill. tulajdonságai kapcsán feltétlenül említést kell tennünk a (lineáris) funkcionálokról, melyek a komplex (lineáris) tér speciális leképezései a komplex számok C halmazára. Ilyen leképezés maga a távolság, ill. a belső szorzat fogalom

is, de számos egyéb gyakorlati probléma megoldása is kapcsolódik a funkcionálokhoz. Alapvető feladata az adatredukció, azaz összetett jelenségek reprezentálása valamilyen számadattal. Nagyon sok mérési feladat is (legalábbis részben) modellezhető velük. Legfontosabb tulajdonságaikat az F2.3. függelékben összefoglaltuk, itt csak azt a lényeges tulajdonságot emeljük ki, hogy az egy lineáris tér felett értelmezett lineáris funkcionálok ugyancsak lineáris teret alkotnak, ahol a lineáris funkcionál (pontos vagy közelítő) reprezentálása teljesen hasonló módon történhet, mint a jelek jeltérbeni ábrázolása.

2.3.2. Jelek diszkrét reprezentációja jelterekben

Jelreprezentációk kutatásakor alapvetően az a célunk, hogy a vizsgált jelet végezzámos numerikus érték segítségével adjuk meg. A jelterekre megismert fogalmak felhasználásával a feladatot átfogalmazhatjuk. A vizsgált jelet véges energiájú, $T = \{t; a \leq t \leq b\}$ felett értelmezett x valós vagy komplex időfüggvényeknek tekintjük, [azaz $x \in L^2(T)$] és keresünk egy olyan leképezést, mely az $L^2(T)$ teret a C^n térre vetíti, ahol n megválasztásánál pontossági és gazdaságossági megfontolásokat alkalmazunk. Ez a vetítés adatredukciót jelent, és pontosan azt a célt szolgálja, amit magunk elé tűztünk. A jelterekkel kapcsolatosan olyan eszközök is rendelkezésünkre állnak, melyek az adatredukció hatásáról, a közelítő reprezentáció pontosságáról képet tudnak adni.

A feladat megoldásának első lépéseként válasszuk ki az $L^2(T)$ tér egy n dimenziós M_n alterét, melyet a $\{\varphi_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ lineárisan független $L^2(T)$ -beli függvények feszítenek ki. Minden $x \in M_n$ függvény (jel) kifejezhető $\{\varphi_i\}$ lineáris kombinációjával:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(t), \quad t \in T, \quad (2.136)$$

ahol az $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ szám n -es pontosan a kívánt C^n -beli reprezentációt adja.

A belső szorzat fogalmának felhasználásával:

$$\begin{bmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_1) & \dots & (\varphi_n, \varphi_1) \\ (\varphi_1, \varphi_2) & (\varphi_2, \varphi_2) & \dots & (\varphi_n, \varphi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_1, \varphi_n) & (\varphi_2, \varphi_n) & \dots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x, \varphi_1) \\ (x, \varphi_2) \\ \vdots \\ (x, \varphi_n) \end{bmatrix} \quad (2.137)$$

ill.

$$G\alpha = \beta, \quad \alpha = G^{-1}\beta, \quad (2.138)$$

ahol

$$\beta^T = [(x, \varphi_1), (x, \varphi_2), \dots, (x, \varphi_n)]. \quad (2.139)$$

A G mátrixot *Gram-mátrixnak* nevezik, a (2.137) egyenlet pedig az ún. *normál egyenlet*, mely, mint látni fogjuk, alapvető szerepet kap a közelítő reprezentációnál is. A $\{\varphi_i\}$ bázist is vektorként felírva $\varphi^T = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]$ (2.136) a következő formában írható:

$$x(t) = \alpha^T \varphi = \beta^T G^{-1} \varphi. \quad (2.140)$$

Megjegyzés:

Az $\{\alpha_i\}$ paraméterek kifejezhetők a $\{\Theta_i\}$ reciprok bázis segítségével is:

$$\alpha_i = (\mathbf{x}, \Theta_i); \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.141)$$

Ebben az esetben a mátrix invertálást a reciprok bázis létrehozásához kell elvégeznünk.

A (2.136) összefüggés olyan $\mathbf{x}$ elem reprezentációját adja, mely eleme az $L^2(T)$ tér kiragadott n dimenziós M_n alterének. Továbbra is nyitott kérdés azonban, hogy hogyan reprezentáljuk azokat az $\mathbf{x}$ elemeket (jeleket), melyek nem elemei az M_n alternek. A probléma egy természetes megközelítése, hogy $\mathbf{x}$ reprezentálására kiválasztjuk az M_n altér azon $\hat{\mathbf{x}}$ elemét, amelyik legközelebb van $\mathbf{x}$ -hez.

Az ún. vetítési tétel értelmében ez az elem egyértelműen megadható az M_n altérben a következő formában:

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i = \alpha^T \varphi = \beta^T \mathbf{G}^{-T} \varphi. \quad (2.142)$$

Az $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ elem ortogonális minden M_n -beli elemre, továbbá $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| < \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|$; $\tilde{\mathbf{x}} \in M_n$, $\tilde{\mathbf{x}} \neq \hat{\mathbf{x}}$ esetén. Az ortogonalitás teljesülését először ellenőrizzük a φ vektor elemekre. Mivel

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}, \varphi_i) &= (\mathbf{x}, \varphi_i) - \sum_{j=1}^n \alpha_j (\varphi_j, \varphi_i) = (\mathbf{x}, \varphi_i) - \\ &- \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}, \Theta_j) (\varphi_j, \varphi_i) = (\mathbf{x}, \varphi_i) - (\mathbf{x}, \varphi_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.143)$$

Ebből azonban következik, hogy $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ M_n valamennyi elemére ortogonális.

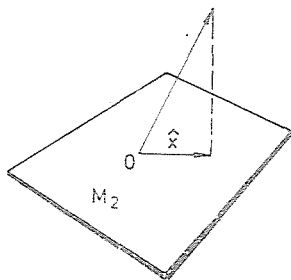
Az $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|$ minimális voltának igazolásához tekintsük az M_n tetszőleges $\tilde{\mathbf{x}}$ elemének és az $\mathbf{x}$ elem távolságát:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|^2 &= \|(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) - (\tilde{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}})\|^2 = (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) - (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}) - \\ &- (\tilde{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + (\tilde{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}). \end{aligned} \quad (2.144)$$

Mivel $(\tilde{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}) \in M_n$, a középső két tag nulla, tehát

$$\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|^2 = \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2 + \|\tilde{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \quad (2.145)$$

amiből nyilvánvalóan adódik $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|$ minimális volta. Az $\hat{\mathbf{x}}$ elemet $\mathbf{x}$ M_n -re történő ortogonális vetítésének (vetületének) nevezzük, a közelítés hibáját pedig az $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ normájával $\|\mathbf{e}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \|\hat{\mathbf{x}}\|^2$ -vel adjuk meg. Az ortogonális vetítést három dimenzióban a 2.13. ábra illusztrálja.



2.13. ábra. A vetítési tétel illusztrációja

Megjegyzés:

Érdeemes megjegyezni, hogy x M_n -beli α reprezentációja a (2.137) normál egyenlet megoldásával nyerhető, ugyanúgy, mint $x \in \tilde{M}_n$ esetén.

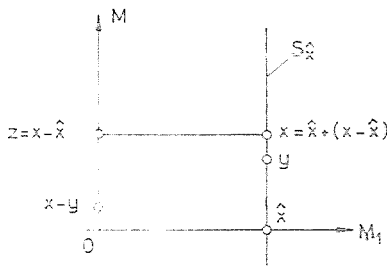
A jelreprezentációval kapcsolatban fontos fogalom az M_n *altér ortogonális komplementensének fogalma*. Az M_n altér M ortogonális komplemente egy olyan lineáris altér, melynek minden eleme ortogonális az M_n valamennyi elemére:

$$M = \{x; (x, \tilde{x}) = 0 \quad \forall \tilde{x} \in M_n\}. \quad (2.146)$$

Fontos tulajdonság, hogy a $L^2(T)$ tér minden eleme kifejezhető egy M_n -beli és egy M -beli vektor összegeként, mégpedig úgy, hogy ezek ortogonálisak:

$$x = \hat{x} + z; \quad \hat{x} \in M_n, \quad z \in M, \quad (\hat{x}, z) = 0. \quad (2.147)$$

(Emiatt a tulajdonság miatt az $L^2(T)$ teret az M_n és M terek *direkt összegeként* is feltekinthetjük: $L^2(T) = M_n \oplus M$.)



2.14. ábra. Illusztráció az ortogonális komplement altér fogalmához

A $z \in M$ elem nem egyéb, mint (2.142) alakú reprezentáció hibája. Kétdimenziós esetre a fentiekben vázolt fogalmakat a 2.14. ábra illusztrálja. Az ábra alapján jól látható, hogy az x elemet az M altérre vetítve az M_n -beli reprezentáció hibáját kapjuk meg. Az M altér tartalmazza az összes olyan x, y elempár $x - y$ különbségét, melyek eleget tesznek az

$$(x, \varphi_i) = (y, \varphi_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.148)$$

egyenlőségnek. Az összes ilyen elempár az $S_{\hat{x}} = \hat{x} + M$ affin altérben található. Érdekes még megjegyezni, hogy az M és M_n alterek egyetlen közös eleme a 0 elem, továbbá, hogy $L^2(T)$ feltételezése mellett M végtelen dimenziós.

Teljes ortonormált rendszerek

Bizonyítható, hogy az ortogonális vetítésre alapozott approximáció tetszőleges $x \in L^2(T)$ elemre minden határon túl javítható n alkalmas megválasztásával (ez az $L^2(T)$ tér teljes és szeparábilis voltának következménye). Ennek formája:

$$x \sim x_n = \sum_{i=1}^n (x, \varphi_i) \varphi_i, \quad (2.149)$$

ahol $\{\varphi_i\}$ megszámlálhatóan végtelen elemű ortonormált halmaz.

Mivel x_n ortogonális $x - x_n$ -re [vö. (2.143)]:

$$\|x - x_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |(x, \varphi_i)|^2, \quad (2.150)$$

amiből leolvasható, hogy

$$\sum_{i=1}^n |(x, \varphi_i)|^2 \leq \|x\|^2 \quad (2.151)$$

tetszőleges n -re.

A (2.151) összefüggés az ún. *Bessel* egyenlőtlenség. Ezek szerint a sorfejtésben szereplő (x, φ_i) együtthatók négyzetesen összegeezhetők minden $x \in L^2(T)$ esetén. Ugyancsak a *Bessel* egyenlőtlenség felhasználásával látható be, hogy $\{x_n\}$ *Cauchy*-sorozat, mivel tetszőleges $\varepsilon > 0$ és elegendően nagy n_0 mellett

$$\|x_n - x_m\|^2 = \sum_{i=m+1}^n |(x, \varphi_i)|^2 < \varepsilon^2 \quad n > m > n_0, \quad (2.152)$$

továbbá az $L^2(T)$ tér teljes is, tehát a *Cauchy*-sorozat konvergens lesz. Ha a $\{\varphi_i, i = 1, 2, \dots\}$ teljes ortonormált rendszer, akkor ez a *Cauchy*-sorozat az x -hez konvergál. Egy ortonormált rendszert akkor nevezünk teljesnek, ha nem lehetséges további nem zérus, ortogonális elemmel bővíteni. (Ez a teljesség fogalom nem azonos a metrikus térben értelmezett teljesség fogalommal.) Az $L^2(T)$ tér szeparábilis volta biztosítja, hogy a teljes ortonormált rendszer megszámlálható halmaz. A teljes ortonormált rendszer tulajdonságaiból következik, hogy

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(x, \varphi_i)|^2 = \|x\|^2 \quad \forall x \in L^2(T). \quad (2.153)$$

Mindezek alapján belátható, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett van olyan n_0 , hogy

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n (x, \varphi_i) \varphi_i \right\| < \varepsilon \quad n > n_0 \quad \forall x \in L^2(T). \quad (2.154)$$

Megjegyzés: Az ortonormált bázis önreciprok volta következtében az x elem M_{n+1} térre történő vetítése nem igényli valamennyi összefüggés újbóli értékelését, ha az M_n -re történő vetítés ismert, csak az (x, φ_{n+1}) kiszámítása szükséges.

Jelek reprezentálására szolgáló bázisfüggvények generálásakor sokszor felmerülő igény, hogy a közelítés hibáját valamilyen súlyozás után kapjuk meg. Ennek kielégítésére definiálható $L^2(T)$ -ben egy $q(t)$ pozitív és valós súlyfüggvényre nézve a belső szorzat:

$$(x, y)_q = \int_T q(t) x(t) \bar{y}(t) dt. \quad (2.155)$$

Azt mondjuk, hogy a $\{\varphi_i\}$ ortonormált rendszer a $q(t)$ súlyfüggvényre nézve, ha $(\varphi_i, \varphi_j)_q = \delta_{ij}$.

Megjegyzés: Ha $\{\varphi_i\}$ ortonormált rendszer a $q(t)$ súlyfüggvényre nézve, akkor a $\{\psi_i; \psi_i(t) = \sqrt{q(t)} \varphi_i(t); i = 1, 2, \dots\}$ rendszer ortonormált a szokásos értelmezés szerint.

Példák teljes ortonormált rendszerekre

A következőkben néhány, elterjedten használt teljes ortonormált rendszert mutatunk be. Ezeknek az ortonormált rendszereknek a jelentősége mérés technikai szempontból abból fakad, hogy számos gyakorlati mérési feladat megoldásánál hatékony segédeszköznek bizonyulnak. Olyan jelreprezentációt valósítanak meg ugyanis, mely támogatja az adatredukciót és sok esetben egyszerűsíti a feldolgozást. Ilyen ortonormált rendszerek alkalmazása esetén az adatredukciót úgy tudjuk megvalósítani, hogy az valamilyen (általunk választott) kritérium szerint optimálisnak tekinthető. A jól megválasztott adatredukciós eljárás ugyanakkor jelentősen csökkentheti a mérési eljárás, ill. a későbbi feldolgozás bonyolultságát, és ezen belül az adattárolási és feldolgozási időigényeket.

1. A komplex exponenciálisok rendszere

$T = [-1, +1]$ és $q(t) = 1$ esetén az $\{e^{jn\pi t}; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

függvények rendszere ortogonális, csak alkalmas normálás szükséges.

Az

$$x = x(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{jnk\pi t}, \quad (2.156)$$

ahol

$$\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 x(t) e^{-jnk\pi t} dt, \quad (2.157)$$

a jól ismert *Fourier*-sorfejtés a $[-1, 1]$ intervallumra korlátozott, vagy a 2 periódusú függvényekre.

Megjegyzés: T nyilván tetszőleges intervallum lehet, ez csak léptékezés kérdése.

2. A Laguerre-polinomokból, ill. függvényekből felépíthető rendszerek

$T = [0, \infty)$ és $q(t) = e^{-t}$ esetén a

$$\varphi_n = \varphi_n(t) = \frac{1}{n!} L_n(t) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.158)$$

polinomok ortogonális rendszert alkotnak. $L_n(t)$ az ún. *Laguerre*-polinom

$$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}). \quad (2.159)$$

Az $L_n(t)$ polinom kielégíti a következő rekurziós formulát:

$$L_n(t) = (2n - 1 - t) L_{n-1}(t) - (n - 1)^2 L_{n-2}(t). \quad (2.160)$$

Megjegyzés: A valós ortonormált polinomok mindig kielégítenek egy

$$\varphi_n = \varphi_n(t) = (a_n t + b_n) \varphi_{n-1}(t) - c_n \varphi_{n-2}(t) \quad (2.161)$$

alakú rekurziós formulát.

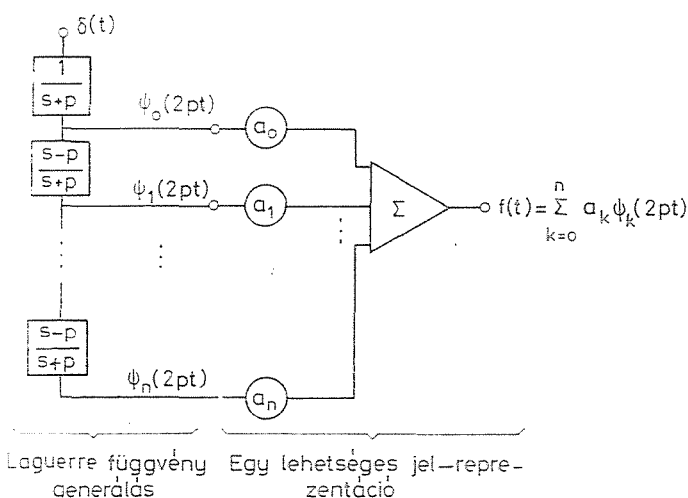
$T = [0, \infty)$ és $q(t) = 1$ esetén a

$$\psi_n(t) = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{n!} L_n(t) \quad (2.162)$$

ún. *Laguerre*-függvények ortonormált rendszert alkotnak. Ez a rendszer fizikailag viszonylag egyszerűen realizálható, ugyanis

$$\mathcal{L}\{\psi_n(2pt)\} = F_n(s) = \frac{(s-p)^n}{(s+p)^{n+1}} \quad (2.163)$$

($p > 0$ valós konstans). A *Laguerre*-függvények rendszerét megvalósító hálózat tömbvázlata a 2.15. ábrán látható. Egy ilyen berendezés, ill. algoritmus sok esetben kedvezőnek bizonyul kiegyenlítési eljárást tartalmazó mérési összeállításokban, adaptív rendszerekben.



2.15. ábra. Függvény generálás *Laguerre* függvények lineáris kombinációjával

3. A *Hermite*-polinomokból, ill. függvényekből felépíthető rendszerek

$T = (-\infty, \infty)$ és $q(t) = e^{-t^2}$ esetén a

$$\varphi_n = \varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(t) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.164)$$

ortonormált rendszert alkot. $H_n(t)$ az ún. *Hermite*-polinom:

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2}) \quad (2.165)$$

A $H_n(t)$ polinom kielégíti a következő rekurziós formulát:

$$H_n(t) = 2t H_{n-1}(t) - 2(n-1) H_{n-2}(t). \quad (2.166)$$

$T = (-\infty, \infty)$ és $q(t) = 1$ esetén a

$$\psi_n = \psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t) \quad (2.167)$$

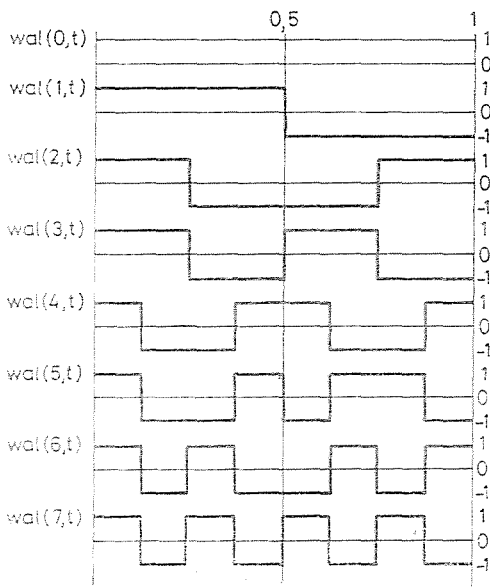
ún. *Hermite-függvények* ugyancsak ortonormált rendszert alkotnak. Alkalmazásukra elsősorban a sztochasztikus folyamatok reprezentációja kapcsán kerül sor.

4. A Walsh-függvények

$T = [0, 1]$ és $q(t) = 1$ esetén a $wal(n, t)$ ún. *Walsh-függvények* ortonormált rendszert alkotnak. A $wal(n, t)$ függvények kifejezhetők a következő formulával:

$$wal(2m+p, t) = (-1)^{[m/2]+p} \left\{ wal \left(m, 2 \left(t + \frac{1}{4} \right) \right) + (-1)^{m+p} wal \left(m, 2 \left(t - \frac{1}{4} \right) \right) \right\}, \quad (2.168)$$

ahol $p=0$ vagy 1 , $m=0, 1, 2, \dots$, $[m/2]$ a legnagyobb egészzet jelöli ($m/2$ vagy $(m-1)/2$).



2.16. ábra. Az első nyolc Walsh-függvény

A *Walsh-függvények* rendszere egyszerűen realizálható digitális eszközökkel. A 2.16. ábrán az első 8 Walsh függvényt mutatjuk be.

Az eddigiekben vázolt ortonormált rendszerek mellett több olyan rendszer létezik, mely kielégíti az ortonormáltság feltételét. Gyakran említésre kerülnek a *Jacobi-polinomok*, melyek sokoldalúan használhatók, továbbá a *Haar* és a *Rademacher-féle rendszerek*, melyek inkább a *Walsh*-rendszerrel hozhatók kapcsolatba.

Az előző szakaszban megállapítottuk, hogy a *lineáris funkcionálok* nagyon fontos szerepet töltenek be a jelreprezentációkkal kapcsolatban. Ismeretes az is, hogy egy X Hilbert-tér felett definiált lineáris funkcionálok kifejezhetők belső-szorzat formában:

$$f_\varphi(x) = (x, \varphi) \quad (2.169)$$

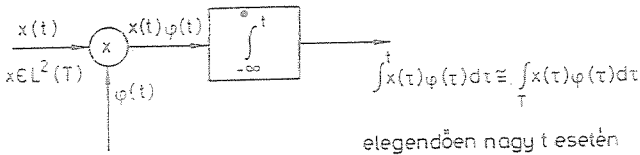
Felidézve a belső szorzat példaként említett lehetséges definícióit, jól látható, hogy a lineáris funkcionál a tér φ elemére vonatkoztatva jellemzi annak egy x elemét, mégpedig úgy, hogy egy valós vagy komplex számértéket rendel hozzá. Egy ilyen hozzárendelést megvalósító berendezés blokkvázlata látható a 2.17. ábrán.

A $\varphi(t)$ jel felfogható egy általánosított kapuzó jelnek. Ha pl. a $\varphi(t)$ jel $\delta(t - t_0)$ -val, vagy annak fizikailag realizálható közelítésével egyezik, akkor jól látható módon a 2.17. ábra a mintavételező funkcionált valósítja meg. Ha több ilyen funkcionált realizáló berendezést közös bemenőjellel párhuzamosan működtetünk, továbbá rendre a $\{\Theta_i\}$ reciprok bázis elemeit vezetjük a kapuzó bemenetekre, akkor egy olyan eszközhöz jutunk, mely a kimenetein az $x(t)$ jel $\{\varphi_i\}$ bázisra vonatkozó reprezentációját, az $\{\alpha_i\}$ együtthatókészletet adja. (Vö. (2.141) összefüggés.) A berendezés blokkvázlata a 2.18. ábrán látható. Funkciója alapján általánosított hullámforma-analízatornak nevezhetjük.

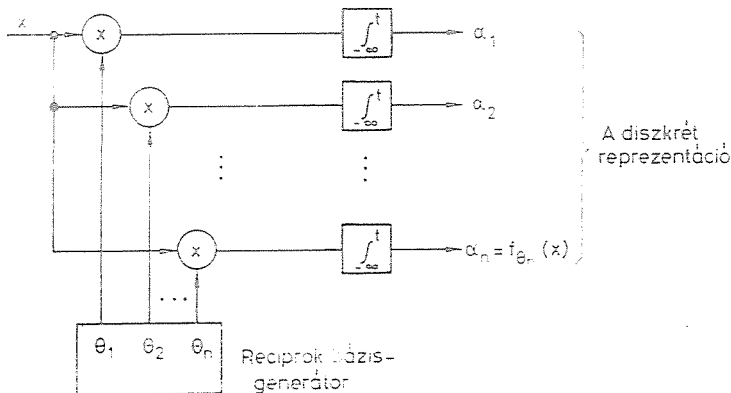
Ismeretes (lásd F2.3. függelék), hogy a (2.169) összefüggéssel definiált lineáris funkcionálok maguk is lineáris teret alkotnak, mégpedig az X Hilbert-tér $\bar{X}$ konjugált terét. Ebben a belső szorzat

$$(f_\varphi, f_\psi) = (\varphi, \psi) = (\psi, \varphi). \quad (2.170)$$

ahol $\varphi, \psi \in X$. Tudjuk továbbá azt is, hogy ha $\{\varphi_i\}$ az X Hilbert-tér bázisa, akkor $\{f_{\varphi_i}\}$ bázisa lesz az $\bar{X}$ konjugált térnek, ahol $\{\Theta_i\}$ a reciprok bázis a $\{\varphi_i\}$ bázisra vonat-



2.17. ábra. Az $f_\varphi(x) = (x, \varphi)$ lineáris funkcionál egy lehetséges megvalósítási formája



2.18. ábra. Az általánosított hullámforma analízator

kozóan $((\varphi_i, \Theta_j) = \delta_{ij})$. Mindezek felhasználásával egy tetszőleg $f_u \in \bar{X}$ lineáris funkcionál kifejezhető lineáris kombináció formájában:

$$f_u = \sum_i f_{u_i}(\varphi_i) f_{\Theta_i} = \sum_i (\varphi_i, u) f_{\Theta_i}. \quad (2.171)$$

Felidézve a jelek közelítő reprezentációjának az előzőekben tárgyalt módszereit, természetes módon vetődik fel az a kérdés, hogy hogyan épül fel egy hasonló közelítő reprezentáció a lineáris funkcionálok esetében. Ehhez kiindulásként tökéletesen megfelelő a 2.18. ábrán látható általánosított hullámforma analízátor, mely az f_{Θ_i} , $(i=1, 2, \dots, n)$ funkcionálok egy sorozatát valósítja meg. A megoldás az lesz, hogy az eddigiekkel összhangban egy N_n altér $\{\varphi_i, i=1, 2, \dots, n\}$ bázisa által generált $\{f_{\Theta_i}; i=1, 2, \dots, n\}$ $\bar{X}$ -beli bázisra fogunk vetíteni, a vetítési tétel szabályainak megfelelően. Ezek szerint $f_u \in N_n$ N_n -beli közelítő reprezentációja

$$\hat{f}_u = \sum_{i=1}^n a_i f_{\Theta_i}, \quad (2.172)$$

$$\text{ahol } a_k = (f_u, f_{\varphi_k}) = (\varphi_k, u). \quad (2.173)$$

Az u jel N_n -beli reprezentációja:

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \Theta_i. \quad (2.174)$$

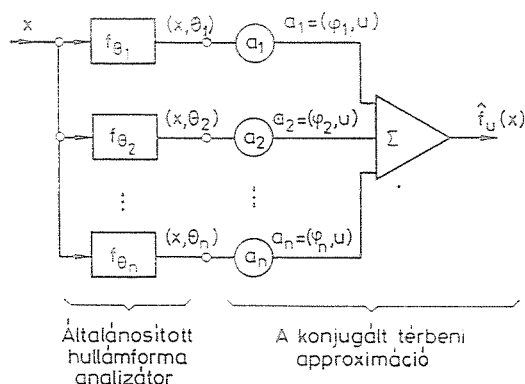
A korábbiakból ismert, hogy az u jel approximációjának hibája $\|u - \hat{u}\|$. Mivel az X Hilbert-térről áttérve az $\bar{X}$ konjugált térre a belső szorzat nem változik, az f_u lineáris funkcionál közelítésének hibája:

$$\|f_u - \hat{f}_u\| = \|u - \hat{u}\|. \quad (2.175)$$

A (2.172) összefüggést realizáló berendezés blokkvázlata a 2.19. ábrán látható.

Elképzelhető, hogy az X Hilbert-tér egy M_n n dimenziós alterének x elemét egy olyan általánosított hullámforma analízátor felhasználásával kívánjuk reprezentálni, mely $m \leq n$ komponens kiszámítására alkalmas. Ilyenkor az x jelet először az általánosított hullámforma-analízátorral levetítjük az N_m altérre, majd a vetítés révén létrejött m komponenszt vetítjük az M_n altérre. Ez utóbbi egy $n \times m$ méretű mátrixszal történő szorzással valósítható meg.

Megjegyzés: Az időben diszkrét jelek esetében a realizáció a 2.17. és 2.18. ábrákhoz teljesen hasonlóan épül fel, mindössze az integrálást szummázásra kell cserélni.



2.19. ábra. Lineáris funkcionál közelítő reprezentációja

2.3.3. Jelek folytonos reprezentációja jelterekben

A jelek folytonos reprezentációja különféle integrál transzformációk felhasználásával történik. Az integrál transzformációk általános tárgyalásához induljunk ki a (2.136) összefüggésből, mely egy $x(t)$ jelet lineáris kombináció formában állít elő. Az összefüggés i diszkrét változóját cseréljük ki $s \in S$ -re, ahol S a valós tengely egy meghatározott intervalluma. A szummázást S feletti integrálra cserélve

$$x(t) = \int_S u(s) \varphi(t, s) ds, \quad t \in T, \quad (2.176)$$

ahol $u(s)$ az $x(t)$ jel folytonos reprezentációja (hasonló a (2.136) kifejezésben szereplő $\{\alpha_i\}$ diszkrét reprezentációhoz). Az $u(s)$ függvényt felfoghatjuk sűrűségfüggvényként, mely azt fejezi ki, hogy $x(t)$ hogyan épül fel $\varphi(t, s)$ -ből.

A $\varphi(t, s)$ függvényt a *transzformáció magfüggvényének* nevezzük. (2.176) inverzét felírva

$$u(s) = \int_T x(t) \Theta(s, t) dt \quad s \in S, \quad (2.177)$$

ahol $\Theta(s, t)$ a reciprok magfüggvény. A (2.176) és (2.177) összefüggéseket (*integrál-transzformáció párnak* nevezzük.

A következőkben példaként két elterjedt integráltranszformáció tulajdonságait foglaljuk össze.

Fourier-transzformáció

$T = (-\infty, \infty)$ és $S = (-\infty, \infty)$ esetén a

$$\varphi(t, s) = e^{j2\pi st}, \quad \Theta(s, t) = e^{-j2\pi st} \quad (2.178)$$

magfüggvényekkel a jól ismert

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (2.179)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (2.180)$$

transzformáció pár írható fel. Mivel a magfüggvények önreciprokok, teljesül az ún. Parseval-tétel:

$$(X, Y) = (x, y). \quad (2.181)$$

Hilbert-transzformáció

$T, S = (-\infty, \infty)$ mellett a

$$\varphi(t-s) = \frac{-1}{\pi(t-s)}; \quad \Theta(s-t) = \frac{1}{\pi(s-t)} \quad (2.182)$$

magfüggvények az ún. *Hilbert*-transzformációt jelölik ki:

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{\pi} \int \frac{\hat{x}(s)}{s-t} ds, \\ \hat{x}(s) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t)}{s-t} dt\end{aligned}\quad (2.183)$$

ahol

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{s-\varepsilon} + \int_{s+\varepsilon}^{\infty} \right); \quad \varepsilon > 0.$$

A transzformáció gyakorlatban gyakran használt tulajdonsága, hogy az $x(t)$ és az $\hat{x}(s)$ transzformált *Fourier*-transzformáltjai között a következő kapcsolat áll fenn:

$$\begin{aligned}\hat{\hat{X}}(f) &= -j(\operatorname{sgn} f)X(f), \\ X(f) &= j(\operatorname{sgn} f)\hat{X}(f).\end{aligned}\quad (2.184)$$

Ennek alapján létrehozhatunk egy olyan $z(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$ komplex jelet, melynek egyoldalas a *Fourier*-transzformáltja. Az ilyen függvények fontos szerepet játszanak átviteltechnikai rendszerekben.

2.3.4. A diszkrét és a folytonos jelábrázolás kapcsolata

Az előző két pont legfontosabb eredményeit a 2.10. táblázat foglalja össze.

A diszkrét reprezentáció sok esetben interpretálható integráltranszformáció speciális eseteként. Ha ugyanis x a

$$\{\varphi(i, s_i); i = 1, 2, \dots\}$$

2.10. táblázat

A diszkrét és folytonos jelábrázolás összehasonlítása

Diszkrét	Folytonos
$x(t) = \sum_i \alpha_i \varphi_i(t); \quad t \in T$	$x(t) = \int_S u(s) \varphi(t, s) ds \quad t \in T$
$\alpha_i = (x, \varphi_i); \quad i = 1, 2, \dots$	$u(s) = \int_T x(t) \varphi(s, t) dt \quad s \in S$
$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$	$\left\{ \begin{aligned} \int_S \varphi(t, s) \varphi(s, \tau) ds &= \delta(t - \tau) \\ \int_T \varphi(s, t) \varphi(t, \sigma) dt &= \delta(s - \sigma) \end{aligned} \right.$

bázis által kifeszített altérben fekszik, azaz ha

$$x(t) = \sum_i \alpha_i \varphi(t, s_i),$$

akkor

$$u(s) = \int_T \sum_i \alpha_i \varphi(t, s_i) \Theta(s, t) dt = \sum_i \alpha_i \delta(s - s_i). \quad (2.185)$$

Ezek szerint az $x(t)$ reprezentálására szolgáló sűrűségfüggvény teljes mértékben az $s = s_i$ pontokban koncentrálódik. Vannak olyan jelek, melyekre ez a bizonyos sűrűségfüggvény normál függvények és Dirac- δ -függvények keverékéből áll. Ilyenkor célszerű a jelet „diszkrét” és „folytonos” részre bontani.

Elsősorban a jelfeldolgozás szempontjából, módszereiből kiindulva a diszkrét és folytonos jelábrázolás kérdését más megvilágításban is elemezni szoktuk.

Elsősorban az érdekel minket, hogy az analóg (az időben folytonos) és a digitális (időben diszkrét) reprezentáció milyen kapcsolatban áll egymással. Az eddigiek alapján tudjuk, hogy az „analóg” jeleket az $L^2(T)$ térhez tartozónak, a „digitális” jeleket pedig az l^2 térhez tartozónak tekinthetjük. Az $L^2(T)$ tér szeparábilis volta biztosítja, hogy az $L^2(T)$ tér és a l^2 tér között fennáll egy speciális *izomorfia*, amiből levezethető, hogy az analóg és a digitális jelfeldolgozás ekvivalens. Ezen belül azonban a folytonos és a diszkrét jelek megfeleltetése többféleképpen történhet. A legközismertebb megfeleltetés a sávkorlátozott jelek mintavételes reprezentációja, mellyel a 2.2.3. pontban részletesen foglalkoztunk. A következőkben egy másik megközelítést mutatunk be. Abból indulunk ki, hogy olyan megfeleltetés használata célszerű, mely *megőrzi a konvolúciót*. Egy ilyen megközelítésnek az ad értelmet, hogy nagyon sok jel reprezentálásához, ill. feldolgozásához kötődik valamilyen lineáris, idő-invariáns rendszer alkalmazása, melyet időben diszkrét reprezentáció esetén célszerűen lineáris eltolás-invariáns rendszer alkalmazásával váltunk ki.

Jelölje a folytonos rendszer bemenőjelét $x(t)$, kimenőjelét $y(t)$, súlyfüggvényét pedig $h(t)$ (csak a skalár esetet tárgyaljuk). Ugyanezeket időben diszkrét esetben $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, és $\{h_n\}$ jelöli. Szeretnénk megfeleltetni egymásnak az $x(t)$, $\{x_n\}$, továbbá az $y(t)$, $\{y_n\}$, valamint a $h(t)$, $\{h_n\}$ jeleket. A megfeleltetés a következőképpen történhet:

1. Előírjuk, hogy fennálljon:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t) \quad (2.186)$$

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k} = x_n * h_n \quad (2.187)$$

2. Az $\{x_n\}$ diszkrét időfüggvényt felírjuk

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta_{n-k} \quad (2.188)$$

alakban. ($\delta_{n-k} = 0$, ha $n \neq k$, $\delta_0 = 1$).

3. A $\{\delta_{n-k}\}$ $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ diszkrét időfüggvénnyel reprezentált folytonos időfüggvényt $\Phi_k(t)$ jelöli. Ezzel

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \Phi_k(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \Phi_n(t). \quad (2.189)$$

4. (2.189) *Laplace*-transzformáltját, továbbá $y(t)$, ill. $h(t)$ hasonló alakját helyettesítsük a (2.186) kifejezés *Laplace*-transzformáltjába.

$$\left. \begin{aligned} X(s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \Phi_n(s) \\ Y(s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \Phi_n(s) \\ H(s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \Phi_n(s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Y(s) = H(s)X(s) \quad (2.190)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \Phi_n(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k} \Phi_{n-k}(s) \Phi_k(s). \quad (2.191)$$

5. Az előző egyenlet bal oldalába behelyettesítve a (2.187) összefüggést az

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k} \Phi_n(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k} \Phi_{n-k}(s) \Phi_k(s) \quad (2.192)$$

alakhoz jutunk, melyből leolvasható egy $\Phi_n(s)$ -re vonatkozó feltételi egyenlet:

$$\Phi_n(s) = \Phi_{n-k}(s) \Phi_k(s), \quad (2.193)$$

melyből a $\{\Phi_n(s)\}$ függvények általános alakja meghatározható. A (2.193) egyenletet $k=1$ -re megoldva:

$$\Phi_n(s) = [\Phi_1(s)]^n. \quad (2.194)$$

Ez az a feltétel, amit be kell tartani ahhoz, hogy a folytonos konvolúciót diszkrét konvolúcióba képezzük le.

Ezen gondolatmenet alapján lehetőségünk van arra is, hogy megadjuk egy folytonos jel *Laplace*-transzformáltjának, és a hozzárendelt diszkrét jel z transzformáltjának kapcsolatát is. Mivel

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}, \quad (2.195)$$

továbbá

$$X(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \Phi_n(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \{[\Phi_1(s)]^{-1}\}^{-n}. \quad (2.196)$$

Ezek szerint:

$$z = [\Phi_1(s)]^{-1} \triangleq M(s). \quad (2.197)$$

A sávkorlátozott jelek mintavételes reprezentációja a fentiekben vázoltak egy speciális eseteként interpretálható. Ebben az esetben

$$\Phi_n(t) = \frac{\sin \frac{\pi}{T} (t - nT_s)}{\pi(t - nT_s)}, \quad \Phi_n(j\omega) = \begin{cases} e^{-j2\pi f n T_s} & |2\pi f T_s| \leq \pi, \\ 0 & |2\pi f T_s| > \pi. \end{cases} \quad (2.198)$$

Az időben diszkrét reprezentációnak ez a fajtája nagyon kedvező abból a szempontból, hogy a sorfejtésben szereplő együtthatók egyszerűen meghatározhatók. Kifejezetten korlátozó tényező azonban, hogy az $x(t)$ jelnek sávkorlátozottnak kell lennie.

Ha nem követeljük meg, hogy a folytonos, ill. diszkrét reprezentációkhoz kapcsolódó frekvenciaskálák kapcsolata lineáris legyen, akkor lehet olyan $z = M(s)$ leképezést definiálni, melynek alkalmazhatóságához a sávkorlátozottságot nem kell kikötni. Jellegzetes példája az ilyen leképezéseknek a *bilineáris leképezés*, melyre

$$z = M(s) = \frac{a+s}{a-s}; \quad \Phi_n(s) = \left[\frac{a+s}{a-s} \right]^{-n}. \quad (2.199)$$

Ez egy konform leképezés, mely az s komplex sík bal félsíkját a z sík egységsugarú körébe viszi át. Elterjedten használt eszköz digitális szűrők tervezésekor, továbbá mintavételes szabályozások stabilitás vizsgálatakor. Gyakorlatilag egyetlen hátránya, hogy a frekvenciaskálák kapcsolata nemlineáris:

$$s = a \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow 2\pi f_f = a \operatorname{tg} \frac{2\pi f_d T_s}{2}, \quad (2.200)$$

ahol f_f a folytonos, f_d pedig a diszkrét reprezentáció frekvenciaváltozója.

2.3.5. A jelterek felépítése sztochasztikus jelek esetén

A 2.2.4. pontban láttuk, hogy a sztochasztikus jelmodellek osztályát

$$M_R = \{x; x(t, \xi), t \in T, \xi \in \Omega\} \quad (2.201)$$

formában jellemezhetjük. Tudjuk, hogy rögzített $t_1 \in T$ esetén egy valószínűségi változóval állunk szemben. Ezekre a valószínűségi változókra, a valószínűségi változókból álló vektorokra, továbbá a valószínűségi változók függvényeire felépíthetünk az eddigiekkel teljesen analóg módon jeltereket, eltérést csak két ponton tapasztalhatunk:

1. A távolság, a belső szorzat és a norma definiálása a valószínűségi változók (a sztochasztikus jel) alkalmas momentumainak felhasználásával történik. Ez valamilyen formában várható érték képzést jelent. Ennek megfelelően a teret olyan valószínűségi változók (sztochasztikus jelek) összessége alkotja, melyek megfelelő momentumai végesek. Többnyire a második momentum véges voltát kívánjuk meg. Bizonyítható, hogy ilyenkor az L^2 térben vagyunk.

Megjegyzés: Sztochasztikus jelek jelterekben történő reprezentációjánál a 2.2.4. pontban leírtakhoz hasonlóan a folyamatokat többnyire a második momentumaival jellemezzük. Ezek szerint a térben négyzetes értelemben tájékozódunk (és approximálunk), további (pl. magasabbrendű) momentum használatát a jeltér eddigiekben vázolt kiépítése nem támogatja.

2. A determinisztikus esettől eltérően a belső szorzat, ill. norma fizikai tartalma nem valamilyen jelenergia, hanem valamilyen átlagos intenzitás, ill. átlagteljesítmény. Ez egyrészt összhangban van azzal, hogy sztochasztikus jeleknél általában nem tudjuk biztosítani a jel energia véges értékét, másrészt azzal, hogy a belső szorzatot és a normát alkalmas momentumként definiáltuk (azaz nem az idő paraméter függvényében értelmezzük). Mindez azonban nem változtatja meg a jeltérben történő tájékozódás eddigiekben tárgyalt módosait.

A jeltér egy adott pontja determinisztikus esetben tipikusan a következő lehetőségek egyikének felel meg:

- számérték $x \in C$;
- szám n -es $x \in C^n$;
- valamilyen függvény pl. $x \in L^2$ vagy $x \in l^2$.

Sztochasztikus esetben a jeltér egy pontja tipikusan a következő lehetőségek egyikeként felel meg:

- valószínűségi változó $x(\xi)$;
- valószínűségi vektorváltozó $\mathbf{x}(\xi)$;
- valószínűségi változó (ill. vektorváltozó) egyparaméteres sokasága $x(t, \xi)$, $(\mathbf{x}(t, \xi))$;
- valószínűségi változó függvényének egyparaméteres sokasága (sztochasztikus folyamat függvénye).

Az analógia nyilvánvaló, és látszik az is, hogy az alkalmas momentumok kiszámítását követően a sztochasztikus jelek jelterekben történő reprezentációja ekvivalens a determinisztikus reprezentációval, legfeljebb annyi eltérés tapasztalható, hogy a reprezentálásra szolgáló belső szorzat, ill. norma értékek az idő paraméter függvényei lesznek.

A jeltérben tehát pl. egy $\mathbf{x}$ sztochasztikus folyamatot reprezentáló pontot az $E\{\mathbf{x}^2\}$ momentumával, ill. annak négyzetgyökével, mint normával jellemezhetünk.

A belső szorzat definíciója:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = E\{\mathbf{x}\mathbf{y}\}, \quad (2.202)$$

ahol $\mathbf{x}$, ill. $\mathbf{y}$ az előbb vázolt lehetőségek valamelyikét jelöli, tehát pl. egy-egy sztochasztikus folyamat.

Felhasználva a 2.7. példa kapcsán elmondottakat, $\mathbf{y}$ helyére írhatunk $\mathbf{x}_t$ -t:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}_t) = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}_t\}. \quad (2.203)$$

Ezzel belső szorzat formában megadtuk a korrelációfüggvények definícióját is. Értelemszerűen a szükséges feltételek teljesítése esetén a sokaság szerinti átlagképzés idő szerinti átlagképzésre cserélhető. Illusztrációként a 2.7. példa kapcsán felírt képletek és azok magyarázatai szolgáljanak.

2.3.6. Sztochasztikus jelek reprezentációja jelterekben

Sztochasztikus jelek jelterekben való reprezentációja teljesen hasonló módon történhet, mint determinisztikus jelek esetén. Ennek megfelelően lehetőség van az ortogonális sorfejtésre is, tehát az $\mathbf{x}$ sztochasztikus jel közelítő reprezentációját előállíthatjuk a (2.136) összefüggéssel analóg formában. Ehhez elő kell állítani egy alkalmas ortogonális rendszert, majd az ezzel képzett belső szorzatok megadják a sorfejtés együtthatóit. A konkrét megoldások tárgyalásánál lényegében két esetet kell megkülönböztetnünk. Az egyik valószínűségi vektorváltozók, ill. sztochasztikus folyamat vektorok esetén adja meg a sorfejtési eljárást, míg a másik esetben sztochasztikus folyamat valamely függvényének approximálására kerül sor ortogonális függvényrendszer felhasználásával. Az első módszer a matematikai statisztikában elterjedten használt *faktoranalízis*, ill. *főkomponens analízis*. A jelelméletbeli elnevezése: *Karhunen—Loève transzformáció (KLT)*, ill. *Karhunen—Loève sorfejtés*.

A Karhunen—Loève transzformáció

A jelterekben történő reprezentációnak egyetlen kritikus pontja van, mégpedig a megfelelő (ortogonális, ill. ortonormált) bázisrendszer létrehozása. A KL transzformáció származtatásának módja elvezet egy ilyen ortogonális rendszerhez.

Olyan ortogonális rendszert keresünk ugyanis, mely átlagos négyzetes értelemben optimális jelreprezentációt ad. Képzeljük el ezt a transzformációt úgy mint egy mátrix szorzást, tehát egy alkalmas transzformáló mátrixot kell előállítanunk :

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}, \quad (2.204)$$

ahol $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, $\mathbf{y}^T = [y_1, y_2, \dots, y_n]$, továbbá

$$\mathbf{T}^T = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n], \quad (2.205)$$

ahol

$$\varphi_i^T \varphi_j = \delta_{ij}.$$

Mivel $\mathbf{T}$ ortogonális, $\mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{I}$, tehát

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n y_i \varphi_i. \quad (2.206)$$

Vizsgáljuk meg, hogy közelíthetjük az $\mathbf{x}$ vektort, ha csak $m < n$ számú y_i mintát akarunk felhasználni :

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^m y_i \varphi_i + \sum_{i=m+1}^n b_i \varphi_i. \quad (2.207)$$

A közelítés hibája :

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n y_i \varphi_i - \sum_{i=1}^m y_i \varphi_i - \sum_{i=m+1}^n b_i \varphi_i = \sum_{i=m+1}^n (y_i - b_i) \varphi_i. \quad (2.208)$$

Az átlagos négyzetes hiba :

$$\varepsilon = E\{\|\Delta \mathbf{x}\|^2\} = E\{\Delta \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{x}\} = \sum_{i=m+1}^n E\{(y_i - b_i)^2\}. \quad (2.209)$$

Ezek után keressük meg a minimális hibát eredményező b_i tényezőket. A (2.209) összefüggés deriválásával kapjuk, hogy az optimum $b_i = E\{y_i\}$ mellett valósul meg.

Mivel $y_i = \varphi_i^T \mathbf{x}$

$$b_i = \varphi_i^T E\{\mathbf{x}\} = \varphi_i^T \bar{\mathbf{x}}. \quad (2.210)$$

Ezt visszairva a (2.209) összefüggésbe :

$$\varepsilon = \sum_{i=m+1}^n \varphi_i^T E\{(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T\} \varphi_i = \sum_{i=m+1}^n \varphi_i^T \mathbf{C}_{xx} \varphi_i, \quad (2.211)$$

ahol $\mathbf{C}_{xx}$ az $\mathbf{x}$ kovariancia mátrixa.

Ezek után keressük meg azt a φ_i bázist, mely minimálja az ε hibát a bázisra nézve is. Mivel a $\varphi_i^T \varphi_i = 1$ feltételt be kell tartanunk, feltételes szélsőértéket keresünk, mégpedig a *Lagrange* multiplikátoros módszerrel. Ezek szerint

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon - \sum_{i=m+1}^n \beta_i [\varphi_i^T \varphi_i - 1] = \sum_{i=m+1}^n \{\varphi_i^T \mathbf{C}_{xx} \varphi_i - \beta_i [\varphi_i^T \varphi_i - 1]\}, \quad (2.212)$$

ahol β_i ($i = m+1, \dots, n$) a *Lagrange*-multiplikátor.

Mivel

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_i} [\varphi_i^T C_{xx} \varphi_i] = 2C_{xx} \varphi_i, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi_i} [\varphi_i^T \varphi_i] = 2\varphi_i, \quad (2.213)$$

a

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_i} \varepsilon = 0 \quad (2.214)$$

feltételből

$$C_{xx} \varphi_i = \beta_i \varphi_i \quad (2.215)$$

adódik. Ez viszont nem jelent mást, mint hogy a φ_i vektor az x valószínűségi változó kovariancia mátrixának saját vektora, a β_i tényező pedig az ahhoz tartozó sajátérték. Ezt az eredményt visszahelyettesítve a (2.211) egyenletbe azt kapjuk, hogy az átlagos négyzetes értelemben minimális hiba:

$$\varepsilon_{\min} = \sum_{i=m+1}^n \beta_i. \quad (2.216)$$

Ezek szerint az x vektor valószínűségi változó kovariancia mátrixának sajátvektora egy olyan bázist alkotnak, melyek átlagos négyzetes értelemben minimális közelítési hibát eredményeznek. Fentiekből nyilvánvaló, hogy a tetszőleges $m < n$ altérben történő reprezentációhoz célszerű kiválasztani az m legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektorokat. (Ezek a közelítő reprezentációhoz szükséges főkomponensek.)

Megjegyzések

1.

$$C_{yy} = TC_{xx}T^{-1} = TC_{xx}T^T = \text{diag} (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \quad (2.217)$$

mivel T C_{xx} sajátvektoraiból épül fel. C_{yy} diagonál mátrix, ebből következik, hogy az y_i vektorelemek korrelálatlanok.

2. Sok gyakorlati probléma megoldására úgy használják a vázolt módszert, hogy az n elemű vektorokat valamilyen időfüggvényből vett n mintával töltik fel, és azt keresik, hogy milyen időfüggvény-komponensek járulnak hozzá elsősorban a vizsgált jel felépítéséhez.

A tapasztalatok szerint a KL transzformáció hatékony adatredukciós eszköznek bizonyul EKG jelek, továbbá kiváltott potenciálok reprezentálásánál, ill. analizisénél. Mindkét jel típus esetében tipikus feladat az osztályozás, tehát a különféle jelcsoportok szétválasztása. A vázolt módszer alkalmas arra, hogy az egyes jelcsoportokat úgy reprezentálja, hogy az osztályozási feladat leegyszerűsödjön.

Az adatok begyűjtését mindkét esetben hasonlóan végzik. EKG jelek esetén a regisztrátumokat az EKG jel QRS komplexumához szinkronizálják, míg kiváltott válaszok esetén értelemszerűen a külső trigger-jelhez. Minden egyedi regisztrátumból N mintát vesznek, majd ezt követően felépítik a jelcsoport $N \times N$ -es kovariancia mátrixát. A KL transzformáció eredményét felhasználva a vizsgált jelcsoport jellemzésére megfelelő számú főkomponenst használunk. Az osztályozást a főkomponensek alapján végezzük, ami a jelentős mértékű adatredukció következtében lényegesen egyszerűbb feladat, mint a regisztrátumok közvetlen összevetésén alapuló osztályozás.

A sztochasztikus jelekre kiépített jelterekben lehetőség nyílik ortogonális sorfejtésre is, tehát pl. egy $f(x_t)$ sztochasztikus jel (mely az x_t sztochasztikus folyamat egy függvénye) közelítő reprezentációját előállíthatjuk a (2.136) összefüggéssel analóg módon. Keressük tehát az $f(x_t)$ közelítő reprezentációját

$$f(x_t) = \sum_{i=1}^n (f(x_t), \varphi_i(x_t)) \varphi_i(x_t) \quad (2.218)$$

alakban. Ezek szerint elő kell állítani egy alkalmas ortonormált rendszert, és ezt követően az ezzel képzett belső szorzatok megadják a sorfejtés együtthatóit. Az ortonormált rendszer elemei ugyancsak az x_t sztochasztikus folyamat függvényei, tipikusan polinomjai. Az x_t folyamat viszont valamilyen eloszlással, és ennek megfelelően valamilyen sűrűségfüggvénnyel jellemezhető. Ezért az ortonormált rendszert erre a sűrűségfüggvényre mint súlyfüggvényre nézve állítjuk fel. Ez a stratégia pontosan egybeesik a belső szorzat képzési szabályával, mivel a különféle momentumok számításakor pontosan a sűrűségfüggvényre vonatkoztatva végezzük el a szükséges műveleteket. A sztochasztikus jelek reprezentálására alkalmas ortonormált rendszerek lényegében ugyanolyanok, mint a determinisztikus esetben megismert ortogonális polinomok, ill. függvények. Az eltérés egyedül az, hogy jelen esetben az a súlyfüggvény, amelyre nézve az ortogonalitást biztosítjuk, a folyamatot generáló valószínűségi változó sűrűségfüggvénye.

Ha az x_t sztochasztikus folyamat Gauss-eloszlású, azaz sűrűségfüggvénye

$$p_{x_t}(x_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} e^{-\frac{(x_t - m_t)^2}{2\sigma_t^2}} \quad (2.219)$$

akkor az ortonormált rendszer az ún. *Hermite*-polinomokkal építhető fel:

$$H_n(x_t) = e^{\frac{x_t^2}{2}} (-1)^n \frac{d^n}{dx_t^n} e^{-\frac{x_t^2}{2}}. \quad (2.220)$$

Ha az x_t sztochasztikus folyamat egyenletes eloszlású, akkor az ortonormált rendszer az ún. *Legendre*-polinomokkal építhető fel:

$$P_n(x_t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx_t^n} (x_t^2 - 1)^n. \quad (2.221)$$

Ha az x_t sztochasztikus folyamat eloszlása a $[-1, 1]$ intervallumban

$$p_{x_t}(x_t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x_t^2}} \quad (2.222)$$

egyébként nulla, akkor az ortonormált rendszer az ún. *Csebisjev*-polinomokkal építhető fel:

$$T_n(x_t) = \cos(n \arccos x_t). \quad (2.223)$$

2.4. A jelábrázolás és a jelfeldolgozás kapcsolata

A különféle mérési feladataink fontos összetevője a jelfeldolgozás, ami azonban jelentős mértékben függvénye a jelábrázolásnak. A jelfeldolgozás által a jelábrázolással szemben támasztott követelmények alapvetően a következők:

1. A jelábrázolás hatékony legyen, lehetőleg adjon meg minden olyan információt, amely az adott probléma megoldásához szükséges. Mindezt lehetőleg egyszerűen tegye.

2. A jelábrázolás módja olyan legyen, hogy támogassa a gyors [esetleg azonos idejű (real-time)] kiértékelhetőséget, biztosítson gyors konvergenciát.

3. A jelábrázolás módja tegye lehetővé a jelfeldolgozó eljárás gazdaságos realizálhatóságát.

Ezeknek a követelményeknek szem előtt tartásával törekedni kell olyan jelábrázolási módok alkalmazására, melyek:

1. Hatékony adattömörítést valósítanak meg.

2. Megfelelő struktúrájúak, tehát biztosítják a kellőképpen gyors, esetleg azonos idejű (real-time) feldolgozást.

3. A különféle hibaforrásokra kevésbé érzékenyek, ill. a különféle parazita hatások figyelembevételét valamilyen módon lehetővé teszik.

Az adattömörítés hatékonyságát annak alapján ítéljük meg, hogy adott hibakritérium mellett milyen mennyiségű adat szükséges a reprezentációhoz. A 2.3. szakaszban áttekintettük a négyzetes értelemben optimális illesztési eljárásokat. A KL transzformáció kapcsán láttuk, hogy kulcsfontosságú szerepet játszik az az ortogonális bázisrendszer, amelyre a reprezentációt megadjuk. Az adott pontosság mellett figyelembe veendő adatok mennyisége alapvetően befolyásolja a jelfeldolgozó eljárás komplexitását és ezen keresztül a fentiekben felsorolt követelmények teljesíthetőségét.

Az adattömörítés hatékonysága mellett fontos az is, hogy a reprezentáció illeszkedjék a jelfeldolgozási feladathoz, tehát a keresett információ a reprezentációból minél egyszerűbben meghatározható legyen. Ez teljesen természetesnek tűnik pl. a harmonikus analízis problémakörénél, de nem teljesen triviális a megoldása a különféle összetett osztályozási, felismerési feladatok esetén. Ugyancsak fontos lehet a reprezentáció fajtája a különféle adaptív, kiegyenlítő rendszereknél, ahol az eljárás konvergenciájának sebessége szorosan összefügg a választott jelábrázolási móddal. Az ortogonális rendszerek itt is kitüntetett szerephez jutnak.

A különféle hibaforrásokra, zavarokra viszonylag kevésbé érzékeny jelreprezentációk kérdése alapvető a különféle, jel-, ill. adatátviteli rendszereknél. Nyilvánvaló okai vannak, hogy a frekvenciamodulációra alapozott reprezentáció több szempontból előnyösebb, mint például az amplitúdómoduláció, vagy pl. annak, hogy a korszerű adatátviteli rendszerekben előszeretettel alkalmazzák a pulzus-kód modulációt. Ezek a jel-, ill. adatátviteli rendszerek beintegrálódnak a mérőrendszerekbe, ezért a mérési eljárások tervezésénél az ezekkel kapcsolatos problémák, reprezentálási kérdések megoldása is döntő jelentőségű.

Az eddigiek alapján is látható, hogy a jelreprezentáció, a jelfeldolgozás elméleti és gyakorlati kérdései bonyolult kölcsönhatásban állnak egymással. Ebben a szakaszban nem célunk ezeknek a problémaköröknek a részletes tárgyalása, csak az összefüggésekre kívántuk felhívni a figyelmet. Számos idevonatkozó részletkérdést elemeznek a könyv első részének további fejezetei, a gyakorlati vonatkozásokat pedig a 24. fejezet tárgyalja.

2.5. Rendszerek alapvető leírási módjai

Ebben a szakaszban röviden áttekintjük a rendszerek reprezentálására létrehozott alapvető modelleket és leírási módokat. Lényegében a klasszikusnak tekinthető rendszerelméleti eljárások vázolására kerül sor, mégpedig úgy, hogy a méréselméleti vonatkozásokat kiemeljük. Egy rövid bevezető után (melyben a differenciál- és differencia-egyenletek modellezésben betöltött szerepéről szólnunk), először azokat a módszereket tárgyaljuk, melyek a rendszert a bemenő- és a kimenőjelek közötti közvetlen kapcsolat megadásával írják le, majd pedig a belső állapotok felhasználásával történő leírás eljárásaira térünk ki. Ezt követően a kétfajta megközelítés összehasonlítására kerül sor, majd végül néhány fontos rendszermodell tulajdonságot vázolunk.

Dinamikus rendszerek leírása differenciál-, ill. differenciaegyenlettel

A 2.1.1. pontban röviden vázoltuk, hogy a dinamikus rendszereknél a kölcsönhatások részben az energiatárolási jelenségek által meghatározottak, időbeni lefolyásukat a tárolt és a továbbítandó energiamennyiségek időbeni alakulása határozza meg. Ebből adódik, hogy a dinamikus rendszerekben fellépő jelek pillanatértékei csak abban az esetben adhatók meg, ha ismerjük a kölcsönhatások teljes folyamatát, a rendszer teljes előéletét. (Kedvező sajátosság, hogy ha egyszer sikerült meghatározni egy adott időpillanathoz tartozó pillanatértékeket, akkor ezek felhasználhatók a későbbi időpontbeli értékek kiszámításához, és nem kell újból a teljes előéletet figyelembe venni.) Az előéletet általában valamilyen időfüggvénnyel írhatjuk le. Egy pillanatérték megadása nem jelent mást, mint hogy az előéletet leíró függvényhez egy számértéket rendelünk. Ennek a hozzárendelésnek legtipikusabb formája valamilyen integrálkifejezés (funkcionál):

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(x, \dots, \tau) d\tau, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.224)$$

ahol $x(t)$ a vizsgált jellemző t -beli értéke, $\varphi(x, \dots, \tau)$ pedig a dinamikus rendszer viselkedésének leírására alkalmas időfüggvény. Ha a dinamikus modell valamennyi (állapot) változójára megadjuk a (2.224) alakú összefüggést, akkor teljes mértékben jellemezni tudjuk a rendszert. Ilyenkor a (2.224) összefüggést vektoros formában írhatjuk:

$$\mathbf{x}(t) = \int_{-\infty}^t \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \dots, \tau) d\tau. \quad (2.225)$$

A gyakorlat szempontjából fontos rendszer-modellek jelentős részében $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \dots, \tau)$ folytonos, amikor is:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \dots, t) \quad (2.226)$$

írható (2.225) helyett. A (2.225) és (2.226) kifejezések központi jelentőségűek a rendszerelméletben.

Egyszerű példaként gondoljunk egy elektróda villamos töltésének időbeni alakulására:

$$q(t) = \int_{-\infty}^t i dt = q(t_0) + \int_{t_0}^t i dt. \quad (2.227)$$

Ebből deriválással:

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (2.228)$$

Időbeni diszkrét modellek esetén (2.225) megfelelője

$$x(nT) = \sum_{k=-\infty}^n \psi(x, \dots, kT) \quad (2.229)$$

alakban írható, míg a differenciálegyenlet helyébe differenciaegyenlet lép:

$$x(nT) - x[(n-1)T] = \psi(x, \dots, nT). \quad (2.230)$$

A (2.229) és (2.230) alakú kifejezésekhez eljuthatunk, ha valamilyen időben folytonos rendszert digitálisan kell szimulálnunk, vagy ha egy digitális formában megvalósított dinamikus rendszer viszonyait elemezzük. Ez utóbbira nagyon egyszerű példa lehet (a kondenzátor töltéséhez hasonlóan) egy digitális számláló, melynek aktuális tartalma a bemenetére vezetett impulzusok összességétől függ. A differenciaegyenlet arra vonatkozóan ad felvilágosítást, hogy az $(n-1)T$ és nT időpontok között hogyan változik a számláló pillanatnyi tartalma.

Az időben diszkrét modell gyakorlati jelentősége lényegesen nagyobb, mint az időben folytonos modellé. Ezt jelentős részben a digitális technika széles körű elterjedése indokolja, de hozzájárul az is, hogy az időben diszkrét modellek kiértékelése jóval kevesebb matematikai nehézséget okoz, mint folytonos megfelelője. Ráadásul a mérési adatok, a regisztrált jelek feldolgozása egyre kevésbé képzelhető el digitális számítástechnikai eszköz nélkül, melyhez értelemszerűen jobban illeszkedik az időben diszkrét modell.

2.5.1. Leírás a bemenő- és a kimenőjelek közötti közvetlen kapcsolat megadásával

Mérési feladatok megoldása során, de egyéb helyzetekben is, nagyon gyakran olyan rendszerekkel, ill. rendszer-modellekkel van dolgunk, melyeknél a feladat jellegéből adódóan az a lényeges, hogy meghatározott „átviteli” tulajdonságokkal rendelkeznek. Másodlagos kérdés az, hogy a rendszer ezeket az átviteli sajátosságokat hogyan hozza létre, azaz a feladat szempontjából nem súlyponti kérdés a rendszer belső szerkezetének, a belsejében fennálló kölcsönhatásoknak az ismerete. Ilyen esetekben olyan modelleket hozunk létre, ill. olyan modellekkel dolgozunk, melyek elsősorban ezeket az átviteli jellemzőket adják meg, a rendszer belsejére vonatkozóan csak részben és csak bizonyos vonatkozásokban adnak felvilágosítást. Ilyen modellek alkalmazása esetén az $y(t)$ kimenőjel

$$y(t) = F[u(\tau); t_0 \leq \tau \leq t] + y(t_0) \quad (2.231)$$

alakú funkcionállal adható meg. A t_0 időpillanatban a rendszerről minden szükségeset tudunk, az F funkcionál a $t-t_0$ időszak eseményeit foglalja össze. Egy dinamikus rendszer esetén a kimenőjel és a bemenőjel kapcsolatát megadó funkcionál reprezentálható

$$f(y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}; u, u^{(1)}, \dots, u^{(m)}; t) = 0 \quad (2.232)$$

differenciálegyenlettel.

Időben diszkrét esetben (2.232) megfelelője:

$$g[y(kT), y((k-1)T), \dots, y((k-n)T); u(kT), u((k-1)T), \dots, u((k-m)T); kT] = 0 \quad (2.233)$$

Az f és g függvények tulajdonságai alapján a rendszer-modelleket különféle osztályokba soroljuk. Az alábbiakban ezeknek az osztályoknak főbb jellemzőit tekintjük át.

Koncentrált paraméterű, lineáris és idő-invariáns rendszermodellek

A modellezés során a feladat szempontjait kielégítő, lehető legegyszerűbb modell felállítása a célunk. Ilyen, viszonylag egyszerű modellhez jutunk, ha a rendszert alkotó objektumok, ill. kölcsönhatásaik *koncentrált paraméterűeknek, lineárisaknak és idő-invariánsaknak* tekinthetők. Az ilyen tulajdonságú modelleket azért is nevezhetjük egyszerűeknek, mert leírásukra számos hatékony módszer áll rendelkezésünkre. Nagyon sok tervezési feladatnál is ezekre a modellekre támaszkodunk. Ilyen típusú modellt alkalmazva a (2.232) összefüggés megfelelője egy bemenet és egy kimenet esetén:

$$b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + b_0 y = a_m u^{(m)} + a_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + a_0 u \quad (2.234)$$

alakra hozható, ahol az $\{a_j; j=0, 1, \dots, m\}$ és a $\{b_k; k=0, 1, \dots, n\}$ együtthatók valós konstansok. A (2.232) szerinti f függvény ilyenkor tehát az u , ill. az y , valamint deriváltjaik egy lineáris kombinációjára szab feltételt. Az ilyen alakú differenciálegyenletek megoldására szolgáló módszerek a differenciálegyenletek elméletéből jól ismertek. A teljes megoldás a homogén egyenlet megoldása és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása összegeként adódik. A homogén egyenlet megoldása a „magára hagyott” rendszer viselkedésének időbeli leírását adja. [A homogén egyenletet a (2.234) összefüggés jobb oldala azonosan nulla feltételből kapjuk.] Műszaki szempontból ennek az a jelentősége, hogy ez a megoldás-tag megadja az $y(t)$ megoldásfüggvény ún. tranziens összetevőjét. A megoldás összetevőinek ez a szuperponálódása a (2.234) egyenlet, ill. a rendszermodell lineáris voltának következménye. A tranziensek ismerete és figyelembevétele alapvető a mérőeszközök és a mérési eljárások tervezésénél: általában meghatározóak az elérhető mérési pontosság és mérési sebességtételek szempontjából.

Az állandó együtthatós, lineáris differenciálegyenletek megoldásának közismert eszköze a *Laplace-transzformáció*. Ez az eljárás egyrészt egyszerűsített írásmódot biztosít, másrészt az átviteli függvény fogalmának felhasználásával az átviteli sajátosságok hatékony leírását teszi lehetővé. Nulla kezdeti érték feltételezésével (2.234) *Laplace-transzformálása* után közvetlenül kifejezhető $u(t)$, ill. $y(t)$ *Laplace-transzformáltjainak* viszonya a komplex s változó racionális törtfüggvényeként:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (2.235)$$

$H(s)$ ismeretében tetszőleges $U(s)$ bemenőjelhez megadhatjuk az $Y(s)$ kimenőjelet.

A rendszer időtartománybeli jellemzésére speciális vizsgálójelekre adott válaszfüggvényeket is használunk. Ezek kiszámítását végezhetjük a $H(s)$ átviteli függvény segítségével.

Ha a rendszer bemenetére $u(t) = \delta(t)$ egységimpulzusjel kerül, akkor a kimeneten a rendszer $h(t)$ súlyfüggvényét kapjuk meg. Mivel $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$, $Y(s) = H(s)$ adódik, amiből $y(t) = \mathcal{L}^{-1}H(s) = h(t)$.

Ha a rendszer bemenetére $u(t) = \varepsilon(t)$ egységugrás jelet kapcsolunk, akkor mivel $\mathcal{L}\varepsilon(t) = \frac{1}{s}$, $Y(s) = \frac{1}{s} H(s)$, ill. $y(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s} H(s) = v(t)$ adódik. A $v(t)$ válaszjelet a rendszer átmeneti függvényének nevezik. A $h(t)$ és $v(t)$ függvények mint rendszerjellemező függvények segítségével közvetlenül az időtartományban is számíthatjuk a rendszer $u(t)$ bemenőjelre adott válaszát az ún. *konvolúciós (vagy Duhamel) integrállal*:

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^t u(t-\tau) h(\tau) d\tau \quad (2.236)$$

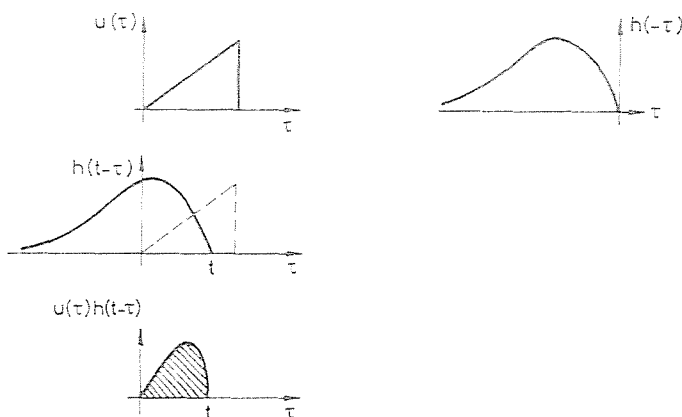
$$y(t) = u(0)v(t) + \int_0^t \dot{u}(\tau)v(t-\tau) d\tau = u(t)v(0) + \int_0^t u(\tau)\dot{v}(t-\tau) d\tau. \quad (2.237)$$

Ez a két egyenlet a (2.231) összefüggéssel kijelölt közvetlen kapcsolat egyik leg-tömörebb realizációja, így ezeket a felírási módokat tekinthetjük a bemenő és a kimenőjelek közvetlen kapcsolatát megadó legjellegzetesebb formáknak. Ezeknél az összefüggéseknél feltételeztük, hogy $u(t) = 0$ $t < 0$ esetén, valamint a rendszer kauzális, tehát a kimenőjel időben nem előzheti meg a bemenőjelet. Ezek szerint $h(t) = 0$, és $v(t) = 0$, ha $t < 0$.

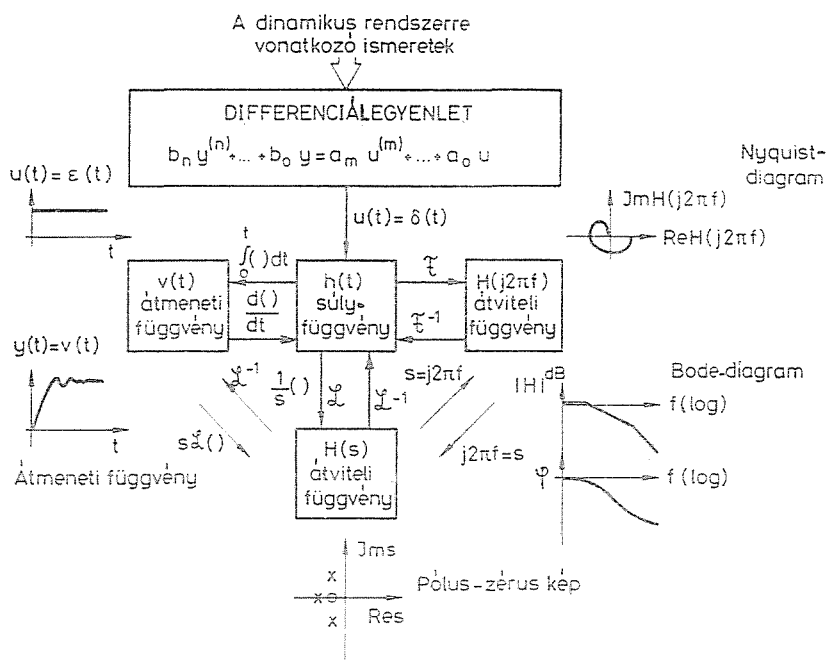
A konvolúciós integrált a 2.20. ábra illusztrálja. Hasonló illusztráció készíthető a (2.237) összefüggéshez is.

Az átviteli sajátosságok jellemzésére további módszerek is használatosak. A $H(s)$ átviteli függvény számlálójának és nevezőjének alakjából leolvasható zérusok és pólusok egy konstans erejéig meghatározzák az átvitelt. A komplex számsíkon ábrázolva őket ugyancsak használható reprezentációhoz jutunk.

Az átviteli függvénnyel reprezentált rendszer frekvenciatartománybeli viselkedéséről $s = j2\pi f$ helyettesítéssel kapunk felvilágosítást. Az így nyert frekvenciatartománybeli átviteli függvény a tranziensek lejátszódása utáni stacionárius állapot átviteli sajátosságait adja meg. Mivel a stacionárius állapotbeli viselkedés ismerete sok esetben elegendő, a *frekvenciatartománybeli* $H(j2\pi f)$ átviteli függvényt széles körben használjuk analízis és szintézis feladatok megoldása során. Gyakran célszerűnek mutatkozik ábrázolása is. Az egyik lehetőség a komplex számsíkon történő ábrázolás, az ún.



2.20. ábra. Segédábra a konvolúciós integrál bemutatásához



2.21. ábra. A koncentrált paraméterű, lineáris és invariáns rendszerek leírási módszereinek kapcsolata

Nyquist-diagram elkészítése. Ennél a felrajzolt görbe egy kiragadott pontja közvetlenül megadja az átvitel jellemzőit egy frekvencián. A másik elterjedt módszer a logaritmusos amplitúdó és fáziskarakterisztika, az ún. *Bode-diagram* megadása. Ekkor a komplex átviteli függvény abszolút értékének logaritmusát, ill. az átviteli függvény fázisát logaritmusos frekvencia-tengely mentén rajzoljuk fel. A vázolt módszerek kapcsolatát a 2.21. ábra mutatja be.

Ha a vizsgált rendszer diszkrét idejű, akkor fentiekhez hasonló leírásait *differenciaegyenletről* kiindulva adhatjuk meg. A differenciaegyenlet a (2.233) alakból származtatható. Egy bemenet és egy kimenet esetén:

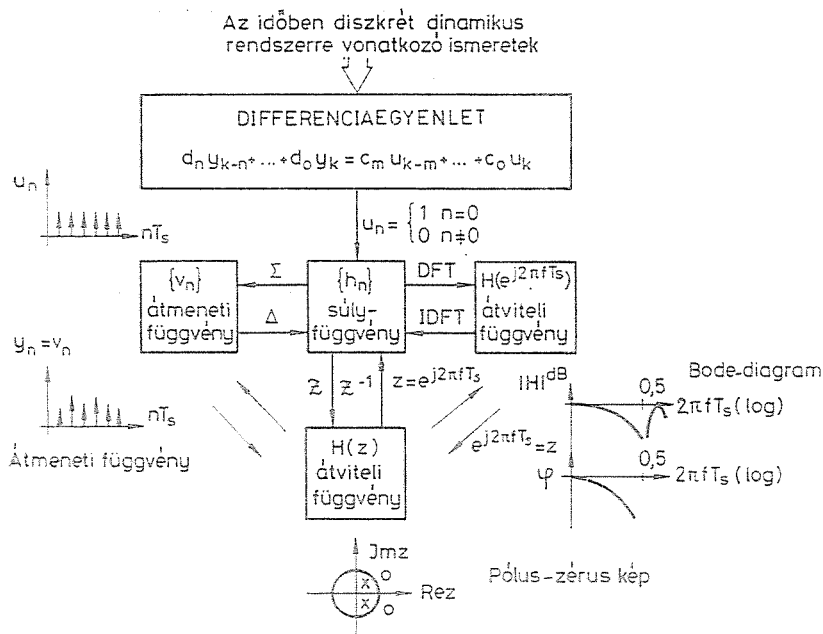
$$\begin{aligned} d_n y_{k-n} + d_{n-1} y_{k-n-1} + \dots + d_1 y_{k-1} + d_0 y_k &= \\ = c_m u_{k-m} + c_{m-1} u_{k-m-1} + \dots + c_1 u_{k-1} + c_0 u_k. \end{aligned} \quad (2.238)$$

Az ilyen alakú differenciaegyenletek megoldásának hatékony eszköze a *Laplace-transzformáció* diszkrét idejű megfelelője, a *z* transzformáció. Ezt felhasználva felírhatjuk az átviteli függvényt:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{m-1} z^{-m+1} + c_m z^{-m}}{d_0 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{n-1} z^{-n+1} + d_n z^{-n}}. \quad (2.239)$$

Az időben folytonos esethez hasonlóan definiáljuk a súlyfüggvényt és az átmeneti függvényt. A konvolúciós integrál megfelelője a *konvolúciós szumma*:

$$y_k = \sum_{i=0}^k u_i h_{k-i} = \sum_{i=0}^k h_i u_{k-i}. \quad (2.240)$$



2.22. ábra. A koncentrált paraméterű, lineáris és invariáns, időben diszkrét rendszerek leírási módszereinek kapcsolata

Az indexhatárok megoldásánál az eddigiekkel összhangban $k=0$ -ban belépő függvényeket és kauzális rendszermodellt tételeztünk fel.

A $H(z)$ átviteli függvény ugyancsak komplex változós komplex függvény. Ábrázolására a folytonos esettel teljes analógiában a pólus-zérus kép felhasználható a komplex z változó síkján. A frekvenciatartománybeli átviteli sajátosságokat a $H(z)$ átviteli függvényből $z = e^{j2\pi f T_s}$ helyettesítéssel származtatott $H(e^{j2\pi f T_s})$ átviteli függvény adja meg. Ennek ábrázolására a folytonos esetről ismertetett eljárások használatosak. Az egyes módszerek közötti kapcsolatot a 2.22. ábra mutatja be.

2.8. példa

Példaként az átlagolási eljárások között gyakran szereplő ún. exponenciális átlagoló leírását mutatjuk be.

A kimenőjel és a bemenőjel kapcsolatát megadó differenciaegyenlet:

$$y_k = \frac{1}{N} u_k + \left(1 - \frac{1}{N}\right) y_{k-1}; \quad N = \text{állandó}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.241)$$

Ebből z transzformációval származtatható az átviteli függvény:

$$H(z) = \frac{\frac{1}{N}}{1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right) z^{-1}} \quad (2.242)$$

A rendszer súlyfüggvénye:

$$\{h_k\} = \left\{ \frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^k \right\} \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.243)$$

Végül a frekvenciatartománybeli átviteli függvény:

$$H(e^{j2\pi f T_s}) = \frac{\frac{1}{N}}{1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cos 2\pi f T_s + j \left(1 - \frac{1}{N}\right) \sin 2\pi f T_s}. \quad (2.244)$$

Koncentrált paraméterű, lineáris és idő-variáns rendszermodellek

A rendszer kimenő- és bemenőjelének kapcsolata ennél a modellosztálynál is lineáris differenciál-, ill. differenciaegyenlettel jellemezhető, eltérést a (2.234), ill. (2.238) összefüggésekhez képest csak annyiban tapasztalunk, hogy az együttthatók időfüggvények. A lineáris differenciál-, ill. differenciaegyenletek elméletéből ismert, hogy elvileg azonos módon oldható meg az állandó együttthatós és a változó együttthatós differenciál-, ill. differenciaegyenlet, az egyetlen különbség, hogy az utóbbiaknál a homogén egyenlet megoldásainak megkeresésére általános módszer nincsen. Ezért néhány speciálisnak tekinthető esettől eltekintve csak numerikus módszerekkel jutunk célhoz. A bemenő- és kimenőjelek kapcsolatát talán legtömöbben megadó konvolúciós integrál annyiban módosul a (2.236) összefüggéshez képest, hogy a súlyfüggvény argumentumában megjelenik az „abszolút idő”:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t, \tau) d\tau. \quad (2.245)$$

Az eddigiekhez képest eltérő sajátosság, hogy a frekvenciatartománybeli vizsgálat elég problematikus, és sokszor nincs is értelme. A transzformációs összefüggéseket természetesen formálisan megadhatjuk az eddigiek alapján, de az eredményeket csak bizonyos esetekben tudjuk megfelelően értelmezni. Ha a paraméterek változásai időben sokkal lassabbak, mint a rendszeren belüli kölcsönhatások, akkor meghatározott időintervallumokban állandó együttthatós közelítéssel élve elemezhetjük a frekvenciatartománybeli viselkedés időbeni alakulását is.

A mérési eljárásokkal kapcsolatban ez a modellosztály is alapvető, mert a valóságos rendszerek paramétereiken keresztül időfüggését a mérés megtervezésénél és kiértékelésénél minden esetben figyelembe kell vennünk. Ilyen rendszermodellel jellemezhetjük a mérési eljárásba beépített kiegyenlítési algoritmusokat megvalósító rendszereket is. Nyilvánvaló az is, hogy a kiegyenlítési folyamat időbeni lefolyásának kézbentartása fontos követelmény elsősorban a mérési sebesség szempontjából.

2.9. példa

Az időben diszkrét eset bemutatására a rekurzív átlagolás ismert algoritmusát hozzuk fel példaként:

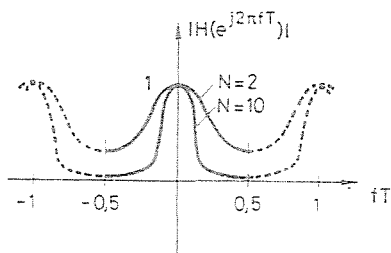
$$y_k = y_{k-1} + \frac{1}{k} (u_k - y_{k-1}) \quad k = 0, 1, 2, \dots; y_0 = 0, \quad (2.246)$$

ill.

$$y_k = \frac{1}{k} u_k + \left(1 - \frac{1}{k}\right) y_{k-1}.$$

Látható, hogy a differenciaegyenlet változó együttthatós, és az is, hogy a 2.8. példában szereplő exponenciális szűrő ennek egy speciális változata, ahol a változó (idő-

függő) együtthatókat konstansokra cseréltük. Ha gondolatban az exponenciális átlagoló N paraméterét folyamatosan növelni kezdjük, akkor nyomon követhetjük, hogy hogyan alakul pl. a (2.244) átviteli függvény, és ezen belül az amplitúdó- és a fáziskarakterisztika az idő függvényében, azaz el tudjuk képzelni, hogy a variáns rekurzív átlagoló algoritmusunk variáns frekvenciatartománybeli viselkedése milyen lesz. Ezek szerint a rekurzív átlagoló a frekvenciatartományban egy olyan aluláteresztő szűrőnek felel meg, mely lépésről lépésre csökkenti az áteresztő sáv szélességét, és növekvő lépésszámmal egyre inkább csak a zérus frekvenciához közelebb álló komponenseket engedi át, (2.23. ábra). Meg kell jegyezni, hogy hasonló szemléletes kép nem adható meg minden variáns rendszer esetében.



2.23. ábra. A rekurzív átlagoló mint variáns szűrő amplitúdókarakterisztikája

Koncentrált paraméterű, nemlineáris rendszermodellek

A nemlineáris rendszerek bemenő- és kimenőjeleinek kapcsolatát a (2.232), ill. a (2.233) szerinti differenciál-, ill. differenciaegyenlet megoldásával kaphatjuk meg. Ezeknek az egyenleteknek a megoldására analitikus módszer csak néhány speciális esetben létezik, általában valamilyen numerikus módszer alkalmazása szükséges. Hasonlóképpen elég sok problémát vet fel a frekvenciatartománybeli jellemzés. Alapvetően a szuperpozíció érvénytelensége miatt a lineáris esetben jól bevált Laplace- és Fourier-transzformáció alkalmazására általában nincs lehetőség. A fentiekben felsorolt nehézségek részbeni áthidalása érdekében a nemlineáris modellek osztályát a nemlinearitás jellege szerint alosztályokra bontjuk, és ezen belül a legjobban illeszkedő matematikai apparátust igyekszünk használni. Ebben a fejezetben nem célunk az egyes módszerek részletes ismertetése, csak néhány jellegzetességre igyekeztünk rámutatni. Ezek után bemutatunk két olyan módszert, melyek a lineáris esetben érvényes leírási módszerek általánosításainak tekinthetők.

A lineáris rendszermodellek előnyös tulajdonságai közé tartozik, hogy a kimenő- és a bemenőjel explicit kapcsolatát adják meg. Ennek egyik jellegzetes formája a konvolúciós integrál, ill. a konvolúciós szumma. A nemlineáris rendszerek egy széles osztályára alkalmazható egy olyan megközelítés, mely a súlyfüggvény (konvolúciós integrál) módszer általánosítása. Az eljárás alkalmazásának eredménye az ún. *Volterra-soros leírás*. A lineáris rendszermodell ennek egy speciális alesete. Induljunk ki a rendszer (2.231) alakú leíró függvényéből. Ezek szerint egyváltozós esetben:

$$y(t) = F[u(\tau); t_0 \equiv \tau \leq t] + y(t_0), \quad (2.247)$$

ahol F egy funkcionál. Ezt a funkcionált funkcionálok sorozatával közelítjük. A sorozat elemei a következők:

$$F_0 = h_0(t),$$

$$\begin{aligned}
 F_1 &= h_0(t) + \int_{t_0}^t h_1(t, \tau_1) u(\tau_1) d\tau_1, \\
 F_2 &= h_0(t) + \int_{t_0}^t h_1(t, \tau_1) u(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_2(t, \tau_1, \tau_2) u(\tau_1) u(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \\
 &\vdots \\
 F_N &= h_0(t) + \sum_{k=1}^N \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t h_k(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) u(\tau_1) \dots u(\tau_k) d\tau_k \dots d\tau_2 d\tau_1.
 \end{aligned} \quad (2.248)$$

Ezek felhasználásával:

$$F[u(\tau), t_0 \leq \tau \leq t] = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k \quad (2.249)$$

és ebből a *Volterra*-sor:

$$y(t) = h_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t h_k(t, \tau_1, \dots, \tau_k) u(\tau_1) \dots u(\tau_k) d\tau_k \dots d\tau_1 + y(t_0). \quad (2.250)$$

Lineáris rendszermodell esetén

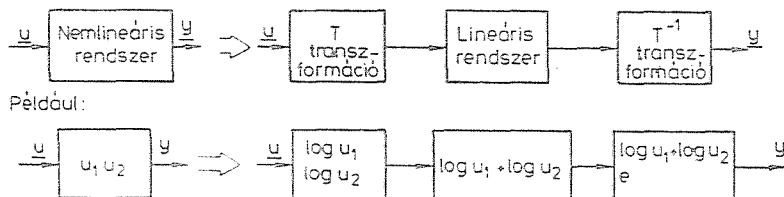
$$y(t) = h_0(t) + \int_{t_0}^t h_1(t, \tau_1) u(\tau_1) d\tau_1 + y(t_0). \quad (2.251)$$

A *Volterra*-sor funkcionál-hatványsor. Ha a rendszernek nincsen dinamikus eleme, azaz a rendszer egy statikus nemlinearitást valósít meg, akkor a vázolt módszer közönséges hatványsorra vezet, mert ilyenkor $h_0(t) = c_0$, $h_1(\tau) = c_1 \delta(t)$, $h_2(\tau_1, \tau_2) = c_2 \delta(\tau_1) \delta(\tau_2)$, ... és ezzel ($c_0, c_1, c_2, \dots$ alkalmas konstansok):

$$y(t) = c_0 + c_1 u(t) + c_2 u^2(t) + \dots \quad (2.252)$$

Az időben diszkrét eset analóg módon származtatható, az általánosított konvolúciós integrál helyére az általánosított konvolúciós szumma kerül.

A lineáris rendszerek tulajdonságaira épülő másik módszer olyan transzformációkat alkalmaz, melyek eredményeképpen a rendszer változói (jelei) közötti szuperponálhatóság ismét fennáll. Az alkalmazott transzformáció inverzét használva ezek után megkapjuk a nemlineáris rendszerünk kimenőjelét. Az eljárás blokkvázlata a 2.24.



2.24. ábra. A homomorf rendszerek egy lehetséges (tipikus) reprezentációja

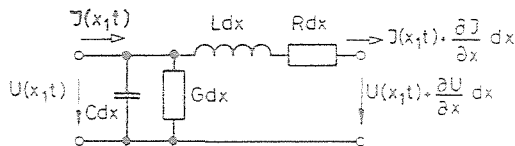
ábrán látható. Az ilyen reprezentációval jellemezhető rendszereket *homomorf rendszereknek* nevezik. Egyszerű példaként említhető szorzat-kapcsolatok esetén a logaritmus képzés, mint a bemeneten elhelyezett transzformáció, és az ennek megfelelő exponenciális karakterisztika használata a kimeneten. A módszer tipikus méréstechnikai alkalmazása lehet a multiplikatív zajok kiszűrésére alkalmas eljárás vagy berendezés létrehozása.

Elosztott paraméterű rendszermodellek

Több olyan, a gyakorlat szempontjából fontos probléma van, melynél a koncentrált paraméterű modellek nem kielégítőek, nem tudunk olyan térrészeket kijelölni, ahol a kölcsönhatások a belső helykoordinátáktól függetlenül jellemezhetők. Ilyenkor ún. elosztott paraméterű modelleket alkalmazunk, melyek ezt a belső helyfüggést is figyelembe veszik. Leírásukra, és így a kimenő- és a bemenőjel kapcsolatának megadására parciális differenciál-, ill. parciális differenciaegyenlet szolgál. Speciális esetektől eltekintve a parciális differencialegyenletek megoldását numerikus módszerrel kell végeznünk. Attól függően, hogy egy, kettő, vagy három helykoordinátától függenek a kölcsönhatások, egy-, kettő-, ill. háromdimenziós problémával van dolgunk. A leggyorsabb eset az egydimenziós probléma, mely tipikusan valamilyen vezeték menti viszonyokat modellez. A kétdimenziós problémák síkban helyfüggő paraméterekhez kötődnek. Általános esetben a háromdimenziós probléma tekinthető.

2.10. példa

Az elosztott paraméterű hálózatok leírására szolgáló módszerek illusztrálására röviden áttekintjük az impulzusteknikai távvezetékkel kapcsolatos jellegzetes összefüggéseket. Az összefüggések alapjául szolgáló modell a 2.25. ábrán látható.



2.25. ábra. A dx hosszúságú távvezeték elem modellje

Az ábra alapján a következő parciális differencialegyenlet-rendszer írható fel:

$$-\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = RI(x, t) + L \frac{\partial I(x, t)}{\partial t}; \quad -\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = GU(x, t) + C \frac{\partial U(x, t)}{\partial t}. \quad (2.253)$$

Ez az egyenletrendszer lineáris, alkalmazható a *Laplace*-transzformáció $I(x, 0) = 0$, és $U(x, 0) = 0$ feltételezéssel a következő alakhoz juthatunk:

$$\frac{d^2 U(x, s)}{dx^2} = (R + sL)(G + sC)U(x, s) = \gamma^2 U(x, s). \quad (2.254)$$

Ennek általános megoldása:

$$U(x, s) = U^+(s)e^{-\gamma x} + U^-(s)e^{\gamma x} \quad (2.255)$$

alakú, ahol $U^+(s)$ $U^-(s)$ a Z_0 hullámimpedancia, az r reflexiók együttható és a gerjesztés segítségével kifejezhető.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R+sL}{G+sC}}; \quad r = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} \quad (2.256)$$

ahol Z_2 a lezáró impedancia.

A rendszermodellek leírása sztochasztikus kimenő-, ill. bemenőjel kapcsolatának megadásával

Az eddigiekben vázolt modellek természetesen érvényesek sztochasztikus bemenőjelekre is. A sztochasztikus jelekkel kapcsolatos kérdésfelvetéseink általában olyanok, hogy nem a kimenőjelek pillanatértékeire, hanem azok statisztikai jellemzőire vagyunk kíváncsiak. Elsősorban a várható érték, variancia, korreláció, teljesítménysűrűség-spektrum jellemzőket keressük. Ennek megfelelően a rendszer átviteli tulajdonságait is ezekre a jellemzőkre vonatkoztatva értelmezzük, ill. használjuk.

Koncentrált paraméterű, lineáris és invariáns rendszermodellre szorítkozva pl. az $y(t)$ kimenőjel átlagát a (2.236) összefüggés alapján a következőképpen kapjuk:

$$E\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) E\{u(t-\theta)\} d\theta; \quad h(t) \equiv 0 \text{ ha } t < 0. \quad (2.257)$$

Ha $u(t)$ stacionárius sztochasztikus folyamat:

$$\mu_y = \mu_u \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) d\theta. \quad (2.258)$$

Ezek szerint stacionárius esetben a kimenőjel és a bemenőjel várható értékének viszonyát a „súlyfüggvény alatti terület” adja meg. Tudjuk azonban, hogy az átmeneti függvény a súlyfüggvény integrálása révén is származtatható, ezek szerint a várható értékre vonatkozó átviteli tényező nem más, mint az átmeneti függvény végértéke ($t \rightarrow \infty$), vagyis a rendszer $H(s)$ átviteli függvényének $s=0$ helyen felvett értéke. (A végértékekkel kapcsolatosan lásd a 2.3. táblázatot.)

A bemenő- és a kimenőjel korrelációfüggvénye:

$$E\{u(t-\tau)y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) E\{u(t-\tau)u(t-\theta)\} d\theta. \quad (2.259)$$

Stacionárius bemenőjel esetén:

$$R_{uy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) R_{uu}(\tau-\theta) d\theta = h(\tau) * R_{uu}(\tau) \quad (2.260)$$

A bemenőjel $R_{uu}(\tau)$ autokorreláció függvénye, és az $R_{uy}(\tau)$ kimenet és bemenet közötti keresztkorreláció tehát úgy kapcsolódnak egymáshoz, mint determinisztikus jelek esetén maguk a bemenő- és a kimenőjelek. További korrelációfüggvények stacionárius esetben:

$$R_{yu}(\tau) = h(-\tau) * R_{uu}(\tau) \quad (2.261)$$

$$R_{yy}(\tau) = h(\tau) * R_{yu}(\tau) = h(-\tau) * R_{uy}(\tau) = h(-\tau) * h(\tau) * R_{uu}(\tau). \quad (2.262)$$

Ezen iménti, stacionárius esetben értelmezett korrelációfüggvény összefüggések a kétoldalas Laplace-transzformáció felhasználásával a komplex frekvenciatartományban is megadhatók:

$$S_{uy}(s) = H(s)S_{uu}(s), \quad (2.263)$$

$$S_{yu}(s) = H(-s)S_{uu}(s), \quad (2.264)$$

$$S_{yy}(s) = H(s)S_{yu}(s) = H(-s)S_{uy}(s) = H(-s)H(s)S_{uu}(s), \quad (2.265)$$

ahol

$$S_{uy}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{uy}(\tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad (2.266)$$

$$S_{uu}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad (2.267)$$

$$S_{yu}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yu}(\tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad (2.268)$$

$$S_{yy}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yy}(\tau) e^{-s\tau} d\tau. \quad (2.269)$$

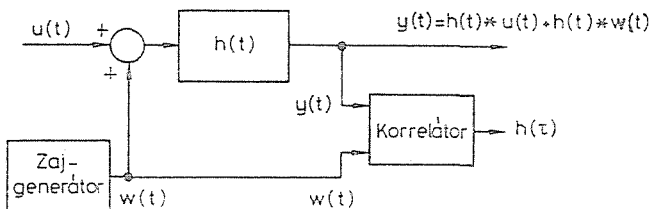
A (2.263—2.265) összefüggések alapján látható, hogy a rendszer $H(s)$ átviteli függvénye a komplex frekvenciatartománybeli teljesítménysűrűség-spektrumok felhasználásával egyszerűen kifejezhető. Az $s = j2\pi f$ helyettesítés után a fenti összefüggések a frekvenciatartománybeli kapcsolatokat írják le, [vö. a (2.85) és (2.88) összefüggések].

A korrelációfüggvények mérés technikai alkalmazása viszonylag széles körű. Fentiek alapján látható, hogy segítségükkel rendszerek átviteli tulajdonságait is meg tudjuk adni: közvetlen kapcsolatba hozhatók a rendszer súlyfüggvényével, ill. átviteli függvényével.

Megjegyzés. Az imént csak a folytonos esetet tárgyaltuk. Időben diszkrét sztochasztikus jelek esetén a (2.257—2.269) összefüggések diszkrét megfelelőit használjuk, tehát a konvolúciós integrál helyén a konvolúciós szummát, a kétoldalas Laplace-transzformált helyén pedig a kétoldalas z transzformáltat.

2.11. példa

A súlyfüggvényt mérésdeterminisztikus jelek felhasználásával sokszor problematikus, mert a $\delta(t)$ függvényt jól közelítő, impulzusszerű bemenőjel alkalmazását igényli. Ennek előállítása nehézségekbe ütközhet, sőt a rendszeren belül az impulzus jel következ-



$$R_{uw}(\tau) = 0$$

$$R_{ww}(\tau) = \sigma_w^2 \delta(\tau); \sigma_w = 1$$

$$\begin{aligned} R_{yw}(\tau) &= E \{ y(t+\tau) w(t) \} = E \{ [h(t+\tau) * u(t+\tau)] w(t) + [h(t+\tau) * w(t)] w(t) \} = \\ &= E \{ [h(t+\tau) * w(t+\tau)] w(t) \} = E \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} w(t) w(v) h(t+\tau-v) dv \right\} = h(\tau) \end{aligned}$$

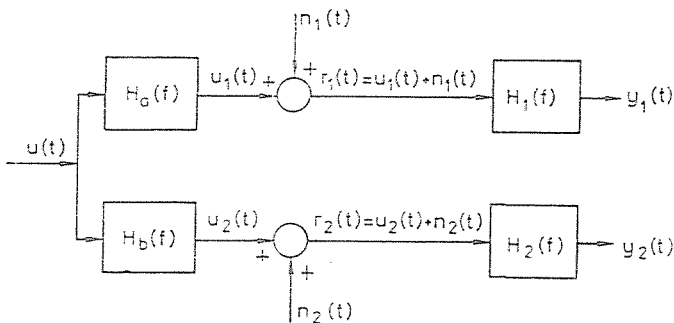
2.26. ábra. A súlyfüggvény meghatározása korrelációs módszerrel

tében ugyancsak problémáink lehetnek. Ezenkívül az is előfordulhat, hogy a mérést úgy kell elvégezni, hogy a rendszer közben üzemel, pl. valamilyen folyamatos üzemben, ill. szabályozási körben, melyet félbeszakítani költséges és fárasztó lehet. Ilyen esetekben jól használható a *korrelációs méréstechnika*. A mérési elrendezés tömbvázlata a 2.26. ábrán látható. Ezek szerint ha a $h(t)$ súlyfüggvényű rendszer bemenőjeléhez hozzáadunk egy azzal korrelálatlanul tekintendő szélessávú zajt, akkor a rendszerkimenet és a zaj keresztkorreláció függvénye a keresett súlyfüggvényt adja.

2.12. példa

A 2.2.4. pontban említettük, hogy a koherenciafüggvény (2.89) abszolút érték négyzete sokféle jel- és rendszer tulajdonság leírásával hasznosítható. Ebben a példában ezt kívánjuk bemutatni. Ehhez tekintsük a 2.27. ábrát. Tételezzük fel, hogy $u(t)$, $n_1(t)$ és $n_2(t)$ korrelálatlan, stacionárius sztochasztikus folyamatok. Igazolható, hogy

$$|\gamma_{y_1 y_2}(f)|^2 = |\gamma_{r_1 r_2}(f)|^2 = \frac{S_{uu}(f) |H_a(f) \overline{H_b(f)}|^2}{[S_{uu}(f) |H_a(f)|^2 + S_{n_1 n_1}(f)] [S_{uu}(f) |H_b(f)|^2 + S_{n_2 n_2}(f)]} \quad (2.270)$$



2.27. ábra. A koherenciafüggvény tulajdonságait bemutató modell

A 2.27. ábra, és a (2.270) összefüggés vizsgálata alapján a következő megállapítások tehetők:

1. A koherenciafüggvény abszolút értéke négyzete nulla és egy közötti szám.
2. Mivel $|\gamma_{y_1 y_2}(f)|^2$ független a $H_1(f)$ és $H_2(f)$ átviteli függvényektől, a két jel koherenciája nem változik ezen jeleken végrehajtott konvolúció (lineáris művelet) hatására.
3. Ha $n_1(t) = n_2(t) = 0$, akkor $|\gamma_{y_1 y_2}(f)|^2 = 1$, tehát ha ugyanabból az $u(t)$ jelből lineáris műveletekkel hozunk létre két különböző ($u_1(t)$ és $u_2(t)$) jelet, akkor a koherencia (abszolút érték négyzete) egységnyi.
4. Ha $S_{n_1 n_1}(f) = S_{n_2 n_2}(f) = S_{nn}(f)$ és $|H_a(f)|^2 = 1$, $|H_b(f)|^2 = 1$, akkor

$$|\gamma_{y_1 y_2}(f)|^2 = \frac{S_{uu}^2(f)}{[S_{uu}(f) + S_{nn}(f)]^2}, \quad (2.271)$$

és a jel—zaj viszony

$$\frac{S_{uu}(f)}{S_{nn}(f)} = \frac{|\gamma_{y_1 y_2}(f)|}{1 - |\gamma_{y_1 y_2}(f)|}. \quad (2.272)$$

5. Ha $n_2(t) = 0$ és $|H_a(f)|^2 = 1$, akkor

$$|\gamma_{y_1 y_2}(f)|^2 = \frac{S_{uu}^2(f)}{[S_{uu}(f) + S_{nn}(f)]S_{uu}(f)}, \quad (2.273)$$

és a jel—zaj viszony

$$\frac{S_{uu}(f)}{S_{nn}(f)} = \frac{|\gamma_{y_1 y_2}(f)|^2}{1 - |\gamma_{y_1 y_2}(f)|^2}. \quad (2.274)$$

A koherenciafüggvény használható annak eldöntésére, hogy egy rendszer valójában lineáris vagy nemlineáris, sőt a lineáristól való eltérés mértékére egy mérőszámot is ad. A 4. és 5. megállapítások a jel—zaj viszony mérés egy-egy lehetséges alternatíváját mutatják be.

2.5.2. Rendszerek leírása a belső állapotok felhasználásával

A (2.225) és (2.226) összefüggések kapcsán láttuk, hogy a dinamikus rendszer valamennyi változójának időfüggvényét ismerve egy teljes mértékű leírásra nyílik lehetőség. Ezeknek a változóknak egy adott pillanatbeli értéke a rendszert egy adott időpillanatban jellemzi, azaz a rendszer állapotát adja meg. Szokás ezért ezeket a változókat (pontosabban ezeknek a teljes leíráshoz szükséges legkisebb halmazát) állapotváltozóknak nevezni. Az állapotváltozók többnyire a rendszer belsejével kapcsolatos információkat hordoznak. Ahhoz, hogy a rendszert teljesen leírjuk, ismerni kell még a rendszer bemenőjeleinek hatását az állapotváltozókra, továbbá az állapotváltozók megfigyelésének (mérésének) módját, a kimenőjelek megadásának összefüggéseit.

Ezt a leírási módot akkor használjuk, ha a vizsgált rendszer belső működéséről is informálódni kívánunk, nem csupán az átviteli sajátosságokról, vagy ha a rendszer olyan jellegű, hogy az átviteli sajátosságok megadásához a belső működés bizonyos részleteinek ismerete is szükséges. Ez utóbbi szemponthoz kapcsolódik még az is, hogy a differenciálegyenletek numerikus megoldása viszonylag kedvező viszonyok mellett történhet, ha a differenciálegyenletek elsőrendű differenciálegyenlet-rendszert alkotnak. Az ismertetésre kerülő állapotváltozós leírás valamilyen formában pontosan ilyen elsőrendű differenciálegyenlet-rendszert eredményez.

Az állapotváltozók, a bemenőjelek és a kimenőjelek közötti függvénykapcsolatok jellegétől függően különféle modellosztályokat különböztetünk meg. Ezek közül néhánynak a legfontosabb jellemzőit röviden összefoglaljuk.

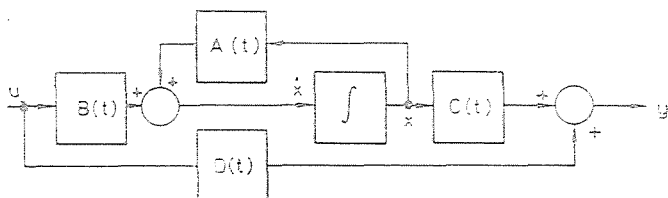
Koncentrált paraméterű, lineáris, állapotváltozós modellek

Lineáris rendszermodell esetén az x állapotváltozók, az u bemenőjel és az y kimenőjel kapcsolatát a következő egyenletrendszerrel adhatjuk meg:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (2.275)$$

$$y = C(t)x + D(t)u, \quad (2.276)$$

ahol az első az ún. *állapotegyenlet*, a második pedig a *megfigyelési (kimeneti, mérési) egyenlet*. Az x , u , y vektorok rendre n , m , p dimenziósak, ennek megfelelően $A(t)$ $n \times n$, $B(t)$ $m \times n$, $C(t)$ $n \times p$, $D(t)$ pedig $m \times p$ dimenziós mátrixok. A leíró egyenletek alapján megadható rendszer-blokkvázlat a 2.28. ábrán látható. Ezek szerint az állapotváltozós reprezentáció egy jól meghatározott struktúrát rendel a rendszer eddigiekben vizsgált bemenete és kimenete közé. Nyilvánvaló, hogy a kimenő-, ill. bemenőjelek kapcsolatára ebből a modellből kiindulva is ugyanazt az eredményt kapjuk, mint a korábbiakban, mert hiszen, legalábbis a kimenet és a bemenet kapcsolatát tekintve, ugyanarról a rendszerről van szó. Elképzelhető azonban, hogy a tényleges rendszer belsejében lezajló kölcsönhatások kimenetéről is tájékozódniuk kell, pl. azért, mert nem feltétlenül látszik a kimenőjelekből, hogy valamely belső változó értéke már kilépett a számára megengedett értéktartományból, és ebből adódóan a felhasznált lineáris összefüggések már nem érvényesek. A konkrét fizikai rendszerekben az állapotváltozók a dinamikus elemekkel, és ezen belül az energiatárolással kapcsolatban álló mennyiségek. Például kondenzátorok töltése, vagy feszültsége, tekercsek fluxusa, vagy árama, avagy termikus rendszerekben a hőmérséklet mind alkalmas állapotváltozók. Mindezek nagyon közel állnak a tényleges fizikai folyamathoz, és ebből adódóan az állapotváltozós modell is kellően közeli leírást tud adni a rendszerben lezajló fizikai folyamatokról. Mindezt egy átviteli tulajdonságot megadó rendszerjellemző függvény nem tudja, legfeljebb konstruálhatunk belőle egy állapotváltozós modellt, amely



2.28. ábra. Az állapotváltozós rendszer blokkvázlata lineáris esetben

azonban legritkább esetben illeszthető a valóságos, fizikai rendszer belsejéhez. Ennek egyszerűen az az oka, hogy ugyanazt az átviteli tulajdonságot sokféle belső kialakítás mellett is biztosítani lehet (vö. 2.5.3. pont).

A (2.275) és (2.276) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldását a zérus bemenőjelű (ún. homogén) rendszer viselkedését leíró ún. állapotátmenet mátrix segítségével adhatjuk meg. Az állapotátmenet mátrix előállítására variáns rendszerben többnyire meglehetősen nehéz, megnyugtató származtatási eljárás csak az időinvariáns rendszerek esetén áll rendelkezésre. Általános esetben első lépésként az $\dot{x} = A(t)x$ ho-

homogén egyenlet n független megoldását keressük. Ismeretes, hogy nem elfajuló esetekben van n független megoldás. Ezekből a megoldásokból felépítjük a független megoldások $\mathbf{x}(t)$ mátrixát:

$$\mathbf{X}(t) = [\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}] \quad (2.277)$$

amellyel a $\Phi(t, t_0)$ állapotátmenet mátrix

$$\Phi(t, t_0) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0). \quad (2.278)$$

Ezzel a homogén egyenlet megoldása:

$$\mathbf{x}_h(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t)|_{t=t_0}. \quad (2.279)$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását ugyancsak az állapotátmenet mátrix segítségével tudjuk megadni:

$$\mathbf{x}_p(t) = \Phi(t, t_0)\mathcal{L}(t), \quad (2.280)$$

ahol

$$\mathcal{L}(t) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0)\mathbf{B}(\tau)u(\tau) d\tau. \quad (2.281)$$

$\mathcal{L}(t)$ előbbi kifejezését úgy kapjuk meg, hogy a (2.280) szerinti megoldást behelyettesítjük az állapotegyenletbe és abból $\mathcal{L}(t)$ -t kifejezzük.

A teljes megoldás ezek után:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t) = \underbrace{\Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0}_{\substack{\text{a homogén} \\ \text{egyenlet} \\ \text{ált. meg-} \\ \text{oldása}}} + \underbrace{\Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0)\mathbf{B}(\tau)u(\tau) d\tau}_{\substack{\text{az inhomogén egyenlet} \\ \text{egy partikuláris} \\ \text{megoldása}}}, \quad (2.282)$$

ill. a kimenőjel:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}(t)\Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0)\mathbf{B}(\tau)u(\tau) d\tau + \mathbf{D}(t)u(t). \quad (2.283)$$

A kimeneti egyenlet némileg egyszerűbb alakra hozható, ha felhasználjuk az állapotátmenet mátrix két fontos tulajdonságát. Az egyik:

$$\Phi^{-1}(\tau, t_0) = \Phi(t_0, \tau), \quad (2.284)$$

a másik:

$$\Phi(t, t_0)\Phi^{-1}(\tau, t_0) = \Phi(t, t_0)\Phi(t_0, \tau) = \Phi(t, \tau). \quad (2.285)$$

Ezek felhasználásával a kimeneti egyenlet:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t [\mathbf{C}(t)\Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau) + \delta(t-\tau)\mathbf{D}(\tau)]u(\tau) d\tau. \quad (2.286)$$

Mint már az előzőekben említettük, az állapotátmenet mátrix meghatározása nem mindig egyszerű feladat. Ha azonban az A mátrix konstans $n \times n$ -es mátrix, akkor behelyettesítés útján belátható, hogy az állapotátmenet mátrix

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} \quad (2.287)$$

alakú, ahol

$$e^{A(t-t_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k(t-t_0)^k}{k!}. \quad (2.288)$$

Ha a teljes rendszer idő-invariáns, tehát a B, C, D mátrixok is konstansok, akkor a (2.275–2.276) egyenletrendszer megoldására a *Laplace*-transzformáció is használható:

$$\begin{aligned} sX(s) &= AX(s) + BU(s), \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s). \end{aligned} \quad (2.289)$$

Ebből $x(0)$ kezdetiérték feltételezésével:

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) &= \underbrace{C(sI - A)^{-1}x(0)}_{\text{a homogén egyenlet ált. megoldásából}} + \underbrace{[C(sI - A)^{-1}B]U(s) + DU(s)}_{\text{az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásából}} \end{aligned} \quad (2.290)$$

ahol $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. A (2.290) összefüggésből leolvasható, hogy az állapotátmenet mátrix *Laplace*-transzformáltja:

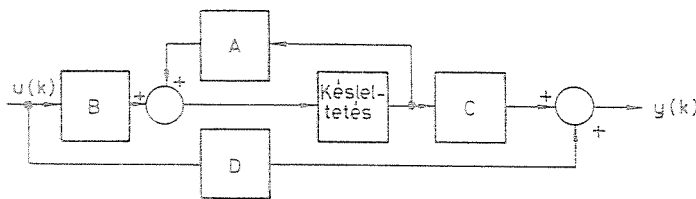
$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}. \quad (2.291)$$

Az időben diszkrét rendszerek esetében is alkalmazható az állapotváltozós leírás. Csak az időinvariáns esetekre szorítkozva az időben diszkrét rendszerek leírására a következő egyenletrendszer alkalmas:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (2.292)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k). \quad (2.293)$$

Az első egyenlet itt is az ún. állapotegyenlet, a második pedig az ún. megfigyelési (kimeneti, mérési) egyenlet. A leíró egyenletek alapján megadható rendszer-tömbvázlat a 2.29. ábrán látható.



2.29. ábra. Az időben diszkrét állapotváltozós rendszer blokkvázlata

Kiindulva az $x(0)$ állapotból a (2.292) összefüggés felhasználásával írható:

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0)$$

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1)$$

$$x(k) = \underbrace{A^k x(0)}_{\text{a homogén egyenlet általános megoldása}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i)}_{\text{az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása}}. \quad (2.294)$$

Ebből leolvashatjuk, hogy időben diszkrét rendszereknél is az állapotátmenet mátrix az A mátrix függvénye, és az állapotátmenet mátrix időinvariáns esetben az A mátrix alkalmas hatványával egyenlő:

$$\Phi(k, 0) = A^k, \quad \text{ill.} \quad \Phi(k+1, k) = A. \quad (2.295)$$

A kimenőjel pedig a (2.294) összefüggés felhasználásával:

$$y(k) = CA^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-1-i} Bu(i) + Du(k). \quad (2.296)$$

A (2.292—2.293) egyenletrendszer megoldására a z -transzformáció is használható:

$$\begin{aligned} zX(z) &= AX(z) + BU(z), \\ Y(z) &= CX(z) + DU(z), \end{aligned} \quad (2.297)$$

ahol $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$, $U(z) = \mathcal{Z}\{u(n)\}$, $Y(z) = \mathcal{Z}\{y(n)\}$. Ebből $x(0)$ kezdeti érték feltételezésével:

$$\begin{aligned} X(z) &= z[zI - A]^{-1}x(0) + [zI - A]^{-1}BU(z), \\ Y(z) &= \underbrace{Cz[zI - A]^{-1}x(0)}_{\text{A homogén egyenlet ált. megoldásából}} + \underbrace{C[zI - A]^{-1}BU(z) + DU(z)}_{\text{az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásából}}. \end{aligned} \quad (2.298)$$

Mindezekből leolvashatjuk, hogy az állapotátmenet mátrix z -transzformáltja:

$$\Phi(z) = z[zI - A]^{-1} = [I - z^{-1}A]^{-1}. \quad (2.299)$$

Koncentrált paraméterű, nemlineáris, állapotváltozós modellek

A nemlineáris rendszerek közös jellemzőjeként azt tekintjük, hogy nem érvényes a szuperpozíció, tehát a rendszer belsejében bekövetkezett változások és/vagy a bemenőjel hatásai szintfüggőek. Sok esetben a nemlineáris rendszereket a következő egyenletrendszerrel tudjuk jellemezni:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^T, \mathbf{u}^T, t), \quad (2.300)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^T, \mathbf{u}^T, t), \quad (2.301)$$

ahol az első egyenlet itt is az állapotegyenlet, a második pedig a megfigyelési vagy mérési egyenlet. $\mathbf{f}$ és $\mathbf{g}$ tulajdonságai alapján a nemlineáris rendszermodelleken belül sokféle modellosztály hozható létre. Ezek egyrészt a nemlinearitás jellege, másrészt a rendszeregyenlet megoldási módszereiben térnek el egymástól. Az állapotegyenlet megoldására többnyire csak közelítő módszereket használhatunk, az analitikus megoldás csak speciális esetekben ismert. A közelítő módszerek egy csoportja a lineáris rendszereknél alkalmazott módszerek felhasználásával oldja meg a problémát. Ennek egy tipikus példája a következőkben ismertetésre kerülő módszer, mely főleg olyan nemlinearitásoknál használható, melyeknél a leírásra használható függvénykapcsolat egyértékű. A (2.300) állapotegyenletet az $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ és $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ pontban Taylor-sorba fejtvé, majd abból csak az első derivált szerinti megváltozásokat figyelembe véve a következő alakhoz jutunk:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_i = \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{x}^T, \mathbf{0}, t)}{\partial x_k} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \Delta x_k + \sum_{l=1}^m \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0^T, \mathbf{u}^T, t)}{\partial u_l} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}} \Delta u_l, \quad (2.302)$$

$i = 1, 2, \dots, n$.

A jobb áttekinthetőség kedvéért vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathbf{A}(t) = \{a_{ij}(t)\} = \left\{ \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{x}^T, \mathbf{0}, t)}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \right\}, \quad (2.303)$$

$$\mathbf{B}(t) = \{b_{lj}(t)\} = \left\{ \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0^T, \mathbf{u}, t)}{\partial u_j} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}} \right\}. \quad (2.304)$$

Ezekkel a jelölésekkel

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B}(t) \Delta \mathbf{u}. \quad (2.305)$$

Ezek szerint lehetőség van az állapotegyenlet közelítő numerikus megoldására, mégpedig oly módon, hogy a lineáris rendszereknél kidolgozott módszert használhatjuk. A módszert alkalmazva belátható, hogy lényegében szakaszonkénti linearizálást végzünk, melynél a szakaszhatárok kijelölését a nemlinearitás jellege és a pontossági követelmények alapján végezzük. Ez az eljárás elvben igen általános, gyakorlati korlátot viszonylag nagy számítási igénye szab.

A lehetséges állapotváltozós rendszermodell típusok fenti felsorolása korántsem teljes, elsősorban a gyakorlatban leggyakrabban előforduló esetekről igyekeztünk megemlékezni. Néhány esetben nem tértünk ki az időben diszkrét esetre, de ezek a bemutatott modelltípusok alapján könnyen származtathatók.

2.13. példa

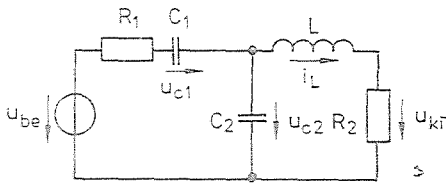
A koncentráltparaméterű, lineáris és invariáns rendszerek állapotváltozós reprezentációjának illusztrálására tekintsük a 2.30. ábrát. Három dinamikus elemünk van, és mivel ezek lineárisak, az u_{C1} , u_{C2} és i_L mennyiségeket választhatjuk állapotváltozóknak. A hálózatra felírtató egyenletek a következő alakra rendezhetők:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{C1} \\ \dot{u}_{C2} \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1 C_2} & -\frac{1}{R_1 C_2} & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_1 C_2} \\ 0 \end{bmatrix} [u_{be}], \quad (2.306)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$[u_{ki}] = [0 \quad 0 \quad R_2] \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \\ i_L \end{bmatrix} + [0] [u_{be}], \quad (2.307)$$

$$y = Cx + Du.$$



2.30. ábra. Egyszerű villamoshálózat az állapotváltozós leírás illusztrálásához

A példa kapcsán is jól látható, hogy az állapotváltozók ismeretében sokkal közelebb kerülünk a vizsgált rendszer belső energiaviszonyaihoz, mint a kimeneti, ill. bemeneti jellemzők alapján.

2.14. példa

A szinkron sorrendi hálózatok leírására lényegében ugyancsak állapotváltozós módszert használunk. Ezek időben diszkrét, néhány kivételtől eltekintve nemlineáris rendszereknek tekinthetők, tehát leírásukra (2.300—2.301) időben diszkrét esetre vonatkozó megfelelője szolgál. Valóban, ha az

u a bemeneti vektor v. bemeneti állapot $u_i \in \{0, 1\}$,

x a sorrendi hálózat belső állapota, azaz a tárolóelemek állapota,

y a kimeneti vektor, v. kimeneti állapot,

akkor a hálózat n . állapotából az $(n+1)$. állapotába a következő összefüggéseknek megfelelően kerül (a felső index az állapot sorszáma):

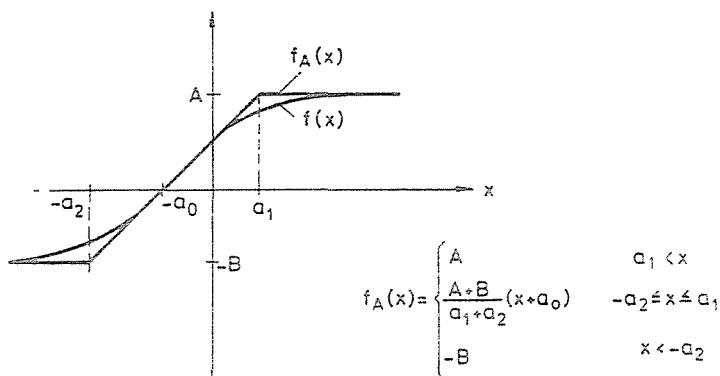
$$x^{n+1} = f(x^n, u^n), \quad (2.308)$$

$$y^n = g(x^n, u^n). \quad (2.309)$$

Az f és g nemlineáris függvényeket tipikusan állapottáblázattal v. állapotgráffal adhatjuk meg.

2.15. példa

A munkaponti linearizálás, ill. a szakaszonkénti linearizálás széles körben elterjedt módszer, elsősorban azért, mert sok gyakorlati esetben a nemlinearitások jellege olyan, hogy akár hosszabb szakaszon is lineárisnak tekinthető a nemlineáris karakterisztika. Ennek illusztrálására szolgál a 2.31. ábra, ahol a nagyon gyakori telítődő karakterisztikát tüntettük fel. Ilyen esetben a (2.302) alakú megoldás kiértékelése lényegesen egyszerűbbé válhat.



2.31. ábra. Szakaszonkénti linearizálás

2.5.3. A bemenő- és a kimenőjelek közvetlen kapcsolatát megadó, és az állapotegyenleten alapuló leírási módok viszonya

A rendszermodell típusok tárgyalása során megemlítettük, hogy általában milyen megfontolások vezethetnek ennek a kétfajta megközelítésnek valamelyikére. A következőkben több szempontból is összehasonlítjuk a kétféle eljárást.

Kapcsolat a súlyfüggvény módszer alapján

A (2.245) összefüggés n változós esetben a következő alakban írható:

$$y(t) = \int_0^t h(t, \tau) u(\tau) d\tau; \quad h(t, \tau) = 0 \quad \tau > t, \quad u(t) = 0 \quad t < 0. \quad (2.310)$$

Ugyanakkor $x_0 = 0$ és $t_0 = 0$ feltételezésével (2.286) alapján:

$$y(t) = \int_0^t [C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau) + \delta(t-\tau)D(\tau)]u(\tau) d\tau \quad (2.311)$$

(2.310) és (2.311) összevetésével:

$$h(t, \tau) = \begin{cases} C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau) + \delta(t-\tau)D(\tau) & \tau \leq t, \\ 0 & \tau > t. \end{cases} \quad (2.312)$$

Innen nagyon jól látszik a súlyfüggvény mátrix és az állapotátmenet mátrix szoros kapcsolata, nevezetesen mindkettő a τ időpillanatbeli gerjesztés (állapot) t időpillanatbeli kihatását írja le. A $h(t, \tau)$ mátrix magában hordozza a bemenet és a kimenet közötti átvitel valamennyi összetevőjét, míg a $\Phi(t, \tau)$ mátrix csak a dinamikus rész átviteli sajátosságaihoz járul hozzá. A bemenőjel és a dinamikus rész közötti átvitelt, továbbá a dinamikus rész és a kimenet közötti átvitelt, valamint a bemenet és a kimenet közötti közvetlen átvitelt rendre a $B(\tau)$, $C(\tau)$ és $D(\tau)$ mátrixok mint alkalmas anszformációk valósítják meg.

Némielőleg egyszerűbb a helyzet, ha időinvariáns rendszermodellt alkalmazunk.

$$h(t, \tau) = h(t - \tau), \quad (2.313)$$

továbbá alkalmazható a *Laplace*-transzformáció. Ennek megfelelően $h(t)$ *Laplace*-transzformáltja:

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad (2.314)$$

valamint (2.312) alapján továbbra is $x_0 = 0$ feltételezéssel:

$$H(s) = C\Phi(s)B + D; \quad \Phi(s) = (sI - A)^{-1}. \quad (2.315)$$

Érdekes sajátosság, hogy az állapotváltozós rendszer átviteli tulajdonságai nem változnak, ha az (A, B, C, D) mátrixok helyébe a $(TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D)$ mátrixokat írjuk, ahol T egy nonszinguláris transzformációs mátrix. (Ezt a transzformációt szokás hasonlósági transzformációnak nevezni.) Ezek szerint a (2.312), ill. (2.315) összefüggések nem jelennek megkötést a rendszer tényleges belső viszonyaira, csak az átviteli sajátosságokat rögzítik. Az $A' = TAT^{-1}$, $B' = TB$, $C' = CT^{-1}$, $D' = D$ jelöléseket alkalmazva ugyanis (2.315) felírható

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = C'(sI - A')^{-1}B' + D' \quad (2.316)$$

formában, amit *T ekvivalenciának* is szoktak nevezni. Ebből viszont arra következtethetünk, hogy a súlyfüggvényből, ill. súlyfüggvény mátrixból az állapotváltozó modell nem hozható létre egyértelműen, továbbá megfordítva: több állapotváltozós modell azonos átviteli sajátosságokkal rendelkező rendszermodellre vezethet. Mindezek alapján még azt is mondhatjuk, hogy az állapotegyenleten alapuló leírási mód több információt, mégpedig strukturális információt hordoz a rendszer belső szerkezetéről, segítségével a belső átviteli sajátosságokról többet tudhatunk meg.

A fenti gondolatmenetet az időben diszkrét esetre megismételve (2.298) alapján

$$H(z) = C[zI - A]^{-1}B + D \quad (2.317)$$

adódik $x(0) = 0$ esetben, melynél ugyancsak fennáll a kapcsolat nem egyértelmű volta, ugyanis a (2.316) összefüggéssel teljes analógiában fennáll:

$$H(z) = C[zI - A]^{-1}B + D = C'[zI - A']^{-1}B' + D'. \quad (2.318)$$

Megjegyzés:

1. Mindezek alapján látható, hogy a $H(s)$, ill. $H(z)$ átviteli függvény mátrixoknak több ekvivalens alakja létezik. Ezek sorát bővíthetjük olyan (A, B, C, D) mátrixokkal, melyek dimenziója az eddigieknél magasabb, tehát több belső állapotot tartalmazó rendszert modelleznek az eddigiekhez képest, annak ellenére, hogy a bemenet és a kimenet közötti átvitel változatlan. Ilyen esetben a rendszermodellnek vannak olyan részei (állapotváltozói), melyek az átvitel szempontjából közömbösek, tehát az átvitel szempontjából feleslegesnek tekinthetők.

2. A $H(s)$, ill. $H(z)$ átviteli függvény mátrixok (A, B, C, D) mátrixokkal való (2.316), ill. (2.318) realizációját *minimális realizációnak* nevezzük, ha a modell ilyen redundáns elemet nem tartalmaz, továbbá az (A, B, C, D) mátrixok nem elfajulóak, azaz a bemenő- és kimenőjelek kapcsolata tetszőleges bemenőjel esetén megvalósítható.

3. Fontos sajátosság, hogy ha egy átviteli függvény mátrixnak adott két minimális realizációja, akkor mindig megadható a kapcsolatukat kifejező nonszinguláris T transzformációs mátrix.

4. A T ekvivalencia következtében előálló realizációsereg közötti tájékozódást ún. *kanonikus alakok* rögzítésével segítjük elő. Ez úgy történik, hogy az átviteli függvény mátrixból kiindulva szigorúan megköttjük az (A, B, C, D) mátrixok generálásának lépéseit, és ezáltal rögzítjük a konkrét (kanonikus) realizációt.

5. A kanonikus alak nem feltétlenül jelent minimális realizációt.

2.16. példa

Ebben a példában az állapotváltozós alak átviteli függvényből való felírásának két lehetséges módját mutatjuk be. Tételezzük fel, hogy adott a

$$H(z) = \frac{a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n}{z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n} \quad (2.319)$$

átviteli függvény. Az állapotváltozós modell mátrixainak egy lehetséges alakja:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ \vdots & & & & 1 \\ -b_n & -b_{n-1} & -b_{n-2} & \dots & -b_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C^T = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_1 \end{bmatrix}; \quad D = 0. \quad (2.320)$$

A másik egyszerűen felírható alak:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & -b_n \\ 1 & 0 & \dots & -b_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & -b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -b_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_1 \end{bmatrix}; \quad C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}; \quad D = 0. \quad (2.321)$$

Ha valamilyen oknál fogva $\lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = 0$, akkor $D = \lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = D$, tehát az A, B, C mátrixok csak a $H(z) - D$ átviteli függvényrészt realizálják [lásd (2.318)].

Kapcsolat a karakterisztikus egyenlet gyökei alapján

Koncentrált paraméterű, lineáris és időinvariáns rendszermodellek esetén a kétfajta megközelítés kapcsolata a karakterisztikus egyenlet gyökei alapján is szemléletesen bemutatatható. A differenciálegyenletek elméletéből ismert, hogy az n -ed rendű, állandó együtthatós, lineáris differenciálegyenletek megoldását $e^{\lambda_i t}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) alakú tagok lineáris kombinációja adja. λ_i az ún. karakterisztikus egyenlet i -edik gyökét jelöli. (Értéke lehet valós vagy komplex; ha a differenciálegyenletben szereplő valamennyi együttható valós, akkor a komplex gyök konjugáltja is gyök.) Az $e^{\lambda_i t}$ alakú tagok a rendszermodellben szereplő, és energiatárolási feladatot ellátó elemek (ún. dinamikus elemek) jelenléte következtében lépnek fel. Ha ugyanezt az átvitelt állapotváltozós módszerrel valósítjuk meg, akkor azt tapasztaljuk, hogy a dinamikus részt leíró A mátrix sajátértékei megegyeznek a karakterisztikus egyenlet gyökeivel. Ismeretes az is, hogy az A mátrixra alkalmazott hasonlósági transzformáció a sajátértékeket változtatlanul hagyja. Ezek után (2.287) felhasználásával csak azt kell vé-

giggondolni, hogy időinvariáns esetben a (2.286) összefüggés is az e^{At} alakú tagok lineáris kombinációját adja. Mivel a kétféle rendszermodell tetszőleges bemenőjel esetén azonos kimenőjelet ad, a kétféleképpen nyert lineáris kombináció azonos kell legyen.

Bonyolultabb modellek esetén többnyire az állapotváltozós modelleket részesítjük előnyben sokszor kizárólag azért, mert a rendszermodell leíró egyenletének numerikus megoldása ebben az esetben egyszerűbb. Az állapotváltozós modellek esetében ugyanis, mint erre már a fentiekben utaltunk, több strukturális információ áll rendelkezésünkre, és ezáltal az alkalmazásra kerülő numerikus eljárás paramétereinek megfelelő beállítására kedvezőbbek a lehetőségeink.

Az állapotváltozós megközelítés további kedvező sajátossága, hogy egységes szemléletmódot diktál a különféle sajátosságokkal rendelkező rendszermodellek tárgyalásához. Ez lehetővé teszi a lényeges tulajdonságok kiemelését modelltípustól függetlenül, továbbá megkönnyíti az alkalmazandó numerikus eljárások kiválasztását.

2.5.4. Rendszerek vezérelhetősége, megfigyelhetősége, identifikálhatósága

A vezérelhetőség, megfigyelhetőség, identifikálhatóság fogalmát állapotváltozós rendszermodell esetén értelmezzük. A *vezérelhetőség* fogalma a rendszer bemenő, és az állapotváltozóikhoz kapcsolódik, és arra ad választ, hogy milyen feltételek mellett lehet alkalmas bemenőjellel egy tetszőleges állapotból egy meghatározott állapotba juttatni a rendszert, mégpedig véges idő alatt. A *megfigyelhetőség* fogalma a rendszer állapot- és a kimenő változóikhoz kapcsolódik, és arra ad választ, hogy mikor lehetséges a rendszer egy korábbi állapotát a kimeneten lefolytatott véges idejű mérés eredményeiből meghatározni. Végül az *identifikálhatóság* fogalma azt rögzíti, hogy mikor határozható meg az állapotváltozók értékeiből (véges idő alatt) az állapot-egyenlet homogén részének (A) együttható mátrixa. Ezek a fogalmak egyrészt érdekes rendszertulajdonságokat tárnak fel, másrészt fontos útmutatást adnak a különféle rendszerek létrehozásához, ill. mérés technikájához. Az alábbiakban részletesen ismertetjük ezen fogalmak definícióit és azokat a módszereket, melyek a fentiekben vázolt tulajdonságok feltárására, ill. ellenőrzésére szolgálnak.

Vezérelhetőség

Egy lineáris rendszer *vezérelhető* a t_0 időpillanatban, ha létezik olyan $x(t_0)$ -től függő $\{u(t)\} = \{u(t) : t_0 \leq t \leq t_1\}$ bemenőjel halmaz, mely a rendszert a t_1 időpontra az $x(t_1) = 0$ állapotba juttatja (2.32. ábra). Ha ez teljesül minden $x(t_0)$ és t_0 esetén, akkor azt mondjuk, hogy a rendszer teljesen vezérelhető.

Időinvariáns esetben viszonylag egyszerű kritérium adható a vezérelhetőség ellenőrzésére. Az állapotegyenlet ilyenkor

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.322)$$

ahol A $n \times n$ -es, B pedig $n \times m$ -es mátrix. A rendszer akkor és csak akkor vezérelhető, ha az

$$M_v = [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B] \quad (2.323)$$

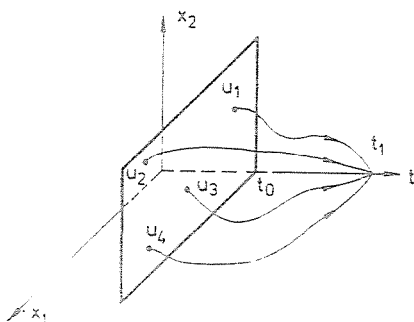
ún. *vezérelhetőségi mátrix* rangja n .

Időben diszkrét rendszerek esetén a vezérelhetőséget nagyon egyszerűen tudjuk vizsgálni. Tételezzük fel ugyanis, hogy a rendszert az $x(0)$ állapotból az $x(n)$ állapotba kell juttatnunk. Ehhez keresünk egy alkalmas bemenőjelet. Az időben diszkrét állapotegyenlet alapján:

$$\begin{aligned} x(1) &= Ax(0) + Bu(0) \\ x(2) &= Ax(1) + Bu(1) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1) \\ &\vdots \\ x(n) &= A^n x(0) + A^{n-1}Bu(0) + \dots + Bu(n-1) \end{aligned} \quad (2.324)$$

(2.324) utolsó sorának átrendezésével:

$$\underbrace{x(n) - A^n x(0)}_{\text{Ismert}} = \underbrace{[A^{n-1}B \mid A^{n-2}B \mid \dots \mid B]}_{M_v \text{ vezérelhetőségi mátrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} u(0) \\ \vdots \\ u(n-1) \end{bmatrix}}_{\substack{\text{keresett} \\ \text{bemenőjel}}} \quad (2.325)$$



2.32. ábra. Illusztráció a vezérelhetőség fogalmához

A (2.325) egyenletrendszernek akkor és csak akkor van egyértelmű megoldása, ha a vezérelhetőségi mátrix rangja n . Ha ez nem teljesül, akkor olyan rendszerrel van dolgunk, amelynél legalább egy állapotváltozónak nincsen kapcsolata a bemenettel. [Ezt egyébként leolvashatjuk a (2.325) összefüggésből úgy is, hogy rögzítjük az $u(0), \dots, u(n-1)$ sorozatot, és ismeretlennek az egyenlet bal oldalát tekintjük.] Azok az állapotváltozók, melyek a bemenet felől nem férhetők hozzá, a rendszer ún. *autonóm részeit* írják le. Ha tehát egy rendszer autonóm részeket tartalmaz, akkor nem vezérelhető. Ilyen helyzettel állunk szemben, ha pl. a rendszeren belül van egy olyan belső oszcillátor, melynek hangolásához bemenő változó nem áll rendelkezésre.

Megfigyelhetőség

Egy rendszert *megfigyelhetőnek* nevezünk, ha valamely $t_1 > t_0$ időpontokra az $x(t_0)$ állapot teljes mértékben meghatározható a kimenőjel $[t_0, t_1]$ intervallumbeli értékei alapján. Ha ez minden t_0 esetén fennáll, akkor a rendszer teljesen megfigyelhető.

Lineáris és időinvariáns rendszermodell esetén a megfigyelhetőség egyszerűen vizsgálható. Nulla bemenőjel mellett az állapotegyenlet és a megfigyelési egyenlet:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (2.326)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (2.327)$$

alakjából kiindulva azt mondhatjuk, hogy a rendszer akkor és csak akkor teljesen megfigyelhető, ha az

$$\mathbf{M}_M = [\mathbf{C}^T | \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T | \dots | (\mathbf{A}^{n-1})^T \mathbf{C}^T] \quad (2.328)$$

ún. *megfigyelhetőségi mátrix* rangja n . (Az $\mathbf{A}$ mátrix $n \times n$ méretű.)

Időben diszkrét rendszerek esetén a megfigyelhetőség kritériuma is egyszerűen származtatható. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy az $\mathbf{y}$ vektor értékeiből az $\mathbf{x}(0)$ értéket kívánjuk meghatározni. Az időben diszkrét állapotegyenlet, és a megfigyelési egyenlet alapján:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(0) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(0), \\ \mathbf{y}(1) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(1) = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(0), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.329)$$

$$\mathbf{y}(n-1) = \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}(0).$$

A (2.329) egyenletrendszer utolsó sorának transzponáltját véve és rendezve:

$$\underbrace{[\mathbf{y}^T(0) \ \mathbf{y}^T(1) \ \dots \ \mathbf{y}^T(n-1)]}_{\text{Ismert}} = \underbrace{\mathbf{x}^T(0)}_{\text{kere-}} \underbrace{[\mathbf{C}^T | \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T | \dots | (\mathbf{A}^{n-1})^T \mathbf{C}^T]}_{\substack{\mathbf{M}_M \text{ megfigyelhetőségi} \\ \text{mátrix}}}. \quad (2.330)$$

A (2.330) egyenletrendszernek akkor és csak akkor van egyértelmű megoldása, ha a megfigyelhetőségi mátrix rangja n . Ha ez nem teljesül, akkor a vizsgált rendszerben legalább egy állapotváltozónak nincsen kapcsolata a kimenettel, és így egy rögzített $\mathbf{y}(0), \dots, \mathbf{y}(n-1)$ mérési sorozathoz a rendszernek több (esetleg végtelen sok) állapota is tartozhat.

Identifikálhatóság

Egy koncentráltparaméterű lineáris rendszert *identifikálhatónak* nevezzük, ha az állapotváltozók értékeiből meghatározható az $\mathbf{A}$ mátrix. Az $\mathbf{A}$ mátrix a rendszer dinamikus részének valamennyi belső összefüggését magában foglalja. Az identifikálhatóság tehát azt jelenti, hogy az állapotváltozók értékeiből a dinamikus rész valamennyi belső összefüggését fel tudjuk tárni.

Csak az időben diszkrét esetre szorítkozva az identifikálhatóság feltételét az alábbiakban fogalmazzuk meg. Induljunk ki az $\mathbf{x}(0)$ állapotból. ($\mathbf{A}$ $n \times n$ -es mátrix).

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}(2) &= \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}(n) &= \mathbf{A}^n\mathbf{x}(0) \end{aligned} \quad (2.331)$$

Rendezve :

$$\underbrace{[x(1) \ x(2) \ \dots \ x(n)]}_{\text{Ismert}} = \underbrace{A[x(0) \ Ax(0) \ \dots \ A^{n-1}x(0)]}_{\substack{\text{ke-} \\ \text{re-} \\ \text{sett}}} \quad \text{ke-} \quad \text{M}_I: \text{ az identifikálható-} \\ \text{ság mátrixa} \quad (2.332)$$

A (2.332) egyenletből az A mátrixra akkor és csak akkor kapunk egyértelmű megoldást, ha az *identifikálhatóság mátrixának* rangja n . Ha ez nem teljesül, akkor az állapotváltozók számbavett értékeiből az A mátrix nem határozható meg. Triviális esetként előfordulhat, hogy $x(0)=0$, de nem identifikálható a rendszer akkor sem, ha $x(0)$ a rendszermodell valamelyik sajátvektorával arányos.

2.17. példa

Tekintsük azt az időben diszkrét rendszert, melyre :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.333)$$

Ellenőrizzük a vezérelhetőséget abban az esetben, ha $a_{12}=a_{22}=0$. A rendszer vezérelhető, ha az

$$[AB \mid B] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.334)$$

mátrix rangja 2. Ennek feltétele, hogy $a_{21} \neq 0$, (lásd 2.33. ábra).

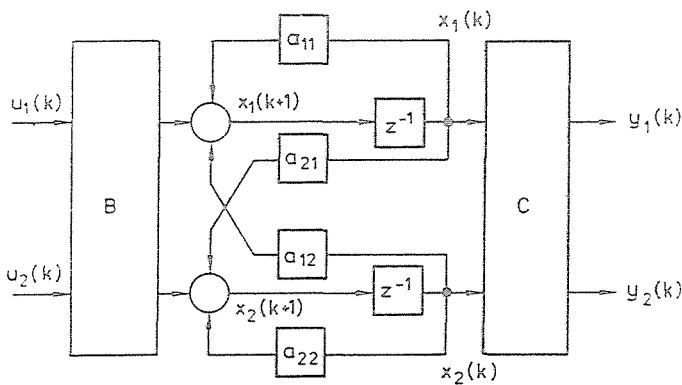
A megfigyelhetőséget $a_{21}=a_{22}=0$ esetre nézzük. A

$$[C^T \mid A^T C^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{12} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.335)$$

mátrix rangja 2, ha $a_{12} \neq 0$, (lásd 2.33. ábra).

Az identifikálhatóság feltétele, hogy a

$$\begin{bmatrix} x_1(0) & a_{11}x_1(0) + a_{12}x_2(0) \\ x_2(0) & a_{21}x_1(0) + a_{22}x_2(0) \end{bmatrix} \quad (2.336)$$



2.33. ábra. Illusztráció a 2.17. példához

mátrix rangja 2. Ez akkor nem teljesül, ha a vizsgált mátrix oszlopai lineárisan függetlenek:

$$[A - \lambda I] \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = 0. \quad (2.337)$$

Ekkor vagy $x(0) = 0$, vagy $x(0)$ az A mátrix valamelyik sajátvektorával arányos.

2.18. példa

Az identifikálhatóság fogalmának bevezetésekor láttuk, hogy speciális kezdeti érték esetén a rendszert csak részben tudjuk feltérképezni. Ezt illusztrálja ez a példa, ahol visszatértünk ugyan a differenciálegyenlet alakhoz, de mindez a lényeget nem befolyásolja. Vizsgáljuk a következő másodfokú rendszert:

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = u \quad (2.338)$$

és legyen adott $y(0)$, és $\dot{y}(0)$. A Laplace-transzformációt alkalmazva

$$Y(s) = \frac{s + a_1}{s^2 + a_1 s + a_2} y(0) + \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_2} \dot{y}(0) + \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_2} U(s) \quad (2.339)$$

kimenőjelhez jutunk. Ha pl. $U(s) = 1$, $a_1 = 7$, $a_2 = 10$, akkor

$$Y(s) = \frac{(s+7)y(0) + \dot{y}(0) + 1}{(s+2)(s+5)} = y(0) \frac{s+7 + \frac{\dot{y}(0)}{y(0)} + \frac{1}{y(0)}}{(s+2)(s+5)} \quad (2.340)$$

Ha $\dot{y}(0) + 1 = -5y(0)$, vagy $\dot{y}(0) + 1 = -2y(0)$, akkor

$$Y(s) = \begin{cases} \frac{y(0)}{s+2} \\ \frac{y(0)}{s+5} \end{cases} \quad (2.341)$$

vagyis úgy tűnik, mintha elsőfokú rendszer lenne, pedig nem az.

2.5.5. Rendszerek stabilitása

A *stabilitás* a rendszerelmélet központi fogalma. A gyakorlat szempontjából ugyanis általában csak a stabil rendszereknek van jelentősége, vagy legalábbis olyanoknak, melyeknek van stabil állapotuk. Lineáris rendszerek esetén a stabilitást csak a rendszer belső tulajdonságai, struktúrája és paraméterei határozzák meg. Nemlineáris esetben a stabilitás függhet a rendszeren belüli intenzitásvizonyoktól, és ennek megfelelően a bemenőjel, ill. kezdeti érték adatoktól. A lineáris és nemlineáris rendszerek ezen eltérő tulajdonságai miatt a stabilitáskritériumok, ill. a stabilitás vizsgálat módszerei is eltérnek. Ebben a szakaszban nem célunk a stabilitás-elméletről egy átfogó összefoglalást adni, mindössze néhány jellegzetességre hívjuk fel a figyelmet.

Lineáris rendszerek stabilitása

Stabilisnak nevezünk egy lineáris rendszert, ha egyensúlyi állapotából kitérve visszatér oda. Matematikai formában a stabilitás feltételének egy lehetséges megfogalmazása

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt < M, \quad (2.342)$$

ahol M egy véges korlát. Ez a kifejezés éppen azt fejezi ki, hogy impulzus gerjesztésre a rendszer visszatér eredeti állapotába. Ez a feltétel időben folytonos esetben ekvivalens a következő megfogalmazásokkal:

— a rendszert leíró n -edrendű differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének gyökei negatív valós részfűiek, tehát a differenciálegyenlet megoldása $e^{-i\operatorname{Re}\lambda_i t}$ burkolóú időfüggvények lineáris kombinációja. ($\lambda_i, i=1, 2, \dots, n$ a karakterisztikus egyenlet gyöke);

— állapotváltozós leírás esetén az A mátrix λ_i sajátértékei negatív valós részfűiek;

— a rendszer $H(s)$ átviteli függvényének pólusai az s komplex sík bal félsíkúára esnek.

Időben diszkrét esetben ezek a megfogalmazások értelemszerűen felhasználhatók.

A stabilitás vizsgálatára sokféle módszert dolgoztak ki, ezek egy része kapcsolódik a visszacsatolt lineáris rendszerek, ezen belül a szabályozási körök elméletéhez. A mérési eljárások tervezésekor a stabilitással kapcsolatos eredmények közvetlen felhasználásra kerülnek, mivel egyrészt biztosítani akarjuk, hogy a mérendő rendszer stabilis maradjon, továbbá azt, hogy a mérési eljárás is minél gyorsabban stabilis végeredményt szolgáltatson.

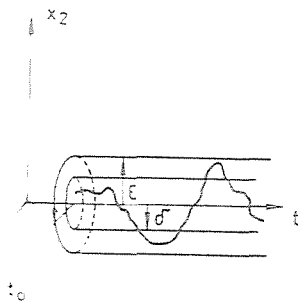
Nemlineáris rendszerek stabilitása

A stabilitás vizsgálata nemlineáris rendszerek esetén sokkal összetettebb probléma, mint lineáris rendszerekben. Nemlineáris rendszerekben kétféle módon szokták a stabilitást vizsgálni:

a) véges nagyságú gerjesztés esetén;

b) gerjesztésmentes állapotban, ami adott kezdeti feltételről induló, de magára hagyott, ún. autonóm rendszer vizsgálatát jelenti.

A gyakorlatban általában az utóbbi utat választják. A stabilitás használt fogalmi bizonyos szempontból általánosabbak, mint lineáris esetben. Például azt mondjuk, hogy egy nemlineáris dinamikus rendszer x_0 egyensúlyi állapota stabil (vagy



2.34. ábra. Illusztráció a stabilitás fogalmához

egyenletesen stabil), ha minden t_0 időpontban tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $\delta(\varepsilon) > 0$ szám, hogy ha

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta(\varepsilon); \quad x_0 = x(t_0), \quad (2.343)$$

akkor

$$\|\varphi(t_k, x(t_0), t_0) - x_e\| < \varepsilon \quad \text{minden } t_k \geq t_0\text{-ra,} \quad (2.344)$$

ahol $\varphi(t_k, x(t_0), t_0)$ a t_0 -ban $x(t_0)$ -ból induló rendszer állapotát adja meg a t_k időpontban. Ezt a stabilitás fogalmát a 2.34. ábra illusztrálja. Ebben a felfogásban stabilis egy „jól működő” oszcillátor áramkör is, hiszen a bekapcsolást követően a rezgési amplitúdó korlátos marad.

Ha egy kezdeti értékre „kilendített” rendszer abba az egyensúlyi állapotba tér vissza, amelyből kilendítettük, akkor aszimptotikus (vagy egyenletesen aszimptotikus) stabilitásról beszélünk. Egy rendszer akkor aszimptotikusan stabilis, ha

1. (egyenletesen) stabilis,
2. minden t_0 időpontban tetszőleges $\mu > \varepsilon$ számhoz található olyan $T(\mu)$ szám, hogy

$$\|\varphi(t_k, x(t_0), t_0) - x_e\| \leq \mu, \quad (2.345)$$

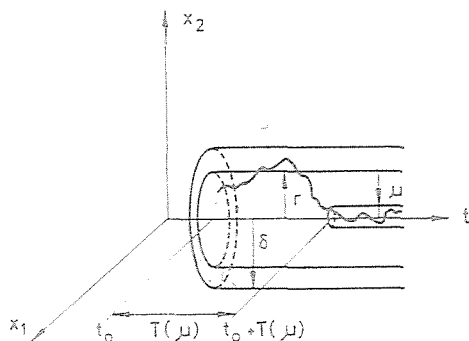
valahányszor

$$t_k \geq t_0 + T(\mu) \quad (2.346)$$

és

$$\|x_0 - x_e\| \leq r; \quad r > 0. \quad (2.347)$$

Fontos sajátosság, hogy r nem függ x_0 -tól és μ -tól. Ezt a stabilitás fogalmát a 2.35. ábra illusztrálja.



2.35. ábra. Illusztráció az aszimptotikus stabilitás fogalmához

2.5.6. A jel- és rendszermodellek dualitása

Végigtekintve a jelek és a rendszerek alapvető leírási módjain megállapíthatjuk, hogy a szóba jövő reprezentációk szinte mindegyikénél direkt kapcsolat van a jelek és a rendszerek között. Például lineáris rendszerekre szorítkozva, teljes kimeneti/bemeneti leírást tudunk adni egy speciális jel, a súlyfüggvény vagy az átmeneti függvény segítségével, ugyanakkor a különféle jelek tekinthetők valamilyen rendszer súlyfüggvényé-

nek vagy átmeneti függvényének, vagy valamilyen ismert jelre adott válaszfüggvényének, tehát a jelet le tudjuk írni a rendszer paramétereivel.

Ez a kapcsolat jellemző a jel- és rendszermodellezés valamennyi területére. Azt, hogy egy adott jelenséget, kölcsönhatást vagy kölcsönhatások összességét jel- vagy rendszermodellel írunk le, sok minden befolyásolja. Van azonban néhány olyan gyakorlati szempont, mely a választást döntő módon befolyásolja. Mind a jel-, mind a rendszerreprezentációval többek között célunk, hogy

- megfelelő mértékű adatredukciót érjünk el;
- a további feldolgozásokhoz, elemzésekhez kedvező formát hozzunk létre.

Sztochasztikus jelek esetén éppen ezeket a célokat valósítják meg az autoregresszív modellek (lásd 2.19. példa), vagy akár csak a fehérzaj bemenetű állapotváltozós jel- (ill. folyamat) modellek, melyekről a 4. fejezetben részletesebben is szó lesz.

A jel- és a rendszermodelleknek ez a dualitása természetes következménye annak, hogy jeleket mindig objektumok valamilyen kölcsönhatásának tulajdonítjuk, a rendszereket pedig kölcsönhatásban („jelkapcsolatban”) levő objektumokként definiáljuk.

2.19. példa

A jel- és rendszermodellek dualitásának illusztrálása céljából ebben a példában az ún. *autoregresszív modellek* néhány típusát mutatjuk be.

A különféle jel modellek, ill. jelreprezentációk kapcsán fontos kérdés, hogy a jelek ezen modellekben rögzített jellemzői hogyan módosulnak akkor, ha a jel áthalad egy rendszeren. Most olyan rendszermodelleket ismertetünk, melyeket fehérzaj bemenet feltételezésével különféle sztochasztikus folyamatok generálására használunk.

Az AR modell

Az *autoregresszív folyamat* modell időben diszkrét esetben:

$$y_n + \sum_{k=1}^N b_k y_{n-k} = w_n \quad (2.348)$$

alakú differencia egyenlettel jellemezhető, ahol $\{w_n\}$ diszkrét fehérzaj folyamat, $\{y_n\}$ pedig a generált sztochasztikus folyamat. Jól látható, hogy a sztochasztikus folyamat jellemzésére a $\{b_k; k=1, \dots, N\}$ együtthatókészlet alkalmas, mely egyébként egy, csak pólusokat tartalmazó

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} \quad (2.349)$$

átviteli függvényt rögzít. A $\{b_k\}$ együtthatókészlet meghatározása az $\{y_n\}$ folyamat R_{yy} autokorrelációs függvényének ismeretében lehetséges, ugyanis a (2.348) össze-
függést

$$\mathbf{b}^T = [1, b_1, b_2, \dots, b_N]$$

$$\mathbf{y}_n^T = [y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-N}]$$

jelölésekkel

$$y_n^T b = w_n \quad (2.350)$$

alakban írhatjuk, majd balról szorozva és várható értéket képezve

$$R_{yy}b = R_{yw}; \quad R_{yw}^T = [\sigma_w^2, 0, \dots, 0], \quad (2.351)$$

melyből

$$b = R_{yy}^{-1} R_{yw}. \quad (2.352)$$

Gyakran használják (2.349) állapotváltozós felírását:

$$A = \begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 & \dots & -b_{N-1} & -b_N \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C^T = \begin{bmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ -b_N \end{bmatrix}; \quad D = 1. \quad (2.353)$$

Az MA modell

Az ún. *mozgó átlag (moving average) folyamatmodell* időben diszkrét esetben:

$$y_n = w_n + \sum_{k=1}^M a_k w_{n-k} \quad (2.354)$$

alakú differenciaegyenlettel jellemezhető. Ebben a modellben a sztochasztikus folyamat jellemzésére az $\{a_k; k=1, \dots, N\}$ együttthatókészlet alkalmas, mely egyébként egy, csak zérusokat tartalmazó

$$H(z) = 1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k} \quad (2.355)$$

átviteli függvényt rögzít. Ennek állapotváltozós alakja:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C^T = \begin{bmatrix} a_M \\ a_{M-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_1 \end{bmatrix}; \quad D = 1. \quad (2.356)$$

Az ARMA modell

Az AR és az MA modellek „egyesítésével” jön létre az ARMA modell, mely a következő differenciaegyenlettel jellemezhető:

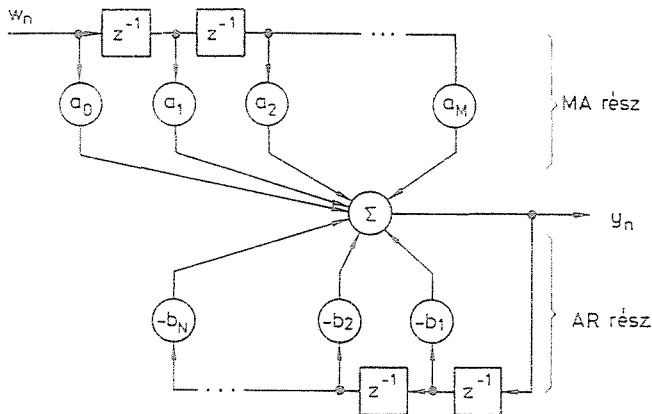
$$y_n + \sum_{k=1}^N b_k y_{n-k} = \sum_{k=0}^M a_k w_{n-k}, \quad (2.357)$$

ill. az ennek megfelelő átviteli függvény:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}}, \quad (2.358)$$

ami teljesen azonos felépítésű, mint a (2.239) összefüggés szerinti. Állapotváltozós megfelelőjét pl. a 2.16. példában bemutatott módon származtathatjuk. Az ARMA modell blokkvázlatát a 2.36. ábrán láthatjuk.

A jelreprezentáció fentiekben vázolt módja sokféleképpen általánosítható. Az alkalmazások szempontjából az általánosítás fontos iránya az adaptív modellek létrehozása. Ezek a fentiekben vázoltakhoz hasonlóak, de paramétereik variánsak.



2.36. ábra. Az ARMA modell

2.6. A jel- és rendszerreprezentációk néhány gyakorlati vonatkozása

A 2.4. alfejezetben röviden kitértünk arra, hogy a jelábrázolás és a jelfeldolgozás szoros kölcsönhatásban állnak egymással. A 2.5.6. pontban a jel- és rendszermodellek dualitásáról szoltunk. Ezek szerint a jelek és a rendszerek analízise a gyakorlatban teljes mértékben összefonódik, a különféle reprezentációk egymást kiegészítve kerülnek felhasználásra. Ugyanakkor a megvalósítás konkrét gyakorlati problémái számos elméleti kérdést vetnek fel. A következőkben a sokféle problémakör közül két területet szeretnénk kiragadni, és nagyon röviden vázolni. Ezek a témakörök a következők:

- analóg rendszerek időben diszkrét szimulációja;
- az amplitúdó kvantálás hatása.

Az analóg rendszerek diszkrét szimulációja

A 2.2.3. pontban láttuk, hogy ha teljesül a mintavételi tétel, akkor egy $x(t)$ jel felírható

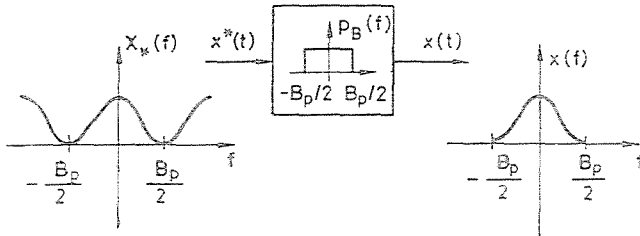
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \frac{\sin B_p \tau(t - nT_s)}{\pi B_p(t - nT_s)} \quad (2.359)$$

alakban. Az $x^*(t) = \{x(nT_s)\}$ modulált impulzussorozat *Fourier*-transzformáltja $X_*(f)$ a (2.37) összefüggéssel adható meg, mely közvetlen kapcsolatban áll az $x(t)$ jel *Fourier*-transzformáltjával (lásd 2.37. ábra):

$$X(f) = X_*(f) p_B(f), \quad (2.360)$$

ahol

$$p_B(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq B_p/2 \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (2.361)$$



2.37. ábra. A folytonos és a mintavételezett jelek kapcsolata

Ezeket az összefüggéseket felhasználjuk arra, hogy a konvolúciós integrált konvolúciós szumma alakban írassuk le, és ezáltal a súlyfüggvényével reprezentált analóg rendszert időben diszkrét rendszerrel szimuláljuk. Jelölje $H(f)$ az analóg rendszer átviteli függvényét, $h(t)$ pedig súlyfüggvényét. Ekkor a rendszer kimenőjele

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) h_B(t - nT_s) \quad (2.362)$$

alakban írható, ahol

$$h_B(t) = \int_{-B_p/2}^{B_p/2} H(f) e^{j2\pi f t} df, \quad (2.363)$$

melynek *Fourier*-transzformáltja

$$H_B(f) = p_B(f) H(f). \quad (2.364)$$

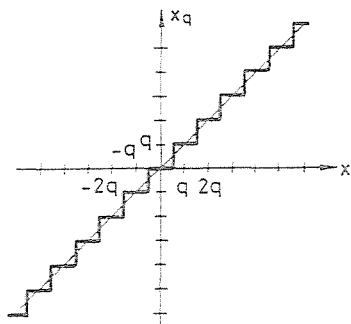
Bevezetve ezek után $x_n = x(nT_s)$, $h_n = h_B(nT_s)$ és $y_n = y(nT_s)$ jelöléseket a (2.362) összefüggésből

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k}, \quad (2.365)$$

ami a végeredményünk. Ezek szerint az analóg rendszer átvitelét teljes pontossággal meg tudjuk valósítani időben diszkrét rendszer felhasználásával, ugyanis az $y_k = y(nT_s)$ diszkrét sorozatból a (2.359) összefüggés felhasználásával $y(t)$ előállítható.

Az amplitúdókvantálás hatása

Digitális eszközzel történő reprezentációnál elkerülhetetlen, hogy az analóg jelet amplitúdóban is diszkrét értékek segítségével írjuk le. Mivel az időtartománybeli diszkrét reprezentációval a mintavételi értékek helyére előírást adtunk, nem tudjuk biztosítani, hogy a jelet pont ott mintavételezzük, ahol értéke éppen a digitális számbázis véges szóhosszával leírható. Éppen ezért a digitális jelfeldolgozó bemenetén elhelyezett A/D átalakító a jel egy nemlineáris transzformációját valósítja meg. Ez a nemlineáris transzformáció a *kvantálás*, mely nagyon sok gyakorlati esetben a 2.38. ábrán látható karakterisztikával jellemezhető. A kvantálás erősen nemlineáris volta sok problémát okoz a digitális jelfeldolgozásban. Determinisztikus eszközökkel való leírása meglehetősen bonyolult ahhoz, hogy beépüljön egy mérési eljárásba, ill.



2.38. ábra. A q lépéskörű egyenletes kvantáló karakterisztikája kerekítési algoritmus esetén

egy jelfeldolgozó algoritmusba. Valamivel kedvezőbb a helyzet statisztikai módszerek esetén. Ilyenkor az $e = x - x_q$ hiba statisztikai jellemzőit keressük. Igazak a következő állítások:

1. Abban az esetben, ha az x folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f_x(x)$ sávkorlátozott $\Phi_x(s)$ karakterisztikus függvényrel rendelkezik, mégpedig úgy, hogy

$$\Phi_x(s) = 0 \text{ minden } |s| \geq \frac{2\pi}{q} \text{ esetén,} \quad (2.366)$$

akkor a hiba egyenletes eloszlású valószínűségi változó, tehát

$$f_e(e) = \begin{cases} \frac{1}{q} & -\frac{q}{2} < e \leq \frac{q}{2} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (2.367)$$

azaz a kvantálási hiba független a jeltől. Ez az ún. *elsőrendű kvantálási tétel*.

2. Abban az esetben, ha az x_1 és x_2 folytonos valószínűségi változók, melyek együttes sűrűségfüggvénye $f_{x_1, x_2}(x_1, x_2)$ sávkorlátozott $\Phi_{x_1, x_2}(s_1, s_2)$ együttes karakterisztikus függvényrel rendelkeznek, mégpedig úgy, hogy

$$\Phi_{x_1, x_2}(s_1, s_2) = 0 \text{ minden } |s_1| \geq \frac{2\pi}{q} \text{ vagy } |s_2| \geq \frac{2\pi}{q}$$

esetén, akkor az $e_1 = x_1 - x_{1q}$ és $e_2 = x_2 - x_{2q}$ hibák egyenletes együttes eloszlású valószínűségi változók, tehát

$$f_{e_1 e_2}(e_1, e_2) = \begin{cases} \frac{1}{q^2} & -\frac{q}{2} < e_1 \leq \frac{q}{2}; -\frac{q}{2} < e_2 \leq \frac{q}{2}, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (2.368)$$

Ez az ún. *másodrendű kvantálási tétel*.

Bizonyítható, hogy az első esetben elegendő azt megkívánni, hogy a

$$\Phi_x \left(\frac{2\pi n}{q} \right) = 0, \quad n \neq 0 \quad (2.369)$$

legyen, míg a második esetben ugyanez a feltétel (minden $l \neq 0$, és $k \neq 0$ mellett)

$$\Phi_{x_1, x_2} \left(\frac{2\pi l}{q}, \frac{2\pi k}{q} \right) = 0 \quad (2.370)$$

alakban írható.

A kvantálási hiba statisztikai jellemzői a fenti feltételek teljesülése esetén a (2.366) és a (2.367) összefüggések segítségével számítható, így pl. az első két momentum:

$$E\{e\} = 0; \quad E\{e^2\} = \frac{q^2}{12}. \quad (2.371)$$

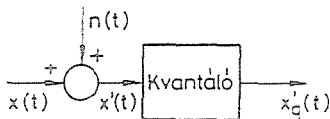
A karakterisztikus függvény fenti értelemben vett sávkorlátozottsága a gyakorlatban a legritkább esetben teljesül. Ha azonban a kvantáló x bemenőjeléhez hozzáadunk egy olyan zajt, melynek karakterisztikus függvénye kielégíti pl. a (2.366) vagy a (2.369) feltételt, akkor a kvantáló eredő bemenőjelére már teljesülnek a kvantálási tételek, tehát a kvantálás okozta hiba statisztikai jellemzőit meg tudjuk határozni, (2.39. ábra).

A gyakorlat szempontjából kitüntetett jelentőségűek a *Gauss-folyamatok*. Gauss-folyamatok esetén

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}, \quad (2.372)$$

ill.

$$\Phi_x(s) = e^{-\frac{s^2 \sigma_x^2}{2}} \quad (2.373)$$



$$\text{Pl: } f_n(n) = \begin{cases} \frac{1}{q} - \frac{q}{2} < n \leq \frac{q}{2} \\ 0 \text{ egyébként} \end{cases}$$

$$\phi_n(s) = \frac{\sin s \frac{q}{2}}{s \frac{q}{2}} = 0 \quad \text{ha } s = \frac{2\pi n}{q} \quad n \neq 0$$

$$\phi_{x'}(s) = \phi_x(s) \phi_n(s)$$

2.39. ábra. A kvantálási tétel kielégítése zaj hozzákeveréssel

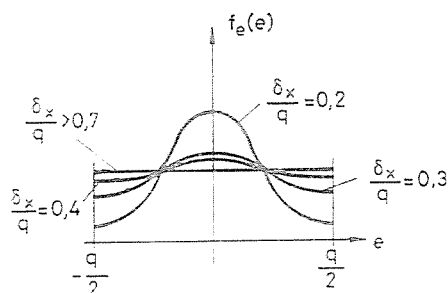
A (2.373) összefüggés alapján látható, hogy a sávkorlátozottság elvben semmilyen s mellett sem teljesül. Bizonyítható, hogy ilyenkor

$$f_e(e) = \begin{cases} \frac{1}{q} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi k e}{q}\right) e^{-\frac{2\pi^2 k^2 \delta^2}{q^2}} \right], & \text{ha } -\frac{q}{2} < e \leq \frac{q}{2} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (2.374)$$

ill.:

$$E\{e^2\} = \frac{q^2}{12} \left[1 + \frac{12}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-\frac{2\pi^2 n^2 \delta^2}{q^2}} \right]. \quad (2.375)$$

A (2.374) összefüggésből látható, hogy a $\frac{\sigma_x}{q}$ viszonytól függ az, mennyire közelíti a $f_e(e)$ eloszlásfüggvény az egyenletes eloszlást. Ezt illusztrálja a 2.40. ábra.



2.40. ábra. A kvantálási hiba eloszlásfüggvénye a $\frac{\sigma_x}{q}$ paraméter függvényében

A (2.374) és (2.375) összefüggéseket elemezve látható, hogy a kvantáló, mint nemlineáris karakterisztika hatása csak eléggé összetett kifejezések segítségével követhető nyomon, melyek a bemenőjel paramétereitől függenek.

Gauss-folyamatok kvantálásának vizsgálatakor alapvetően fontos segédeszköz a *Price-tétel*. Ennek értelmében egy $x(\xi)$ kétdimenziós Gauss-eloszlású valószínűségi változó minden olyan $g(x)$ függvényére, melyre

$$|g(x)| < a \exp(x_1^b + x_2^b) \quad a > 0, b < 2 \quad (2.376)$$

teljesül, az

$$E\{g(x_1, x_2)\}, \quad \lambda = \sigma_1 \sigma_2 r = E\{(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)\}$$

paraméter szerinti deriváltjai számíthatók a függvény alkalmas deriváltjainak várható értékei alapján az alábbiak szerint:

$$\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} E\{g(x_1, x_2)\} = E\left\{ \frac{\partial^{2n} g(x_1, x_2)}{\partial x_1^n \partial x_2^n} \right\} \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.377)$$

A (2.377) összefüggésből

$$E\{g(x_1, x_2)\} = \int_0^\lambda E\left\{ \frac{\partial^{2n} g(x_1, x_2)}{\partial x_1^n \partial x_2^n} \right\} d\lambda + C, \quad (2.378)$$

ahol C az integrálási állandó.

Ha

$$g(x_1, x_2) = x_{1q} x_{2q} = Q_1(x_1) Q_2(x_2), \quad (2.379)$$

akkor a 2.38. ábrán látható kvantáló karakterisztikát feltételezve:

$$\frac{\partial^2 [Q_1(x_1) Q_2(x_2)]}{\partial x_1 \partial x_2} = q^2 \sum_i \sum_j \delta \left(x_1 - (2i+1) \frac{q}{2} \right) \delta \left(x_2 - (2j+1) \frac{q}{2} \right). \quad (2.380)$$

Ezt behelyettesítve a (2.378) összefüggésbe:

$$E\{Q_1(x_1) Q_2(x_2)\} = q^2 \int_0^\lambda \sum_i \sum_j f_{x_1 x_2} \left((2i+1) \frac{q}{2}, (2j+1) \frac{q}{2} \right) d\lambda + C, \quad (2.381)$$

ahol $C = E\{Q_1(x_1)\} E\{Q_2(x_2)\}$.

Megjegyzés: A (2.380) alakú kifejezés tetszőleges $Q_1(x_1)$, $Q_2(x_2)$ kvantáló karakterisztika esetére is származtatható.

2.20. példa

A gyakorlatban elterjedten használják az ún. polaritás koincidencia-korrelátort. Ennél

$$Q_1(x_1) = \text{sgn}\{x_1\}; \quad Q_2(x_2) = \text{sgn}\{x_2\}. \quad (2.382)$$

Ebben az esetben $q=2$, és

$$\frac{\partial^2 [Q_1(x_1) Q_2(x_2)]}{\partial x_1 \partial x_2} = 4\delta(x_1)\delta(x_2). \quad (2.383)$$

Vagyis

$$E\{Q_1(x_1) Q_2(x_2)\} = 4 \int_0^\lambda f_{x_1 x_2}(0, 0) d\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^\lambda \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{2}{\pi} \arcsin r, \quad (2.384)$$

ahol f_{x_1, x_2} a kétdimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye, r pedig a korrelációs együttható. A (2.384) összefüggés szerint a polaritás koincidencia korrelátor alkalmas a korrelációs index becslésére

$$r = \sin \left(\frac{\pi}{2} E\{Q_1(x_1) Q_2(x_2)\} \right). \quad (2.385)$$

Egy másik, gyakran használt eszköz az ún. gyűrűmodulátoros korrelátor. Ennél

$$Q_1(x_1) = \text{sgn}\{x_1\}; \quad Q_2(x_2) = x_2. \quad (2.386)$$

Ebben az esetben $q=2$ (de csak az egyik kvantálóra), és

$$\frac{\partial^2 Q_1(x_1) Q_2(x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = 2\delta(x_1). \quad (2.387)$$

Vagyis

$$E\{Q_1(x_1) Q_2(x_2)\} = 2 \int_0^\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f_{x_1 x_2}(0, x_2) dx_2 d\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_2 r. \quad (2.388)$$

Ezek szerint a gyűrűmodulátoros korrelátor alkalmas a korrelációs index becslésére

$$r = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sigma_2} E\{Q_1(x_1)x_2\}. \quad (2.389)$$

A kvantálási tételek nagy érdeme, hogy a feltételek teljesülése esetén a kvantálási hiba statisztikai tulajdonságait a bemenőjel paramétereitől függetlenül (előre) kiszámíthatjuk. Ugyanakkor a digitális jelfeldolgozó berendezések gazdaságos realizálhatósága felveti a viszonylag durva (néhány bites) kvantálás alkalmazását, melynél az iménti tételek gyakorlati alkalmazását irreálisnak kell tekintenünk. Ezekkel az esetekkel itt nem foglalkozunk, csak arra utalunk, hogy a becslésmélet és az optimális mérési eljárásokkal kapcsolatos eredmények megfelelő alkalmazásával több amplitúdókvantálással kapcsolatos kérdést meg lehet válaszolni.

F2.1. Függelék. Valószínűségelméleti összefoglaló

A következőkben röviden áttekintjük a valószínűségelmélet legfontosabb fogalmait és tételeit elsősorban azzal a céllal, hogy a sztochasztikus folyamatok, valamint a döntés-, becslés- és szűréselméleti témakörök feldolgozását elősegítsük.

F2.1.1. Kísérlet, esemény, eseménytér, valószínűség

A valószínűségelmélet olyan kísérletek kimenetelével foglalkozik, melyek több, esetleg végtelen sokféle eredményre vezethetnek. A lehetséges kimenetek összességét (az ún. elemi események összességét) eseménytérnek nevezzük. Vannak esetek, amikor olyan eseményekkel van dolgunk, melyek több elemi esemény bekövetkezésével kapcsolatosak. Egy A esemény modellezhető úgy, mint az eseménytér (Ω) részhalmaza. A szóban forgó elemi események pedig elemei az A halmaznak. A $P(\cdot)$ valószínűség (vagy valószínűségi mérték) az eseményeket mint halmazokat leképezi a $[0, 1]$ valós intervallumra a következő axiómák által előírt módon:

$$1. P(A) \geq 0.$$

$$2. P(\Omega) = 1.$$

3. Ha a megszámlálhatóan sok elemet tartalmazó $\{A_i\}$ tetszőleges A_i és A_j elemére $A_i \cap A_j = \emptyset$, akkor $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$. ($\emptyset$ jelöli az üres halmazt, az $\{A_i\}$ halmazt pedig kölcsönösen diszjunkttnak nevezzük.)

Az események megszámlálhatóan sok elemet tartalmazó $\{A_i\}$ halmazára a fenti axiómák az alábbi fontos következményekkel járnak:

$$P(A) \leq 1, \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad \text{és} \quad P(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i P(A_i)$$

$\bar{A}$ az A esemény komplementjét jelöli.

F2.1.2. Együttes valószínűség

Az A és B esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége $P(A \cap B)$. [Szokásos jelölés még $P(AB)$.]

F2.1.3. Feltételes valószínűség

Legyen A és B két esemény. Ha olyan kísérletet végzünk, mely B eseményre vezet, érdekes lehet annak valószínűsége, hogy az A esemény ugyancsak bekövetkezett. Ezt a valószínűséget az A esemény adott B melletti feltételes valószínűségének nevezzük:

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad \text{feltéve } P(B) \neq 0.$$

($P(A | B)$ rögzített B mellett eleget tesz a valószínűségi axiómáknak. A $P(B) = 0$ eset elemzésének nincs gyakorlati jelentősége.)

F2.1.4. Függetlenség

Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ eseményeket teljesen függetleneknek nevezzük, ha

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

minden olyan páronként különböző $i_1, i_2, \dots, i_k, k$ esetére, melyeket az első n egész szám közül választottuk ki. Nem elegendő a páronkénti függetlenség, tehát pl. az A, B és C eseményekkel kapcsolatosan $P(AB) = P(A)P(B)$, $P(BC) = P(B)P(C)$ és $P(CA) = P(C)P(A)$ teljesülése esetén elképzelhető, hogy $P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C)$.

Az A és B események egy adott C eseményre vonatkoztatva feltételesen függetlenek, ha

$$P(AB | C) = P(A | C)P(B | C).$$

Ha az $A_i, i = 1, 2, \dots, n$ események páronként diszjunktak és $\bigcup_i A_i = \Omega$, akkor tetszőleges B -re:

$$P(B) = \sum_i P(B | A_i)P(A_i).$$

F2.1.5. A Bayes-tétel

Ha $P(B) \neq 0$

$$P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B)}.$$

Ha $A_i, i = 1, 2, \dots, n$ páronként diszjunktak és $\bigcup_i A_i = \Omega$ (ilyenkor ún. teljes eseményrendszert alkotnak), akkor

$$P(A_j | B) = \frac{P(B | A_j)P(A_j)}{\sum_i P(B | A_i)P(A_i)}.$$

F2.1.6. Valószínűségi változók

Egy kísérlet kimenetelével kapcsolatos mennyiségek mérésére valószínűségi változókat használunk. Pontosabban egy x valószínűségi változó egy olyan függvény, mely a $\xi \in \Omega$ eseményhez valós számokat rendel. Ha a kísérlet kimenetele ξ , akkor a hoz-

zárendelt számot $x(\xi)$ jelöli. Az x diszkrét valószínűségi változó, ha diszkrét értékeket vesz fel, folytonos valószínűségi változó, ha értéke egy folytonos értékhalmazból származik.

Szokásosan $P(x=a)$ jelöli a $P(\{\xi \mid x(\xi)=a\})$ valószínűséget. Hasonlóképpen $P(x>a)$ jelöli $P(\{\xi \mid x(\xi)>a\})$ valószínűséget stb.

Az x valószínűségi változótól megkívánt tulajdonságok:

1. $P(x \rightarrow -\infty) = P(x \rightarrow \infty) = 0$.
2. Minden valós a esetén $\{\xi \mid x(\xi) \leq a\}$ esemény, tehát $P\{\xi \mid x(\xi) \leq a\} = P(x \leq a)$ definiált.

F2.1.7. Eloszlásfüggvény

Az $x(\xi)$ valószínűségi változó F_x eloszlásfüggvénye a valószínűségi változó valós értékészletét a $[0, 1]$ intervallumra képezi le:

$$F_x(u) = P(x \leq u)$$

u az eloszlásfüggvény változója. (Nagyon gyakran ezt is x -szel jelölik, a továbbiakban itt is ezt tesszük, ha nem értelemzavaró.) Az $F_x(x)$ eloszlásfüggvény monoton növekvő és minden x pontban balról folytonos.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_x(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F_x(x) = 1.$$

F2.1.8. Sűrűségfüggvény

Gyakori eset, hogy $F_x(x)$ mindenütt differenciálható. Az x valószínűségi változó valószínűség sűrűségfüggvényét

$$f_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx}$$

alakban definiáljuk. Ezek szerint $f_x(u) du$ elsőrendben $P(u < x \leq u + du)$. (A diszkrét valószínűségi változók sűrűségfüggvényét diszkrét értéksorozat formájában írhatjuk fel.)

F2.1.9. Együttes eloszlás- és sűrűségfüggvény

Az x és y valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye:

$$F_{x,y}(u, v) = P\{(x \leq u) \cap (y \leq v)\}.$$

Ha létezik a derivált, az együttes sűrűségfüggvény:

$$f_{x,y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{x,y}(x, y).$$

Adott $F_{x,y}(x, y)$ és $f_{x,y}(x, y)$ esetén $F_x(x) = F_{x,y}(x, \infty)$ és

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x, y) dy.$$

F2.1.10. Feltételes eloszlás- és sűrűségfüggvény

Ha x és y diszkrét valószínűségi változók :

$$f_{x|y}(x_i | y_j) = P(x = x_i | y = y_j) = \frac{f_{xy}(x_i, y_j)}{f_y(y_j)}$$

Ha x folytonos valószínűségi változó és B pedig egy tetszőleges esemény, akkor

$$F_{x|B}(u) = P(x < u | B) = \frac{P\{(x \leq u) \cap B\}}{P(B)}.$$

Ha létezik a derivált, a feltételes sűrűségfüggvény :

$$f_x(x | B) = \frac{dF_{x|B}(x)}{dx}.$$

Jelölje B az y folytonos valószínűségi változóval kapcsolatos következő eseményt :

$$B = \{v < y \leq v + \Delta v\}.$$

Ha létezik $f_{x,y}(x, y)$ és $f_y(y) \neq 0$, akkor $\Delta v \rightarrow 0$ esetén

$$f_{x|y}(x | y) = \frac{f_{x,y}(x, y)}{f_y(y)},$$

az ún. feltételes valószínűség-sűrűségfüggvény. Fontos eredmény még $f_x(x)$ alábbi alakja :

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x|y}(x | y) f_y(y) dy.$$

F2.1.11. Valószínűségi vektorváltozók

Az $x_1(\xi)$, $x_2(\xi)$, ..., $x_n(\xi)$ valószínűségi változókkal képezhetünk egy n változós $\mathbf{x}(\xi)$ valószínűségi vektorváltozót. Ennek együttes eloszlás- és sűrűségfüggvénye :

$$F_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) = P\{(x_1 \leq u_1) \cap (x_2 \leq u_2) \cap \dots \cap (x_n \leq u_n)\}$$

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$$

$\mathbf{u}$ (ill. $\mathbf{x}$) az eloszlás, ill. sűrűségfüggvény változója. Az együttes sűrűségfüggvény felhasználásával tetszőleges x_i $i = 1, 2, \dots, n$ valószínűségi változó (vagy változó-kombináció) (együttes) sűrűségfüggvénye előállítható. Például az első k valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvénye :

$$f_{x_1, x_2, \dots, x_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) dx_{k+1} \dots dx_n.$$

Feltételes sűrűségfüggvények is származtathatók :

$$f_{x_1, x_2, \dots, x_k | x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n} = \frac{f_{\mathbf{x}}}{f_{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n}}.$$

F2.1.12. Valószínűségi változók függetlensége

Az x és y valószínűségi változók függetlenek, ha $\{x \leq u\}$ és $\{y \leq v\}$ események függetlenek minden u és v esetén. Ekkor

$$\begin{aligned}F_{x,y}(x, y) &= F_x(x)F_y(y), \\f_{x,y}(x, y) &= f_x(x)f_y(y), \\f_{x,y}(x | y) &= f_x(x).\end{aligned}$$

F2.1.13. Valószínűségi változó függvénye

Ha x egy folytonos valószínűségi változó és $g(\cdot)$ monoton növekvő vagy monoton csökkenő, de mindig differenciálható függvény, akkor $y = g(x)$ valószínűségi változó, mely a kísérlet ξ kimenetele esetén $y = g(x(\xi))$ értéket vesz fel. Eloszlásfüggvénye:

$$F_y(v) = P(y \leq v) = P(x \in \{x | g(x) \leq v\}).$$

Sűrűségfüggvénye:

$$f_y(y) = f_x(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|.$$

F2.1.14. Két valószínűségi változó függvénye

Ha x és y folytonos valószínűségi változó és $g(\cdot, \cdot)$ egy skalár függvény, akkor $z = g(x, y)$ valószínűségi változó, és

$$F_z(w) = P(z \leq w) = P(x, y \in D_z(w)) = \iint_{D_z(w)} f_{x,y}(x, y) \, dx \, dy,$$

ahol $D_z = \{(x, y) | g(x, y) \leq w\}$.

Ha $z = x + y$, továbbá x és y függetlenek, érvényes a konvolúciós összefüggés:

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(z-y)f_y(y) \, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)f_y(z-x) \, dx.$$

F2.1.15. Független valószínűségi változók függvényei

Ha x és y független valószínűségi változók, akkor $g(x)$ és $h(y)$ is független lesz.

F2.1.16. Várható érték, variancia

Az x valószínűségi változó $E\{x\}$ várható értékén (vagy átlagértékén) a

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf_x(x) \, dx$$

számot értjük. (Itt az integráltól megköveteljük az abszolút konvergenciát, ellenkező esetben a várható értéket nem definiáljuk.)

A variancia (σ_x^2) kifejezése:

$$E\{(x - E\{x\})^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} ((x - E\{x\})^2) f_x(x) dx = \sigma_x^2.$$

A Csebisev egyenlőtlenség:

$$P\{|x - E\{x\}| > k\} \leq \frac{\sigma_x^2}{k^2}.$$

Sokszor jól használható összefüggés: $\sigma_x^2 = E\{x^2\} - (E\{x\})^2$. A várható érték értelmezése valószínűségi vektorváltozóknál elemenként történik. A variancia helyébe a kovariancia mátrix lép:

$$\Sigma_{xx} = E\{(x - E\{x\})(x - E\{x\})^T\},$$

ahol x valószínűségi vektorváltozót jelöl. A variancia mindig nemnegatív, a kovariancia mátrix pedig nemnegatív definit, szimmetrikus mátrix.

Ha $y = g(x)$, akkor y várható értéke:

$$E\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_x(x) dx.$$

F2.1.17. A várható érték operátor tulajdonságai

A várható érték képzése lineáris operáció. Ha x_i teljesen független valószínűségi változókat jelöl, akkor

$$E\{x_1 x_2 \dots x_n\} = E\{x_1\} E\{x_2\} \dots E\{x_n\},$$

továbbá nulla átlagérték esetén

$$E\left\{\left(\sum_i x_i\right)^2\right\} = \sum_i E\{x_i^2\}.$$

F2.1.18. Momentum, centrális momentum

Az x valószínűségi változó k -adik momentuma $m_k = E\{x^k\}$, k -adik centrális momentuma pedig:

$$\eta_k = E\{(x - E\{x\})^k\}.$$

Az x és y valószínűségi változók együttes momentumai az $E\{x^k y^l\}$ számok. $E\{xy\}$ x és y korrelációja. Az együttes centrális momentumok hasonlóan képezhetők, $E\{(x - E\{x\})(y - E\{y\})\}$ x és y kovarianciája.

Ha $E\{xy\} = E\{x\}E\{y\}$, akkor az x és y valószínűségi változókat korrelálatlanoknak nevezzük, $E\{xy\} = 0$ esetén pedig ortogonálisnak. A független valószínűségi változók mindig korrelálatlanok.

F2.1.19. A karakterisztikus függvény

Az x valószínűségi változó karakterisztikus függvénye

$$\Phi_x(s) = E\{e^{jsx}\},$$

ahol $j = \sqrt{-1}$, s komplex változó $\Phi_x(\cdot)$ az $f_x(\cdot)$ sűrűségfüggvény Fourier-transzformáltja.

Ha $x_1, x_2, \dots, x_n$ n valószínűségi változó, akkor az együttes karakterisztikus függvény:

$$\Phi_x(s_1, s_2, \dots, s_n) = E\{e^{j\sum_{i=1}^n s_i x_i}\}$$

$\Phi_x(0) = 1$, továbbá $|\Phi_x(s_1, s_2, \dots, s_n)| \leq 1$ minden valós s_i esetén. $\Phi_x(s)$ ismeretében $f_x(x)$ inverz Fourier-transzformációval származtatható. A momentumok:

$$m_k = j^k \frac{d^k}{ds^k} \Phi_x(s) \big|_{s=0}$$

összefüggésből számíthatók.

x és y együttes eloszlása esetén $\Phi_{x,y}(s) = \Phi_{x,y}(s_1, 0)$. Ha függetlenek: $\Phi_{x,y}(s_1, s_2) = \Phi_x(s_1)\Phi_y(s_2)$. Ha az x_i $i = 1, 2, \dots, n$ valószínűségi változók függetlenek, továbbá $z = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, akkor

$$\Phi_z(s) = \Phi_{x_1}(s)\Phi_{x_2}(s) \dots \Phi_{x_n}(s).$$

F2.1.20. Feltételes várható érték

Egy x valószínűségi változó A esemény bekövetkezésére vonatkozó feltételes várható értéke

$$E\{x | A\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{x|A}(x | A) dx,$$

ill.

$$E\{g(x) | A\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{x|A}(x | A) dx.$$

Legyen y folytonos valószínűségi változó. Bár az $\{\xi | y(\xi) = v\}$ nulla valószínűségű esemény, $f_{x|y}(x | y)$ definíciójához hasonló módon:

$$E\{x | y = v\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{x|y}(x | v) dx,$$

ami egy v -től függő számérték. Definiálhatunk egy $E\{x | y\}$ valószínűségi változót, mely $E\{x | y(\xi) = v\}$ értéket vesz fel, ha a kísérlet kimenetele ξ és ennek megfelelően $y(\xi) = v$. Ezek szerint $E\{x | y\}$ az y valószínűségi változó függvénye: $E\{x | y = v\}$. Mivel ez is valószínűségi változó, létezik a várható értéke:

$$\{E\{E\{x | y\}\}\} = E\{x\}.$$

A feltételes várható érték képzése lineáris operáció. Ha x és y z -re vonatkoztatva feltételesen független, akkor

$$E\{xy \mid z\} = E\{x \mid z\}E\{y \mid z\}.$$

Ha x és y függetlenek, akkor $E\{x \mid y\} = E\{x\}$, ill. $E\{g(x) \mid y\} = E\{g(x)\}$ tetszőleges $g(\cdot)$ esetén.

Az $E\{g(x, y) \mid x=u\}$ kifejezés kiértékelhető

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} E\{g(x, y) \mid u < x \leq u + \Delta u\}$$

formában, azaz

$$E\{g(x, y) \mid x=u\} = E\{g(u, y) \mid x=u\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(u, y) f_{y|x}(y \mid u) dy.$$

Az $E\{g(x, y) \mid x\}$ valószínűségi változó az x valószínűségi változó függvénye. Ha $g(x, y) = g_1(x)g_2(y)$, akkor

$$E\{g(x, y) \mid x\} = g_1(x)E\{g_2(y) \mid x\}.$$

Az $E\{g(x, y) \mid x\}$ valószínűségi változó várható értéke:

$$E\{E\{g(x, y) \mid x\}\} = E\{g(x, y)\}.$$

F2.1.21. A centrális határeloszlás tétel

Ha az x_i valószínűségi változók függetlenek, akkor eléggé általános feltételek mellett az

$$y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i$ átlagú és $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ varianciájú Gauss-eloszláshoz tart, miközben $n \rightarrow \infty$. (μ_i , ill. σ_i az x_i valószínűségi változó átlagértéke, ill. szórása.)

F2.1.22. Valószínűségi változókból alkotott sorozatok konvergenciája

Legyen $x_n, n=1, 2, \dots$ valószínűségi változók egy sorozata. Azt mondjuk, hogy $x_n \rightarrow x$ mindenütt $n \rightarrow \infty$ esetén, ha $x_n(\xi) \rightarrow x(\xi)$ minden $\xi \in \Omega$ mellett. Ez a definíció általában túl szigorú. Helyette általában az alábbi definíciók valamelyikét használjuk:

D1: $x_n \rightarrow x$ 1 valószínűséggel, ha $x_n(\xi) \rightarrow x(\xi)$ majdnem minden $\xi \in \Omega$ esetén, azaz minden $\xi \in A \subset \Omega$ mellett, ahol $P(A) = 1$.

D2: $x_n \rightarrow x$ átlagos négyzetes értelemben, ha $E\{\|x_n - x\|^2\} \rightarrow 0$.

D3: $x_n \rightarrow x$ sztochasztikusan, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén $P(\|x_n - x\| > \varepsilon) \rightarrow 0$.

Következmények:

a) D1 magában foglalja D3-at,

b) D2 magában foglalja D3-at,

c) D3 teljesülése esetén van az $\{x_n\}$ sorozatnak olyan részsorozata, mely kielégíti D1-et,

d) D3 teljesülése, továbbá $|x_n| < c \ n \geq n_0$ és majdnem minden ξ esetén magában foglalja D2-t.

Bizonyos esetekben hasznos a konvergencia következő definíciója :

D4: $x_n \rightarrow x$ k -adik hatvány szerint, ha $E(\|x_n - x\|^k) \rightarrow 0$.

F2.1.23. Gauss-eloszlású valószínűségi változók

Az x valószínűségi változó normális vagy Gauss-eloszlású, ha valószínűség-sűrűség-függvénye :

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

ahol $\mu_x = E\{x\}$, $\sigma_x^2 = E\{(x - E\{x\})^2\}$.

Szokásos jelölés : az x valószínűségi változó $N(\mu_x, \sigma_x^2)$.

Ha $x \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ és $y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$, továbbá x és y függetlenek, akkor $x+y \sim N(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$.

Az $x \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye

$$\Phi_x(s) = e^{j\mu_x s - \frac{\sigma_x^2 s^2}{2}}$$

Ha x Gauss-eloszlású valószínűségi vektorváltozó, akkor valószínűség-sűrűség-függvénye

$$f_x(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{|\Sigma_{xx}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_x)^T \Sigma_{xx}^{-1}(x-\mu_x)}$$

ahol $\mu_x = E\{x\}$, $\Sigma_{xx} = E\{(x - \mu_x)(x - \mu_x)^T\}$. A karakterisztikus függvény ilyen esetben

$$\Phi_x(s) = e^{js^T \mu_x - \frac{1}{2}s^T \Sigma_{xx} s}$$

Szokásos jelölés : az x valószínűségi vektorváltozó $N(\mu_x, \Sigma_{xx})$.

Normális eloszlású valószínűségi változók együttes és feltételes eloszlásai is normálisak.

Ha $x \sim N(\mu_x, \Sigma_{xx})$ akkor az $y = Ax + b$ (A konstans mátrix, b konstans vektor) valószínűségi változó $N(A\mu_x + b, A\Sigma_{xx}A^T)$.

Ha x és y korrelálatlan normális eloszlású valószínűségi változók, akkor függetlenek is, ugyanis ilyenkor $\Phi_{x,y}(s_1, s_2) = \Phi_x(s_1)\Phi_y(s_2)$ írható, amiből az állítás következik.

Legyen x_1 egy m , x_2 egy n dimenziós Gauss-eloszlású valószínűségi változó, melyek nem feltétlenül függetlenek. Együttes viselkedésüket vizsgáljuk.

Az első két momentum :

$$E\{x\} = E\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{x1} \\ \mu_{x2} \end{bmatrix} = \mu_x,$$

$$\text{var } \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \text{var } \begin{Bmatrix} x_1 - \mu_{x_1} \\ x_2 - \mu_{x_2} \end{Bmatrix} = E \left\{ \begin{bmatrix} x_1 - \mu_{x_1} \\ x_2 - \mu_{x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \mu_{x_1} & x_2 - \mu_{x_2} \end{bmatrix} \right\} = \Sigma_{xx} = \begin{bmatrix} \Sigma_{x_1 x_2} & \Sigma_{x_1 x_2} \\ \Sigma_{x_2 x_1} & \Sigma_{x_2 x_2} \end{bmatrix}.$$

A feltételes valószínűség-sűrűségfüggvény:

$$f_{x_1|x_2}(u_1 | u_2) = \frac{f_{x_1 x_2}(u_1, u_2)}{f_{x_2}(u_2)}; \quad f_{x_2|x_1}(u_2 | u_1) = \frac{f_{x_1 x_2}(u_1, u_2)}{f_{x_1}(u_1)}.$$

Az együttes valószínűség-sűrűségfüggvény:

$$f_{x_1 x_2}(u_1, u_2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m+n}{2}} |\Sigma_{xx}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} (u - \mu_x)^T \Sigma_{xx}^{-1} (u - \mu_x) \right].$$

A vetületi valószínűség-sűrűségfüggvény:

$$f_{x_2}(u_2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma_{x_2 x_2}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} (u_2 - \mu_{x_2})^T \Sigma_{x_2 x_2}^{-1} (u_2 - \mu_{x_2}) \right],$$

$$f_{x_1}(u_1) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} |\Sigma_{x_1 x_1}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} (u_1 - \mu_{x_1})^T \Sigma_{x_1 x_1}^{-1} (u_1 - \mu_{x_1}) \right].$$

Az első két feltételes momentum:

$$E\{x_1 | x_2\} = \mu_{x_1} + \Sigma_{x_1 x_2} \Sigma_{x_2 x_2}^{-1} (x_2 - \mu_{x_2}),$$

$$\text{var } \{x_1 | x_2\} = \Sigma_{x_1 x_1} - \Sigma_{x_1 x_2} \Sigma_{x_2 x_2}^{-1} \Sigma_{x_2 x_1},$$

$$E\{x_2 | x_1\} = \mu_{x_2} + \Sigma_{x_2 x_1} \Sigma_{x_1 x_1}^{-1} (x_1 - \mu_{x_1}),$$

$$\text{var } \{x_2 | x_1\} = \Sigma_{x_2 x_2} - \Sigma_{x_2 x_1} \Sigma_{x_1 x_1}^{-1} \Sigma_{x_1 x_2},$$

melyek felhasználásával felírhatjuk a feltételes valószínűség-sűrűség, ill. eloszlásfüggvényeket.

Fontos sajátosság, hogy a feltételes várható érték Gauss-eloszlású vektorváltozók esetén lineáris:

$$E\{x_1 | x_2\} = a + A x_2$$

az a, ill. A nem függ x_2 -től.

Sokszor felhasznált tulajdonság, hogy az

$$\tilde{x}_1 = x_1 - E\{x_1 | x_2\}$$

valószínűségi vektorváltozó x_1 és x_2 Gauss-eloszlása esetén független x_2 -től.

F2.2. Függelék. Mátrixelméleti összefoglaló

A következőkben röviden áttekintjük a mátrixelmélet néhány alapvető fogalmát és tételét, elsősorban azokat, melyekre a méréselméleti témakörök feldolgozásánál szükség van.

F2.2.1. Mátrixok és vektorok

Mátrixnak az $\{a_{ij}; i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n\}$ elemek alábbi elrendezését nevezzük:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij}).$$

Vektornak egy olyan mátrixot nevezünk, melynek m sora és egy oszlopa van:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

F2.2.2. Mátrixok összeadása, kivonása, konstanssal való szorzása

Ha az A és B mátrixok mérete azonos $m \times n$, akkor tetszőleges k_1 és k_2 skálár mellett értelmezzük a

$$C = k_1 A + k_2 B$$

műveletet, mégpedig tagonként, tehát

$$c_{ij} = k_1 a_{ij} + k_2 b_{ij} \quad \forall i, j.$$

Az összeadás kommutatív.

F2.2.3. Mátrixok szorzása

Ha az A mátrix mérete $m \times p$, a B mátrixé pedig $p \times n$, akkor A és B összeszorozható. A $C = AB$ szorzatmátrix $m \times n$ méretű.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}, \quad \forall i, j.$$

A mátrixszorzás asszociatív, tehát:

$$D = ABC = (AB)C = A(BC).$$

A szorzás azonban nem kommutatív, általában

$$AB \neq BA.$$

Az I egységmátrix kvadratikus mátrix ($p \times p$), a főátlóban egyesek vannak, a főátlón kívüli pedig nullákból áll.

$$AI = A, \quad IA = A.$$

Az $(n \times n)$ méretű A kvadratikus mátrix determinánsát $|A|$ jelöli. Az A mátrix első sora szerint kifejtve:

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - \dots$$

Teljesül a

$$|A| \cdot |B| = |AB|$$

egyenlőség.

F2.2.4. Mátrix transzponáltja

Az $(m \times n)$ méretű A mátrix transzponáltja A^T , egy $n \times m$ méretű mátrix:

$$B = A^T; \quad b_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j.$$

Fontos tulajdonságok:

$$\begin{aligned} (AB)^T &= B^T A^T, \\ (ABC)^T &= C^T B^T A^T, \\ (A+B)^T &= A^T + B^T. \end{aligned}$$

F2.2.5. Szinguláris mátrix

Az $(n \times n)$ méretű A mátrix szinguláris, ha $|A| = 0$. Egyébként nem szinguláris.

F2.2.6. A mátrix rangja

Az $(m \times n)$ méretű A mátrix q rangját annak a nonszinguláris kvadratikus mátrixnak a $(q \times q)$ mérete határozza meg, melyet az A mátrixból alkalmas $(m-q)$ sor és $(n-q)$ oszlop törlésével kapunk úgy, hogy a $(q+1) \times (q+1)$ méretű részmátrixok mind szingulárisak. Például az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix valamennyi 2×2 -es részmátrixa szinguláris, ezért rangja 1. A mátrix rangja megegyezik a lineárisan független sorok maximális számával és a lineárisan független oszlopok maximális számával.

Fontos tulajdonságok :

- AB rangja $\leq \min [A \text{ rangja}, B \text{ rangja}]$.
- Egy n -edrendű ($n \times n$ -es) kvadratikus mátrix akkor és csak akkor nem szinguláris, ha rangja n .

F2.2.7. Nemszinguláris, kvadratikus mátrix inverze

Legyen A kvadratikus mátrix. Ha A nemszinguláris, akkor és csak akkor létezik egy egyértelmű B mátrix úgy, hogy

$$BA = AB = I.$$

A $B = A^{-1}$ mátrixot az A mátrix (multiplikatív) inverzének nevezzük.

Fontos tulajdonságok :

- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.
- Ha A_1 és A_2 n -edrendű nemszinguláris mátrixok, akkor $(A_1 A_2)^{-1} = A_2^{-1} A_1^{-1}$.

F2.2.8. Kvadratikus mátrixok hatványai

Az A kvadratikus mátrix m -edik hatványát ($m > 0$ egész) az $AA \dots A$ alakú m tényezősszorzattal definiáljuk.

Negatív m esetén, pl. $m = -n$ -re ($n > 0$) $A^m = (A^{-1})^n$. A definícióból következik, hogy tetszőleges p és q egészre $A^p A^q = A^{p+q}$ és $(A^p)^q = A^{pq}$.

Az A mátrix polinomja a $p(A) = \sum_{i=0}^n a_i A^i$ alakú kifejezés, ahol $\{a_i\}$ $i=0, 1, \dots, n$

konstans. Ugyanazon A mátrix két polinomjára teljesül, hogy $p(A)q(A) = q(A)p(A)$ továbbá $p(A)q^{-1}(A) = q^{-1}(A)p(A)$.

F2.2.9. Kvadratikus mátrix exponenciális függvénye

Az A kvadratikus mátrixhoz rendeljük hozzá az

$$I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$$

sorozatot. Ez konvergálni fog elemenként, mégpedig az exponenciális értékhez. A mátrixsorozat határértékét ennek megfelelően e^A -val jelöljük. A rendszerelméletben gyakran előfordul az

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \dots$$

mátrix. Ennek fontos tulajdonsága, hogy $p(A)e^{At} = e^{At}p(A)$, és $e^{-At} = [e^{At}]^{-1}$.

Megjegyzés: Az A kvadratikus mátrix egyéb függvényeit az exponenciális függvényhez hasonlóan definiáljuk.

F2.2.10. Differenciálás és integrálás

Ha az A mátrix függvénye a t skalár változónak abban az értelemben, hogy a mátrix minden eleme függvénye a t -nek, akkor

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{da_{ij}}{dt} \right).$$

A definíció következménye, hogy

$$\frac{d}{dt}(AB) = \frac{dA}{dt} B + A \frac{dB}{dt}.$$

Az e^{At} definíciójából következik, hogy idő-invariáns A mátrix esetén

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At} = e^{At}A.$$

Az integrálás hasonlóan, elemenként értelmezett:

$$\int A dt = \left(\int a_{ij} dt \right).$$

Ha Φ egy x vektor skalár függvénye, akkor $\frac{d\Phi}{dx}$ egy olyan vektort jelöl, melynek i -edik eleme $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$.

Ha Φ egy A mátrix skalár függvénye, akkor $\frac{d\Phi}{dA}$ egy olyan mátrixot jelöl, melynek (i, j) indexű eleme $\frac{\partial \Phi}{\partial a_{ij}}$.

Ha y egy x vektor függvénye, akkor $\frac{dy}{dx}$ egy olyan mátrixot jelöl, melynek (i, j) indexű eleme $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$.

F2.2.11. Kvadratikus mátrix sajátértékei és sajátvektorai

Az A kvadratikus mátrix $|sI - A|$ karakterisztikus polinomjának λ_i gyökei az A mátrix sajátértékei. Ha λ_i sajátérték, akkor létezik legalább egy olyan x vektor, melyre

$$Ax = \lambda_i x.$$

Az ilyen tulajdonságú vektor a mátrix ún. sajátvektora. Ha a sajátértékek egyszeres gyökök, akkor hozzájuk rendre egy sajátvektor-készlet tartozik, melyek elemei csak egy állandó (nullától különböző) szorzóban különböznek egymástól. Többszörös gyökök esetén több sajátvektor is tartozhat egy sajátértékhez, melyek azonban nem egy állandó szorzóban különböznek egymástól.

Ha a λ_i sajátérték valós, akkor a hozzá tartozó sajátvektor is valós, ha viszont λ_i komplex, akkor a hozzá tartozó sajátvektor is komplex lesz.

Ha az A mátrix minden a_{ij} eleme nulla minden $i \neq j$ esetben, akkor az A mátrixot diagonál mátrixnak nevezzük.

A diagonál mátrix főátlójában szereplő elemek az A mátrix sajátértékeivel egyeznek.

Egy tetszőleges A mátrix determinánsa és sajátértékei között

$$|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

összefüggés áll fenn. Ha az A mátrix szinguláris, akkor legalább egy sajátértéke nulla. Az A mátrix $r(A)$ racionális függvényének sajátértékei az $r(\lambda_i)$ számok, ahol λ_i az A mátrix sajátértékeit jelöli. Az e^{At} sajátértékei $e^{\lambda_i t}$ lesznek.

F2.12. A kvadratikus mátrix nyoma

$$\text{tr } [A] = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

ahol λ_i az A mátrix sajátértékeit jelöli. További tulajdonságok:

$$\text{tr } [A + B] = \text{tr } [B + A] = \text{tr } [A] + \text{tr } [B],$$

$$\text{tr } [AB] = \text{tr } [B^T A^T] = \text{tr } [BA] = \text{tr } [A^T B^T],$$

$$\text{tr } [A^T A] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2.$$

F2.13. Ortogonális és szimmetrikus mátrixok

Ha az A kvadratikus mátrix olyan, hogy $AA^T = I$ és ennek megfelelően $A^T A = I$, akkor ortogonálisnak nevezzük. Ilyenkor a sajátértékek abszolút értéke egy.

Ha $A = A^T$, akkor szimmetrikusnak nevezzük. A szimmetrikus mátrix jellemzője, hogy sajátértékei valósak, továbbá ha x_1 a λ_1 -hez tartozó, x_2 pedig a λ_2 -höz tartozó sajátvektor, akkor $\lambda_1 \neq \lambda_2$ esetén $x_1^T x_2 = 0$. Ebben az esetben az x_1 és x_2 vektorokat ortogonálisoknak nevezzük. Ha $A = -A^T$, akkor ferdén szimmetrikusnak nevezzük. Ilyenkor az A mátrix sajátértékei tisztán képzetesek.

F2.14. A Cayley—Hamilton-tétel

Az A kvadratikus mátrix karakterisztikus polinomja:

$$|sI - A| = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n.$$

Ezt kielégíti az A mátrix, tehát

$$A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_n I = 0.$$

Ebből következik, hogy A^m tetszőleges $m > n$ esetén kifejezhető az $I, A, \dots, A^{n-1}$ mátrixok lineáris kombinációjával.

F2.2.15. Kvadratikus mátrix minimál polinomja

Az A kvadratikus mátrix minimál polinomja egy olyan minimális fokszámú $m(\)$ polinom, melyre $m(A) = 0$. Az $m(\)$ polinom osztója minden olyan $p(\)$ polinomnak, melyre $p(A) = 0$. Így módon osztója a karakterisztikus polinomnak is.

F2.2.16. Mátrix diagonalizálás, mátrixok hasonlósága

Legyen A és B két n -edrendű kvadratikus mátrix. Az A és B mátrixot hasonlónak mondjuk, ha létezik egy olyan T nonszinguláris n -edrendű kvadratikus mátrix, hogy

$$B = T^{-1}AT.$$

A hasonlóság ekvivalencia reláció, tehát

1. Az A mátrix hasonló önmagához.
2. Ha az A mátrix hasonló B -hez, akkor B hasonló A -hoz.
3. Ha A hasonló B -hez és B hasonló C -hez, akkor A hasonló C -hez.

A T hasonlósági transzformáció hatására a sajátértékek változatlanok maradnak, ugyanis

$$sI - B = T^{-1}sIT - T^{-1}AT = T^{-1}(sI - A)T$$

és

$$|sI - B| = |T^{-1}||sI - A||T| = |sI - A||T^{-1}||T| = |sI - A|.$$

Ha egy adott A mátrixhoz található olyan T , hogy

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

diagonál mátrix, akkor az A mátrixot diagonalizálhatónak nevezzük, a Λ főátlójában levő elemek az A mátrix sajátértékei a T mátrix oszlopai pedig az A mátrix sajátvektorai. A és T egyaránt lehet komplex.

Nem diagonalizálható valamennyi kvadratikus mátrix. Ha a mátrixnak nincsen többszörös sajátértéke, akkor diagonalizálható. Ellenkező esetben akkor és csak akkor diagonalizálható, ha a minimál polinomnak nincsen többszörös gyöke. Akkor is diagonalizálható a mátrix, ha ortogonális, vagy ha szimmetrikus, ill. ferdén szimmetrikus.

F2.2.17. Pozitív definit és pozitív szemidefinit mátrixok

Az A n -edrendű szimmetrikus mátrixot pozitív definitnek nevezzük, ha minden nullától különböző x esetén az $x^T A x$ mennyiség pozitív. Ha az $x^T A x$ mennyiség minden nullától különböző x -re nem negatív, akkor az A mátrixot pozitív szemidefinitnek nevezzük. Az $x^T A x$ kifejezést kvadratikus formának nevezzük, mivel felírható

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

Egy szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix akkor és csak akkor pozitív definit, ha sajátértékei pozitívak. A pozitív szemidefinit mátrixok esetén a sajátértékek nemnegatívak lesznek.

Ha $\mathbf{D}$ egy $n \times n$ -es mátrix, akkor az $\mathbf{A} = \mathbf{D} \mathbf{D}^T$ pozitív szemidefinit, és akkor és csak akkor lesz pozitív definit, ha a $\mathbf{D}$ mátrix rangja n . Ez könnyen belátható, ugyanis az $\mathbf{y} = \mathbf{D}^T \mathbf{x}$ jelölés felhasználásával az $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{D} \mathbf{D}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} = \sum y_i^2 \geq 0$. Az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\mathbf{y} = \mathbf{D}^T \mathbf{x} = 0$, ami nem nulla $\mathbf{x}$ esetén csak akkor képzelhető el, ha $\mathbf{D}$ rangja kisebb n -nél. A $\mathbf{D}$ mátrixot $\mathbf{A}$ négyzetgyökének nevezzük.

Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ pozitív szemidefinit mátrixok, akkor $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ugyancsak pozitív szemidefinit. Ha legalább az egyik pozitív definit, akkor $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ugyancsak pozitív definit.

F2.2.18. Vektorok és mátrixok normája

Az $\mathbf{x}$ vektor hosszúságát (méretét) az $\|\mathbf{x}\|$ normával jellemezzük. A normát többféleképpen definiálhatjuk, de minden esetben be kell tartani a következő feltételeket:

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ minden $\mathbf{x}$ -re, és $\|\mathbf{x}\| = 0$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{x} = 0$.
2. $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$ tetszőleg α skalár és minden $\mathbf{x}$ esetén.
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ minden $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ mellett.

Ha $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, akkor az $\|\mathbf{x}\|$ szokásos alternatív definíciói:

$$\|\mathbf{x}\| = \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \|\mathbf{x}\| = \max_i x_i \quad \text{és} \quad \|\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

A Schwarz-féle egyenlőtlenség értelmében $|\mathbf{x}^T \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ tetszőleges $\mathbf{x}$ mellett, és egyenlőség csak $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{y}$ esetén áll fenn, ahol α tetszőleges skalár.

Az $m \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrix normáját következőképpen definiáljuk:

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A} \mathbf{x}\|$$

A fenti három norma esetén az $\mathbf{A}$ mátrix normája

$$[\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})]^{\frac{1}{2}}, \quad \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right), \quad \text{ill.} \quad \max_j \left(\sum_{i=1}^m |a_{ij}| \right).$$

A mátrix normák fontos tulajdonságai:

$$\|\mathbf{A} \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|, \quad \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|, \quad \|\mathbf{A} \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|.$$

F2.2.19. Unitér és hermitikus mátrixok

Az $\mathbf{A}$ komplex mátrix unitér, ha $\mathbf{A} \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^* \mathbf{A} = \mathbf{I}$. ($\mathbf{A}^*$ komplex konjugált transzponáltat jelent.) Az $\mathbf{A}$ komplex mátrix hermitikus, ha $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$, és férdén hermitikus, ha $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^*$. Azok a mátrixok, melyek ezen tulajdonságok valamelyikével rendelkeznek, unitér mátrix felhasználásával diagonalizálhatók. A hermitikus mátrixok valamennyi sajátértéke valós.

F2.2.20. Néhány gyakran előforduló mátrix differenciálegyenlet

A rendszerelméletben gyakran előforduló differenciálegyenlet:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t); \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

ahol $\mathbf{A}$ egy $n \times n$ -es mátrix, $\mathbf{x}$ pedig egy n elemű vektor. Ha $\mathbf{A}$ konstans, akkor a megoldás

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}_0.$$

Ha $\mathbf{A}$ nem konstans, akkor a megoldás a

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t); \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{I}$$

differenciálegyenlet megoldása révén nyerhető. Ez a megoldás általában analitikusan nem származtatható. Ismeretes azonban, hogy a megoldás

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}_0$$

alakú, ahol $\Phi(t, t_0)$ az ún. (állapot) átmeneti mátrix. Ennek a mátrixnak fontos tulajdonsága, hogy

$$\Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}, \quad \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_2, t_0)$$

és

$$\Phi(t, t_0)\Phi(t_0, t) = \mathbf{I}.$$

Ugyancsak fontos eset ezen differenciálegyenlet inhomogén változata:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t); \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Ennek megoldása:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau.$$

Ugyancsak gyakran előfordul a

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{C}(t); \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$$

alakú differenciálegyenlet. Konstans $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ esetén a megoldás

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{X}_0 e^{\mathbf{B}(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{C}(\tau) e^{\mathbf{B}(t-\tau)} d\tau.$$

F2.2.21. Mátrix függvény kiszámítása

Az $\mathbf{A}$ mátrix $f(\mathbf{A})$ függvényének kiszámításánál kedvező lehet a következő azonosság:

$$\mathbf{T}^{-1}f(\mathbf{A})\mathbf{T} = f(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}),$$

ugyanis, ha A diagonalizálható, akkor T választható úgy, hogy $T^{-1}AT$ diagonális. $f(T^{-1}AT)$ kiszámítása ilyen esetben nagyon egyszerű, és a keresett $f(A)$ ezek után $If(T^{-1}AT)T^{-1}$ összefüggéssel adott.

F2.2.22. Mátrix inverziós lemma

$$(A + BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}.$$

F2.3. Függelék. A jelterek felépítése

A következőkben a 2.3. szakasz kiegészítéseként áttekintjük a jelterek felépítésével kapcsolatos matematikai vonatkozásokat.

F2.3.1. Metrikus terek

Az X teret metrikus térnek nevezzük, ha az $x, y \in X$ elempárhoz hozzárendelt $d(x, y) \rightarrow R$ leképezés (általánosított távolság) a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (szimmetria).
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (háromszög-egyenlőtlenség) $x, y, z \in X$.

Ugyanabban az X térben különböző távolságfogalmak definiálhatók. Mindegyik távolságfogalom meghatároz egy (a többitől különböző) metrikus teret.

Az általánosított távolságfogalom felhasználásával fogalmazhatjuk meg a *konvergencia* metrikus térbeni fogalmát.

Az $\{x_n; x_n \in X, n = 1, 2, \dots\}$ sorozatot konvergensnek nevezzük, ha létezik olyan $x \in X$, amelyhez tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett megadható egy n_0 pozitív egész szám úgy, hogy

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Gyakori jelölés:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

A konvergenciatulajdonságok vizsgálatakor fontos szerephez jutnak az un. *Cauchy-sorozatok*. A *Cauchy-sorozatok* azzal jellemezhetők, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett van olyan n_0 pozitív egész szám, hogy $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ valahányszor $m, n \geq n_0$. A háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával belátható, hogy minden konvergens sorozat egyben *Cauchy-sorozat* is. A *Cauchy-sorozatok* azonban nem feltétlenül konvergensek minden metrikus térben, egyszerűen azért, mert elképzelhető, hogy az az elem, amihez tartanak, kívül esik az X halmazon. Azokat a metrikus tereket, melyekben minden *Cauchy-sorozat* konvergens, *teljes* metrikus tereknek nevezzük.

A konvergencia mellett fontos további fogalom a *folytonosság*. Metrikus terekben a folytonosság egy, a szokásosnál általánosabb fogalmát használjuk, ugyanis itt a folytonosság szempontjából vizsgált f függvény rendszerint egy (X, d_1) metrikus teret egy másik, pl. (X, d_2) metrikus térbe képez le. Azt mondjuk, hogy az f függvény folytonos az x_0 pontban, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén található olyan $\delta > 0$, hogy

$$d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(y, y_0) < \varepsilon \quad x \in X, \quad y \in Y,$$

ahol $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$.

Ha a függvény az értelmezési tartományának minden pontjában folytonosnak bizonyul, akkor az f függvény folytonos leképezést valósít meg.

A metrikus terek felépítésénél fontos tulajdonság még a szeparabilitás. Az (X, d) metrikus teret *szeparábilisnek* nevezzük, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett tudunk olyan (megszámlálhatóan sok elemet tartalmazó) sorozatot találni $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ -ben, melyre $d(x, x_i) < \varepsilon$ néhány i és minden $x \in X$ esetén. Ez azt jelenti, hogy ebben a megszámlálhatóan sok elemet tartalmazó sorozatban a (szeparábilis) metrikus tér minden eleméhez találunk tetszőlegesen közel eső, sorozatbeli elemet, azaz a teret le tudjuk írni megszámlálhatóan sok elem (koordináta) segítségével.

F2.3.2. Lineáris terek

Lineáris térnek nevezzük azokat a (jel-) halmazokat, melynek elemei a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

A) A halmaz tetszőleges x, y elempárjához hozzárendelhető egy $x + y$ elem, mely ugyancsak eleme a halmaznak, továbbá:

1. $x + y = y + x$ (kommutativitás)
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (asszociativitás)
3. létezik 0 elem, mégpedig úgy, hogy minden x elemre: $x + 0 = x$
4. Minden x elemhez rendelhető egy $-x$ elem, mellyel $x + (-x) = 0$

B) Értelmezett a skalárral való szorzás, úgy, hogy minden α skálárhoz és x elemhez létezik egy αx elem, mely ugyancsak eleme a térnek.

A skalárral történő szorzás tulajdonságai:

1. $\alpha(\beta x) = \alpha\beta x$ (asszociativitás)
2. $1x = x$ és $0x = 0$ minden x elemre
3. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (disztributivitás)
4. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (disztributivitás)

Attól függően, hogy a skalárok valósak vagy komplexek, valós vagy komplex lineáris térrel van dolgunk. A lineáris tér n elemének súlyozott összegét az n elem *lineáris kombinációjának* nevezzük:

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

Belátható, hogy a fenti n elem összes lehetséges lineáris kombinációja ugyancsak lineáris teret alkot. Ha kivesszük az n elemből $m \leq n$ elemet és ezek összes lehetséges lineáris kombinációját tekintjük, akkor a lineáris tér egy ún. *lineáris alterét* írjuk le. Kitüntetett szerepet játszanak azok az $\{x_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ halmazok, melyekre a

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$$

egyenlőség csak akkor teljesül, ha valamennyi α_i nulla. Ilyenkor a lineáris tér ezen elemeit *lineárisan függetleneknek* nevezzük. A lineárisan független elemekből álló halmazok egyetlen eleme sem fejezhető ki a többi halmazelem lineáris kombinációjá-

ként. Jelölje M az n lineárisan független $\{x_i; i=1, 2, \dots, n\}$ elem (vektor) által kifeszített teret. Mivel az M tér valamennyi elemét egyértelműen kifejezhetjük az $\{x_i\}$ vektorok lineáris kombinációjával, az M teret n -dimenziós *lineáris térnek* nevezzük. Az x_i halmazt M *bázisának* nevezzük, és azt mondjuk, hogy ez a bázis „kifeszíti” az M teret. Az M tér bázisaként valamennyi n lineárisan független elemet tartalmazó M -beli halmaz megfelelő.

Az X lineáris tér egy M alterének eltolásával az ún. *affin alteret* kapjuk:

$$V = x_0 + M.$$

A sík esetében az M altér egy origón átmenő egyenes, míg a V affin altér egy ezzel párhuzamos „általános egyenes”. Ezek szerint az M altér felfogható az origón átmenő egyenes, a V affin altér pedig az általános egyenes általánosításaként. Érdekes megjegyezni, hogy V csak elfajuló esetben tartalmazza az origót.

F2.3.3. Normált lineáris terek

A metrikus tereket definiáló távolságfogalom és a lineáris terekben értelmezett algebrai fogalmak összekapcsolása oly módon valósítható meg, hogy definiáljuk a lineáris térben valamennyi elemre annak „mértétét”, az ún. normáját. Az x vektor $\|x\|$ normája a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. $\|x\| \geq 0$ és $\|x\| = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = 0$,
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

Ezeket a tulajdonságokat összevetve a metrikus térnél rögzített tulajdonságokkal belátható, hogy a

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

definícióval metrikus térhez jutunk. Általában erre a távolságfogalomra gondolunk, ha a normált lineáris teret metrikus térként vizsgáljuk.

A normált lineáris terek egy fontos osztálya a *Banach-tér*, mely mint metrikus tér teljes, azaz minden *Cauchy*-sorozat konvergens benne.

F2.3.4. Belsőszorzat-terek

Az x lineáris tér x, y elempárjához (vektorpárjához) rendelt (x, y) komplex számot belső szorzatnak (vagy skalárszorzatnak) nevezzük, ha eleget tesz a következő feltételeknek:

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$,
2. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$,
3. $(x, x) \geq 0$ és $(x, x) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = 0$.

Az 1. és 2. tulajdonság következménye $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ és $(x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y)$.

A belső szorzat definíciójának fontos következménye, hogy az

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$$

választás megfelelő normát eredményez. Ez a norma tulajdonságaiból kiindulva igazolható, egyedül a háromszög-egyenlőtlenség kíván külön magyarázatot.

A belsőszorzat-terekkel kapcsolatosan gyakran használjuk a *Schwarz-féle egyenlőtlenséget*:

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y).$$

Az egyenlőtlenség igaz volta könnyen belátható, mert a

$$0 \leq (x + \alpha y, x + \alpha y) = (x, x) + \alpha(y, x) + \bar{\alpha}(x, y) + |\alpha|^2(y, y)$$

egyenlőtlenségben $\alpha = -\frac{(x, y)}{(y, y)}$ helyettesítéssel $(x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \geq 0$, amiből az állítás következik.

Visszatérve a háromszög-egyenlőtlenségre:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Tehát

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

azaz a háromszög-egyenlőtlenség is teljesül.

F2.3.5. Hilbert-terek

Azokat a belsőszorzat-tereket, melyek teljesek is, tehát rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy bennük minden *Cauchy*-sorozat konvergens, *Hilbert*-tereknek nevezzük.

F2.3.6. A Gram—Schmidt ortonormalizálási eljárás

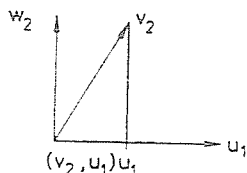
Az eljárás egy számítástechnikailag igen kedvező módszert ad ortonormált bázis-rendszer létrehozásához.

Induljunk ki az M tér n lineárison független $\{v_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ vektorából. Az $\{u_i\}$ ortonormált bázist a következő összefüggésekből olvashatjuk ki:

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1, \\ w_2 &= v_2 - (v_2, u_1)u_1, \\ w_3 &= v_3 - (v_3, u_2)u_2 - (v_3, u_1)u_1, \\ &\vdots \\ w_i &= v_i - \sum_{k=1}^{i-1} (v_i, u_k)u_k, \\ &\vdots \end{aligned}$$

ahol $u_i = \frac{w_i}{\|w_i\|}$; $i = 1, 2, \dots, n$.

Az eljárás lényege a szám n -esekből felépített lineáris vektorterekre gondolva egyszerűen illusztrálható, hiszen ebben az esetben a belső szorzat a lineáris vektortérben értelmezett skalárszorzat, ami merőleges vetítést jelent. Az F2.3.1. ábra az eljárás két dimenzióban ábrázolható lépését mutatja be.



F2.3.1. ábra. A Gram—Schmidt-eljárás

F2.3.7. Lineáris funkcionálok

Az X komplex lineáris tér $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ leképezését lineáris funkcionálnak nevezzük, ha

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

tetszőleges, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ és $x, y \in X$ esetén. Ha X belsőszorzat-tér, akkor

$$f_\varphi(x) = (x, \varphi)$$

lineáris funkcionál. Ha ráadásul $\|\varphi\| < K$, azaz korlátos, akkor $f_\varphi(x)$ folytonos. Ez a Schwarz-egyenlőtlenség felhasználásával bizonyítható:

$$|f_\varphi(x) - f_\varphi(x_0)| = |(x - x_0, \varphi)| \leq \|x - x_0\| \|\varphi\| < K \|x - x_0\|$$

tetszőleges $x_0 \in X$ -re.

Ha X Hilbert-tér (tehát teljes is), akkor minden folytonos lineáris funkcionál kifejezhető a fenti belső szorzat alakban, és minden folytonos lineáris funkcionálhoz egyértelműen hozzárendelhető egy őt generáló $\varphi \in X$ vektor.

Az x lineáris tér felett értelmezett funkcionálok ugyancsak lineáris teret alkotnak, ugyanis

1. Vektor összeadás és skalárral való szorzás pontonként történik, tehát:

$$f = \alpha f_1 + \beta f_2 \Rightarrow f(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) \quad \forall x \in X.$$

2. A tér normálható pl. a következő definíciók valamelyike alapján:

$$\|f\| = \sup \{|f(x)|; \|x\| \leq 1, x \in X\},$$

ill.

$$\|f\| = \inf \{K; |f(x)| \leq K \|x\|, x \in X\}.$$

Ha a funkcionál normája korlátos, akkor a funkcionált korlátosnak nevezzük.

A korlátos funkcionálok folytonosak, mert $|f(x) - f(x_0)| = |f(x - x_0)| \leq \|f\| \|x - x_0\|$, és mivel x_0 független $\|f\|$ -től. Ugyanakkor a folytonos lineáris funkcionálok korlátosak, mivel az origó környezetében a folytonosság alapján

$$\|x\| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon \Rightarrow |f(y)| < \frac{2\varepsilon}{\delta}, \|y\| < 2$$

írható. Ezek szerint lineáris funkcionálokra a korlátosság és a folytonosság ekvivalensek.

Az $f_\varphi(x) = (x, \varphi)$ összefüggéssel felírt lineáris funkcionálok normája a fentiek értelmében:

$$\|f_\varphi\| = \|\varphi\|.$$

Ha csak a *Hilbert*-terekre szorítkozunk, akkor a lineáris funkcionálok tere is egy *Hilbert*-tér, mely nagyon szoros kapcsolatban áll az X térrel. Erre a szoros kapcsolatra való tekintettel ezt a *Hilbert*-teret $\bar{X}$ konjugált térnek nevezzük. Tudjuk, hogy a két tér között egy egyértelmű megfeleltetés van:

$$f_\varphi \in \bar{X} \Leftrightarrow \varphi \in X, \quad \text{továbbá} \quad f_{\bar{\alpha}\varphi} = \bar{\alpha}f_\varphi.$$

Mindezek alapján igazolható, hogy

$$(f_\varphi, f_\psi) = (\overline{\varphi}, \psi) = (\psi, \varphi)$$

alkalmas definíció az $\bar{X}$ -beli belső szorzatra, és az ennek felhasználásával konstruálható $\|f_\varphi\| = (f_\varphi, f_\varphi)^{1/2} = \|\varphi\|$ ugyanaz, mint a fentiek szerinti.

Az X és $\bar{X}$ *Hilbert*-terek fentiekben vázolt szoros kapcsolata alapján belátható, hogy, ha $\{u_i\}$ az X tér egy bázisa, és ennek a bázisnak $\{v_i\}$ a reciproka, akkor $\{f_{v_i}\}$ az $\bar{X}$ tér bázisa, és f kifejezhető

$$f = \sum_i f(u_i) f_{v_i}$$

alakban.

3. Mérési eljárások tervezése

A mérőeszközök a mérési eredményt a bemenetükre kerülő jelek feldolgozásával állítják elő. Az információfeldolgozás módjának, azaz a mérőeszköz információátviteli karakterisztikájának specifikációja a mérési eljárás. A mérési eljárás tervezése tehát a mérőeszközök tervezésének azt a szakaszát jelenti, ami a mérési feladatból indul ki és az információátviteli karakterisztika specifikálásával zárul.

Annak megfelelően, hogy számos modelltípus és ehhez kapcsolódóan számos mérési feladat képzelhető el, a mérési eljárások tervezési módszerei is rendkívül sokfélék. E tervezési módszerek közül mind általánosságában, mind széles gyakorlati alkalmazhatóságában kiemelkedik a becslés- és döntéselmélet apparátusa, továbbá a determinisztikus és sztochasztikus szélsőérték kereső eljárások néhány típusa, ezért a tárgyalást alapvetően ezekre a témákra szűkítettük. A fejezet célkitűzése az alapvető kérdésfeltevések és a különböző témakörök kapcsolatának bemutatása, első-sorban a diszkrét idejű, parametrikus mérési eljárások tervezése kapcsán, ami kiindulási alapul szolgálhat az egyes részterületek további, mélyebb tanulmányozásához.

A 3.1. szakaszban bevezetőként megvizsgáljuk a mérési eljárások elemeit, az optimumkritériumok megválasztásának szempontjait, röviden áttekintjük a mérési eljárások tárgyalta típusait.

A 3.2. szakasz a mérési eljárások tervezésének alapját képező becslések és döntések általános jellemzőit foglalja össze.

A 3.3. szakasz a *Bayes*-becslések alapelvét ismerteti, bemutatja a különféle *Bayes*-becslések származtatását, azok tulajdonságait, ismerteti a nemrekurzív és a rekurzív eljárásokat.

A 3.4. szakasz a maximum likelihood becslés fogalmát, származtatását, tulajdonságait adja meg. Foglalkozik a maximum likelihood becslés és a *Bayes*-becslések kapcsolatával.

A 3.5. szakasz a legkisebb négyzetes hibát biztosító becslésekkel foglalkozik, áttekintve a nemrekurzív és a rekurzív megvalósítás módszereit. Megmutatja a legkisebb négyzetes hibájú becslések és a *Bayes*-, valamint a maximum likelihood becslések kapcsolatait.

A 3.6. szakasz néhány determinisztikus és sztochasztikus szélsőérték kereső eljárást mutat be, melyek részben ismert hibafüggvények esetén alkalmazható konvergencia mérési eljárásokat adnak.

A 3.7. szakasz a döntéelmélet alapjait foglalja össze. Az alapvető döntési eljárások — Bayes-döntés, minimax döntés, Neyman—Pearson-döntés — származtatásán kívül röviden megadja az egyes eljárások főbb jellemzőit és egymással való kapcsolataikat.

A fejezet egyáltalán nem foglalkozik a specifikált mérési eljárások implementálásának, tehát a jelfeldolgozásnak a problémáival. Ezekre a kérdésekre a könyv 5. és 24. fejezeteiben találunk utalásokat.

3.1. Bevezetés

A mérési eljárás a bemenetére érkező z megfigyeléseket valamilyen

$$\hat{\alpha} = g(z)$$

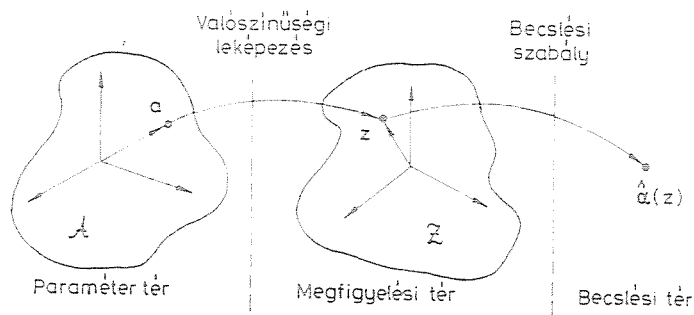
összefüggés szerint feldolgozza, és előállítja az a mérendő paramétervektor $\hat{\alpha}$ becslését. Mint az 1. fejezetben láttuk, a mérési eljárást — azaz a $g(\cdot)$ leképezést — úgy kell megtervezni, hogy az $\hat{\alpha}$ paramétervektorral rögzített $M(\hat{\alpha})$ modell valamilyen hasonlósági kritérium értelmében legjobban hasonlítson az $M(\alpha)$ ideális modellhez. Mielőtt rátérnénk a tervezési módszerek tárgyalására, összefoglaljuk a mérési eljárások alapelemeit, az alkalmazott hasonlósági kritériumokat és a mérési eljárások típusait.

3.1.1. A mérési eljárások alapelemei

A mérési folyamat leképezések sorozatának tekinthető. Ha a mérés eredménye folytonos — egy tartományban tetszőleges érték lehet — a mérési eljárás tervezésében a becslélmélet apparátusa, míg diszkrét esetben — amikor megszámlálható különböző eredmény lehetséges — a döntéelmélet apparátusa alkalmazható.

Így tehát, mikor a mérendő jellemző az a folytonos értékű paramétervektor, a mérési folyamatot a 3.1. ábra szerinti leképezésekre célszerű felbontani.

A mérendő rendszeren végzett megfigyelések a paramétertér ($\mathcal{A}$) és a megfigyelési tér ($\mathcal{Z}$) közötti leképezéssel jönnek létre. A leképezés tulajdonságait a rendszer és a megfigyelések közötti jelátviteli csatorna jellemzői szabják meg. A zajos jelát-

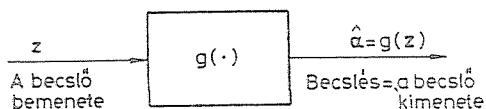


3.1. ábra. A becslési eljárás leképezései

viteli csatornát valószínűségi (sztochasztikus) leképezéssel modellezhetjük. A vizsgált rendszer paramétereit úgy tekinthetjük, mint a paramétertér egy-egy elemét. A paramétertér jellemzésénél két esetet kell megkülönböztetnünk, mely megkülönböztetés a kialakított mérési eljárást is befolyásolja. A keresett a paraméter lehet valószínűségi változó, melynek statisztikai jellemzőit pl. sűrűségfüggvényét, $f_a(a)$, ismerjük, ill. lehet ismeretlen értékű, de nem véletlen mennyiség. A két eset közötti különbséget a mérési eljárás származtatásánál az a priori ismeret képviseli. A paraméterekre vonatkozó megfigyelés a valószínűségi leképezésen keresztül nyerhető.

A megfigyelések képezik a megfigyelési tér elemeit. A megfigyelési tér elemeihez a becsléseket a *becslési eljárás* vagy *becslő* rendeli hozzá. Ez az az algoritmus, amely a megfigyelések alapján a *becslési* eredményezi, a konkrét megfigyeléseket felhasználva a keresett paraméterhez értéket (becslést) rendel.

A becslő vagy becslési eljárás tehát egy olyan fizikai rendszer (a mérőeszköz) matematikai modellje, aminek bemenetére a megfigyelés kerül, kimenetén pedig a megfigyeléshez tartozó becslés nyerhető, (3.2. ábra).



3.2. ábra. A becslő mint fizikai rendszer

Ha az $\hat{a}$ becslést a z zajos megfigyelések alapján kapjuk, az $\hat{a} = g(z)$ becslés valószínűségi változó, függetlenül attól, hogy a mérendő mennyiség (a paraméter) valószínűségi változó vagy sem.

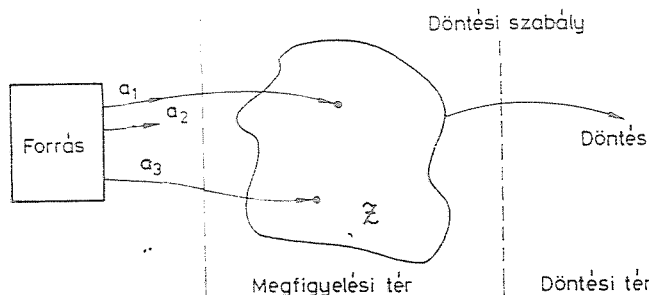
A *döntési eljárás* folyamatában (3.3. ábra) az előzőekkel analóg elemeket találunk.

A rendszeren végzett megfigyelések eredményeit itt is a megfigyelési tér elemei reprezentálják, melyek az általában ugyancsak zajos csatorna következtében valószínűségi leképezés útján nyerhetők.

A valószínűségi leképezés tárgya azonban a paramétertér folytonos elemkészlete helyett egy forrás megszámlálható (diszkrét) kimenete. A forrás egyes kimenetei a vizsgált rendszer adott jellemzőjének (paraméter, állapot stb.) lehetséges, diszkrét értékeihez tartoznak. A megfigyelési tér elemeihez a *döntési tér* elemeit a *döntési szabály* rendeli hozzá.

Döntéseknél a kiinduló forrástér és a végső döntési tér megszámlálható, diszkrét elemet tartalmaz, szemben a becslési problémával, ahol általában a forrástér és a becslések tere is folytonos.

E különbség következménye, hogy a döntési és a becslési feladatok megoldásában a nagymértékű elvi hasonlóság ellenére eltérések vannak.



3.3. ábra. A döntési eljárás leképezései

3.1.2. Hasonlósági kritériumok

A mérési feladat megoldásakor a mérendő rendszer ideális modelljéhez minél inkább hasonló modellt szeretnénk nyerni. Mint az 1.3.2. pontban láttuk, ezt a hasonlóságot egy alkalmas hasonlósági kritérium bevezetésével fejezzük ki, ami a

$$C = C[M(a), M(\alpha)] \quad (3.1)$$

skalár értékű függvény.

A hasonlósági kritérium konkrét alakja a mérési feladat jellegétől, az a priori ismeretektől és bizonyos mértékig szubjektív tényezőktől is függ. Mivel a kritérium megválasztása jelentősen befolyásolhatja a mérési eljárás tulajdonságait és származtatásának módszerét, lényeges áttekintnünk alapvető típusait.

A kritérium alakját az $M(a)$ ideális modell a paramétervektorára, azaz a mérendő jellemzőkre vonatkozó információ megjelenési módja határozza meg, hiszen a kritériumnak az ideális modelltől vett eltérést kell kifejeznie.

A mérendő jellemzőre vonatkozó információtipusok következők lehetnek:

- a mérendő objektumon végzett megfigyelés konkrét eredménye z (adott u beemeneti gerjesztés mellett, ha ez értelmezhető);

- a mérendő jellemző és a megfigyelések közötti sztochasztikus és determinisztikus leképezés ismerete [ezt az $f_{z|a}(z | a)$ feltételes valószínűség-sűrűségfüggvény, az ún. csatornarakterisztika fejezi ki folytonos esetben];

- a mérendő jellemzőre vonatkozó a priori ismeret [ami az $f_a(a)$ valószínűség-sűrűségfüggvénnyel írható le ugyancsak folytonos esetet feltételezve].

Ha mindhárom információtípus rendelkezésre áll, akkor a hasonlósági kritérium vonatkozhat közvetlenül a mérendő jellemzőkre. Ekkor ugyanis megadható az a paramétervektor a posteriori valószínűségeloszlása adott z megfigyelések mellett, (lásd 3.3. szakasz), amiből meghatározható az adott megfigyelések mellett maximális valószínűségű vagy legkisebb átlagos hibájú modell. A hasonlósági kritérium egy konkrét alakja lehet pl. a

$$C(\alpha) = \varepsilon_2(\alpha) = E\{(a - \alpha)^T (a - \alpha)\} \quad (3.2)$$

átlagos négyzetes hiba.

Ha nincs a priori ismeretünk a mérendő jellemzőről, akkor az $f_{z|a}(z | a)$ sűrűségfüggvény lehet hasonlósági kritérium, hiszen segítségével megkereshető az az α paramétervektor, ami mellett az aktuális z megfigyelések a legvalószínűbbek (lásd 3.4. szakasz).

Abban az esetben pedig, ha csak a z megfigyelések állnak rendelkezésre, a hasonlósági kritériumot az adott u gerjesztés mellett megfigyelt adatok és az $M(\alpha)$ modellnek azonos gerjesztésre adott z_M válasza közötti eltérés segítségével definiálhatjuk, (lásd 3.5. szakasz). Egy konkrét eset a négyzetes hibakritérium, mikor

$$C(\alpha) = \varepsilon_2(\alpha) = [z - z_M(\alpha)]^T [z - z_M(\alpha)]. \quad (3.3)$$

Ennek α szerinti minimuma az optimális becslés. A fejezet további részeiben a hasonlósági kritériumoknak, így az optimumkritériumoknak csak néhány típusa, elsősorban a négyzetes kritérium kerül tárgyalásra. Ennek oka, hogy a négyzetes kritérium mellett az optimumfeladatok megoldása matematikai szempontból többnyire kedvező, másrészt a négyzetes hibának a hibateljesítmény vagy hibaenergia révén fizikai értelmezés adható. Természetesen számos más optimumkritérium is használható a mérési eljárások tervezésénél (abszolút hiba, kölcsönös információ stb.), amik alkalmazása a mérési feladat természetéből adódóan indokolt lehet.

3.1.3. A becslési és döntési eljárások rövid áttekintése

A becslési és a döntési eljárások igen sokfélék lehetnek. Kialakításukat befolyásolja a felhasznált a priori ismeret, az alkalmazott optimumkritérium, a mérendő rendszeren végzett megfigyelések száma és felhasználási módja, stb. Így az egyes eljárások különféle szempontok szerint rendszerezhetők, hozhatók egymással kapcsolatba. A felhasznált a priori ismeretek és a hibakritérium meghatározóak a becslési és döntési eljárások származtatásában, valamint tulajdonságaik meghatározásában.

Mint az előző pontban láttuk, a lehetséges a priori ismeretek a mérendő rendszerre (annak ismeretlen mennyiségére), ill. a megfigyelési zaj jellemzőire vonatkozhatnak. Így pl. ismert lehet a keresett paraméter a priori valószínűség-sűrűségfüggvénye $f_a(a)$, ill. döntési feladatoknál a lehetséges értékek bekövetkezésének a priori valószínűségei, $P_a(a_i)$; a megfigyelési zaj sűrűségfüggvénye, $f_n(n)$, ami a megfigyelések feltételes sűrűségfüggvényét is megadja $f_{z|a}(z | a)$, de az a priori ismeretekhez sorolhatjuk az optimumkritériumot is.

A későbbiekben tárgyalt mérési eljárások egy nagy csoportjánál az a priori ismeretek lehetővé teszik az optimumkritérium analitikus felírását és az optimalás elvégzését, aminek eredményeként megkapjuk a becslési, döntési eljárásokat specifikáló konkrét összefüggéseket.

Becslési eljárásoknál a legtöbb a priori ismeret a *Bayes*-becslő származtatásához szükséges, majd egyre csökkenő ismeretek birtokában juthatunk el a maximum likelihood és a legkisebb négyzetes hibájú becslőkhöz.

Döntési feladatoknál ugyancsak lehetséges az a priori ismeretek mennyisége szerinti rendszerezés. A becslési eljárásokhoz hasonlóan így származtathatók a *Bayes*-, a minimax, a maximum likelihood és a *Neyman—Pearson*-döntések.

A felsorolt becslési és döntési alaptípusokon belül még további altípusok definiálhatók az optimumkritérium és az a priori ismeretek konkrét alakja szerint, ilyenek a minimális varianciájú, legkisebb átlagos négyzetes hibájú, *Gauss—Markov*, legkisebb négyzetes hibájú lineáris, stb. becslések, amiket részletesen tárgyalni fogunk.

A mérési eljárások egy másik jelentős csoportjánál nem ismert az optimumkritérium analitikus alakja, így csak részben ismert hibafüggvény mellett kell annak minimumát megkeresni. Ilyenkor a mérési eljárások a determinisztikus gyök hely keresési módszerekre és a sztochasztikus approximációra épülnek, amik ily módon a legkevesebb a priori ismeretet igénylő mérési eljárásoknak tekinthetők.

A fejezetben a mérési eljárásokat a csökkenő a priori ismeretek sorrendjében tárgyaljuk, és rendre bemutatjuk, hogy mi a kapcsolat az egyes származtatott eljárások között.

3.2. A becslések és döntések minősítése

A mérési feladatok megoldásakor, a mérési eredmények kiértékeléséhez szükséges, hogy a megfelelő becslési vagy döntési eljárások tulajdonságait, jellemzőit ismerjük, értelmeznünk tudjuk.

Láttuk, hogy a becslések és a döntések sztochasztikus jellegűek, minősítésükre ezért statisztikai jellemzők szolgálhatnak.

A következőkben bevezetjük a becslések és a döntések minősítésére szolgáló fogalmakat, és e fogalmak segítségével összefoglaljuk a becslések és döntések legfontosabb tulajdonságait.

3.2.1. A becslések és döntések jellemzői

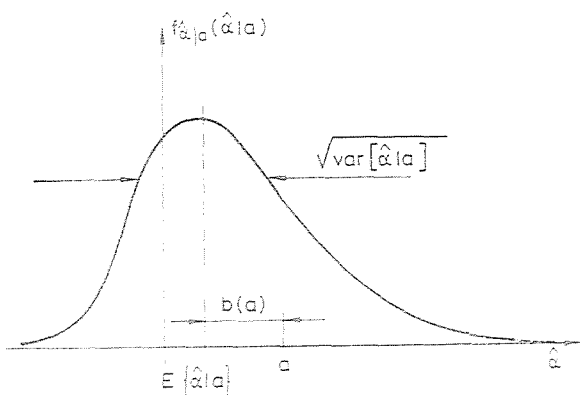
A becslések és döntések minősítésére a nagymértékű elvi hasonlóság ellenére eltérő jellemzők megadása szükséges.

Döntési eljárásoknál a kapott döntés lehet helyes vagy helytelen. A döntési eljárás minősítésére a hibás döntések valószínűsége alkalmas. Becslési problémáknál a helyzet bonyolultabb. A becslési folyamatokat úgy jellemeztük, hogy ezek többlépéses sztochasztikus leképzést valósítanak meg a keresett jellemző (a) és a becslés ($\hat{a}$) között.

Mint láttuk az $\hat{a}$ becslés a sztochasztikus leképzés miatt minden esetben valószínűségi változó, függetlenül attól, hogy az a mérendő jellemző valószínűségi változó-e vagy sem.

A becslés jellemzésére ezen $\hat{a}$ valószínűségi változó statisztikai leírása szolgál, a becslés „jóságára” ezért $\hat{a}$ -nak a rögzített a mellett érvényes eloszlás- vagy sűrűségfüggvénye jellemző.

Az $f_{\hat{a}|a}(\hat{a} | a)$ feltételes sűrűségfüggvény adott a esetén a különböző megfigyelésekhez rendelt $\hat{a}$ becslések lehetséges tartományát és ezen tartományon belüli eloszlását adja meg. Egydimenziós esetben ilyen sűrűségfüggvényre mutat egy lehetséges példát a 3.4. ábra.



3.4. ábra. A becslés torzítása és varianciája

Sűrűségfüggvény eredményként való megadása azonban — különösen többdimenziós esetben — meglehetősen nehézkes, az eredmény felhasználása bonyolult, ezért a sűrűségfüggvény helyett célszerűbb az $\hat{a}$ valószínűségi változó néhány jellemzőjét tekinteni a „jóság” mértékének. Ilyen jellemzők lehetnek az $E\{\hat{a} | a\}$ feltételes várható érték és a $\text{cov}[\hat{a}, \hat{a} | a]$ feltételes kovariancia.

Nyilvánvaló, hogy azt tekintjük „jó” becslésnek, ha az $E\{\hat{a} | a\}$ feltételes várható érték megegyezik a -val, vagy minél közelebb van hozzá, és ahol a becslés feltételes kovarianciamátrixa, $\text{cov}[\hat{a}, \hat{a} | a]$ minél kisebb. Ez egydimenziós esetben azt jelenti, hogy a feltételes variancia — $\text{var}[\hat{a} | a]$ — értéke, többdimenziós esetben pedig a kovarianciamátrix főátlóbeli elemeinek értéke legyen kicsi, ahol a főátlóbeli elemek a becslés komponenseinek varianciáját adják meg.

$\hat{a}$ tehát „jó” becslés, ha sűrűségfüggvénye minél inkább a szűk környezetben csúcsosodik, vagyis az $\hat{a}$ becslések lehetséges tartománya kicsi és e tartomány a közelében van, lehetőleg tartalmazza is a -t.

A becslés minősítésére tehát az

$$E\{\hat{\alpha} | a\} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\alpha} f_{\hat{\alpha}|a}(\hat{\alpha} | a) d\hat{\alpha} \quad (3.4)$$

feltételes várható értéket és a

$$\text{cov} [\hat{\alpha}, \hat{\alpha} | a] = E\{(\hat{\alpha} - E\{\hat{\alpha} | a\})(\hat{\alpha} - E\{\hat{\alpha} | a\})^T | a\} \quad (3.5)$$

feltételes kovarianciamátrixot használhatjuk.

A feltételes várható érték ismeretében definiálható a feltételes torzítás, ami azt mondja meg, hogy $\hat{\alpha}$ feltételes várható értéke mennyire tér el a mérendő paramétertől, vagyis:

$$b(a) = E\{\hat{\alpha} | a\} - a. \quad (3.6)$$

Az $\hat{\alpha}$ becslés és a tényleges a érték hasonlóságára szokás alkalmazni még a becslés átlagos négyzetes hibáját (MSE):

$$MSE_{\hat{\alpha}|a} = E\{(\hat{\alpha} - a)(\hat{\alpha} - a)^T | a\}, \quad (3.7)$$

amely az előző jellemzőkkel, a becslés feltételes kovarianciamátrixával és a feltételes torzítással kifejezhető:

$$MSE_{\hat{\alpha}|a} = \text{cov} [\hat{\alpha}, \hat{\alpha} | a] + b(a)b^T(a). \quad (3.8)$$

Az átlagos négyzetes hiba tehát csak akkor lesz kicsi, ha mind a torzítás, mind a variancia (kovarianciamátrix) — amely a hiba „véletlen” komponensének tekinthető — kis értékű.

Olyan becslési eljárásoknál, mikor ismert az $f_a(a)$ valószínűség-sűrűségfüggvény, definiálható a feltétel nélküli várható érték:

$$E\{\hat{\alpha}\} = E_a\{E\{\hat{\alpha} | a\}\}, \quad (3.9)$$

és a feltétel nélküli kovarianciamátrix is:

$$\text{cov} [\hat{\alpha}, \hat{\alpha}] = E_a\{\text{cov} [\hat{\alpha}, \hat{\alpha} | a]\}. \quad (3.10)$$

Az eddigiek alapján a becslések alábbi tulajdonságait definiáljuk:

Torzítatlanság

A becslés feltételesen torzítatlan, ha

$$E\{\hat{\alpha} | a\} = a. \quad (3.11)$$

A feltétel nélküli torzítatlanság is megadható ennek mintájára:

$$E\{\hat{\alpha}\} = E_a\{E\{\hat{\alpha} | a\}\} = E\{a\}. \quad (3.12)$$

Nyilvánvaló, hogy bármely feltételesen torzítatlan becslés egyben feltétel nélkül is torzítatlan, viszont fordítva ez nem szükségszerűen igaz.

Torzított becslésnél, amennyiben a torzítás a -nak nem függvénye, vagyis $b(a) = b$, a becslés a torzítással korrigálható és így torzítatlanná tehető. Ha a torzítás a függvénye, ez a korrekció nem végezhető el, mivel a torzítás az ismeretlen paramétertől is függ.

Hatásosság

A becslés hatásossága az átlagos négyzetes hiba nagyságával van összefüggésben. A hatásosság kritériuma külön definiálható torzítatlan és torzított becslőkre, ahol a torzítást értelmezhetjük feltételesen vagy feltétel nélkül. Általánosságban azt mondhatjuk, hogy egy becslő hatásosabb, mint egy másik, ha átlagos négyzetes hibája kisebb. Torzítatlan becsléseknél az átlagos négyzetes hiba (MSE) és a variancia (vagy kovarianciamátrix) megegyezik. Így pl. az egydimenziós, feltételesen (v. feltétel nélkül) torzítatlan $\hat{a}$ becslés hatásosabb, mint $\hat{\gamma}$, ha

$$\text{var} [\hat{a} | a] < \text{var} [\hat{\gamma} | a]$$

ill.

$$\text{var} [\hat{a}] < \text{var} [\hat{\gamma}],$$

(3.13)

ahol $\hat{\gamma}$ szintén valamilyen feltételesen (v. feltétel nélkül) torzítatlan becslés.

Többdimenziós esetben torzítatlan becsléseknél a hatásosság vizsgálata a kovarianciamátrixok segítségével lehetséges.

Ha pl. a

$$\text{cov} [\hat{\alpha}, \hat{\alpha} | a] = E\{(\hat{\alpha} - a)(\hat{\alpha} - a)^T | a\} < E\{(\hat{\gamma} - a)(\hat{\gamma} - a)^T | a\} = \text{cov} [\hat{\gamma}, \hat{\gamma} | a] \quad (3.14)$$

feltétel teljesül, akkor az $\hat{\alpha}$ feltételesen torzítatlan becslés a-nak hatásosabb becslése, mint $\hat{\gamma}$, amely szintén a feltételesen torzítatlan becslése.

A (3.14) feltétel egyenértékű azzal, hogy a

$$\text{cov} [\hat{\gamma}, \hat{\gamma} | a] - \text{cov} [\hat{\alpha}, \hat{\alpha} | a]$$

különbség mátrix nemnegatív definit.

A hatásosság vizsgálatánál komoly jelentősége van, hogy a becslők adott osztályára megadható az átlagos négyzetes eltérés (v. torzítatlan esetben a variancia) alsó korlátja. Amennyiben egy becslő átlagos négyzetes hibája (varianciája) a megfelelő osztályban érvényes alsó korlátot eléri, a becslőt hatásosnak mondjuk. Különböző becslési osztályokra vonatkozó alsó korlátokkal a 3.2.2. pont foglalkozik.

Elégségesség

Az $\hat{\alpha}$ becslés elégséges, ha bármely egyéb $\hat{\gamma}$ becslés esetére igaz, hogy:

$$f_{\hat{\gamma}|\hat{\alpha},a}(\hat{\gamma} | \hat{\alpha}, a) = f_{\hat{\gamma}|\hat{\alpha}}(\hat{\gamma} | \hat{\alpha}), \quad (3.15)$$

ami azt jelenti, hogy az $\hat{\alpha}$ becslés minden lényeges információt tartalmaz a-ról, így a-nak tetszőleges $\hat{\gamma}$ becslése csupán $\hat{\alpha}$ ismeretében is meghozható.

Megjegyzés: Az elégséges becslés fogalmának definiálásakor meg kell említeni az elégséges statisztika fogalmát is. Statisztikának nevezzük valamely adatok (valószínűségi változó egyes realizációi) adott függvényét (ilyen statisztika lehet pl. az adatok egyszerű vagy súlyozott átlaga stb.). Tulajdonképpen a becslő is statisztikát képez a bemenetére kerülő adatokból (megfigyelésekből). Minthogy a statisztika az eredeti adatok valamilyen függvénye, általában kevésbé „informatív” mint az eredeti adatok, így például a statisztikából képezett becslés várhatóan kevésbé lesz pontos („jó”), mintha a kiinduló adatokból képeznénk.

Elégségesnek akkor nevezünk egy statisztikát, ha adott célra — pl. egy becslés vagy döntés meghozatalához — a bemenő adatok által hordozott minden lényeges információt tartalmaz. Az elégséges becslés tehát egyben elégséges statisztika is.

Aszimptotikus tulajdonságok

Szekvenciális eljárásoknál, ahol lépésenként, a megfigyelések számát növelve nyerjük a becslést, definiálhatók az aszimptotikus tulajdonságok, melyek $k \rightarrow \infty$ esetre vonatkoznak. Sok esetben fontos az is, hogy a becslések tulajdonságait a megfigyelések számának függvényében ismerjük.

Az aszimptotikus tulajdonságok definiálásához vezessük be az $\hat{\alpha}(k)$ jelölést, amely a -nak k megfigyelés felhasználásával meghatározott becslését jelenti.

Aszimptotikus torzítatlanság

Az $\hat{\alpha}(k)$ becslés aszimptotikusan torzítatlan, ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E\{\hat{\alpha}(k) \mid a\} = a. \quad (3.16)$$

Konzisztencia

Az $\hat{\alpha}(k)$ becslés konzisztens, ha k növelésével valamilyen értelemben konvergál a valódi értékhez.

Az alkalmazott konvergencia fogalomtól függően beszélhetünk: sztochasztikus konzisztenciáról, ha:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P\{|\hat{\alpha}(k) - a| > \varepsilon\} = 0 \quad (3.17)$$

tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett.

Egységnyi valószínűségi konzisztenciáról, ha:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P\{|\hat{\alpha}(k) - a| = 0\} = 1, \quad (3.18)$$

vagy átlagos négyzetes konzisztenciáról, ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E\{[\hat{\alpha}(k) - a][\hat{\alpha}(k) - a]^T \mid a\} = 0. \quad (3.19)$$

Aszimptotikus hatásosság

Ha a hatásosság feltétele csak $k \rightarrow \infty$ esetén teljesül, a becslés aszimptotikusan hatásos.

Aszimptotikusan normális eloszlású becslés

Amennyiben $\hat{\alpha}(k)$ eloszlása $k \rightarrow \infty$ mellett normális eloszláshoz tart, akkor a becslés aszimptotikusan normális eloszlású.

Az aszimptotikus tulajdonságok vizsgálatának fontosságát a szekvenciális eljárásoktól függetlenül az is indokolja, hogy a kedvező tulajdonságokkal, mint pl. torzítatlanság, minimális variancia, hatásosság stb. a becsléseknek csak meglehetősen szűk köre rendelkezik, míg ugyanezen tulajdonságok aszimptotikus esetben, vagyis, ha a megfigyelésszámot minden határon túl növeljük, az esetek nagy részében fennállnak.

3.2.2. Az átlagos négyzetes hiba alsó korlátja, Cramer—Rao-egyenlőtlenségek

Láttuk, hogy a becslők minősítésének egyik legfontosabb kritériuma az átlagos négyzetes eltérés. Bizonyítható, hogy adott általános feltételek teljesülése esetén az átlagos négyzetes eltérés soha nem csökkenhet egy pozitív korlát alá, ahol e korlát csak a mérendő paraméter és a megfigyelések $f_{z,a}(z, a)$ együttes sűrűségfüggvényétől és a $b(a)$ torzítástól függ. Torzítatlan becslőknél az alsó korlát a becslő varianciájára vonatkozik.

Az alsó korlátot definiáló összefüggéseket Cramer—Rao-egyenlőtlenségeknek szokás nevezni.

Az egyenlőtlenségeket előbb egydimenziós esetre vizsgáljuk, majd utalunk a többdimenziós esetre vonatkozó általánosításra.

Tetszőleges a valós változóra vonatkozó bármely torzítatlan becslés varianciájára az alábbi alsó korlát adható:

$$\text{var} [\hat{a} - a | a] \cong \left(E \left\{ \left[\frac{\partial \ln f_{z|a}(z | a)}{\partial a} \right]^2 \right\} \right)^{-1}. \quad (3.20)$$

Ezzel ekvivalens a következő megadás:

$$\text{var} [\hat{a} - a | a] \cong \left[-E \left\{ \frac{\partial^2 \ln f_{z|a}(z | a)}{\partial a^2} \right\} \right]^{-1}. \quad (3.21)$$

Ha a becslés torzított a Cramer—Rao-egyenlőtlenség a következőre adódik:

$$E\{(\hat{a} - a)^2 | a\} \cong \left[-1 + \frac{db(a)}{da} \right] \left[E \left\{ \frac{\partial^2 \ln f_{z|a}(z | a)}{\partial a^2} \right\} \right]^{-1} \quad (3.22)$$

amelynek szintén létezik (3.20)-szal analóg ekvivalens formája.

Torzított becslőknél azonban a Cramer—Rao-egyenlőtlenség alkalmazása meg lehetőségen korlátozott, mivel a torzításfüggvényt általában nem ismerjük.

A megadott korlátok létezéséhez szükséges, hogy

$$\frac{\partial \ln f_{z|a}(z | a)}{\partial a} \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2 \ln f_{z|a}(z | a)}{\partial a^2}$$

létezzenek és abszolút integrálhatók legyenek.

Az előző egyenlőtlenségek feltételes átlagos négyzetes eltérésre, ill. feltételes varianciára vonatkoznak. Amennyiben ismert a mérendő paraméter $f_a(a)$ a priori sűrűségfüggvénye, alsó korlát feltétel nélküli esetre is adható, amely torzított becslőkre akkor is alkalmazható, ha a torzításfüggvényt pontosan nem ismerjük. Az egyenlőtlenség ugyanis a következő:

$$E\{(\hat{a} - a)^2\} \cong \left(E \left\{ \left[\frac{\partial \ln f_{z,a}(z, a)}{\partial a} \right]^2 \right\} \right)^{-1}, \quad (3.23)$$

vagy az ezzel ekvivalens alak:

$$E\{(\hat{a} - a)^2\} = \left[-E \left\{ \frac{\partial^2 \ln f_{z,a}(z, a)}{\partial a^2} \right\} \right]^{-1}. \quad (3.24)$$

Ezek létezéséhez

$$\frac{\partial \ln f_{z,a}(z, a)}{\partial a} \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2 \ln f_{z,a}(z, a)}{\partial a^2}$$

létezése és mind a , mind z szerinti abszolút integrálhatósága szükséges, továbbá a $b(a)$ torzításfüggvénynek ki kell elégítenie a :

$$\lim_{a \rightarrow \pm\infty} b(a)f_a(a)=0 \quad (3.25)$$

összefüggést. Ez utóbbi nyilván nem jelent szigorú feltételt, hiszen $f_a(a) \pm \infty$ -ben zérus, így a (3.25) feltétel ellenőrzéséhez nem szükséges a torzításfüggvény pontos ismerete.

Az eddigi egyenlőtlenségek közül csak az alkalmazásokban talán legfontosabb (3.20)-at igazoljuk, a többi igazolása ennek analógiájára könnyen elvégezhető.

Az igazolás a *Schwartz*-egyenlőtlenség alkalmazásával lehetséges. Mivel a becslés torzítatlan $b(a)=0$, vagyis :

$$E\{(\hat{a}-a) \mid a\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{z \mid a}(z \mid a)[\hat{a}(z)-a] dz = 0. \quad (3.26)$$

A kifejezést deriválva, majd az integrálás és a differenciálás sorrendjét felcserélve kapjuk a következő összefüggést :

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f_{z \mid a}(z \mid a) dz + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_{z \mid a}(z \mid a)}{\partial a} [\hat{a}(z)-a] dz = 0 \quad (3.27)$$

Az első tag egy sűrűségfüggvény integrálja, ezért értéke pontosan $+1$. Felhasználva, hogy

$$\frac{\partial f_{z \mid a}(z \mid a)}{\partial a} = \frac{\partial \ln f_{z \mid a}(z \mid a)}{\partial a} f_{z \mid a}(z \mid a) \quad (3.28)$$

a következő összefüggést nyerjük :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln f_{z \mid a}(z \mid a)}{\partial a} f_{z \mid a}(z \mid a)[\hat{a}(z)-a] dz = 1. \quad (3.29)$$

Az integrandust két függvény szorzataként felírva :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial \ln f_{z \mid a}(z \mid a)}{\partial a} [f_{z \mid a}(z \mid a)]^{\frac{1}{2}} \right\} \left\{ [f_{z \mid a}(z \mid a)]^{\frac{1}{2}} [\hat{a}(z)-a] \right\} dz = 1, \quad (3.30)$$

majd a *Schwartz*-egyenlőtlenséget alkalmazva :

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \ln f_{z \mid a}(z \mid a)}{\partial a} \right]^2 f_{z \mid a}(z \mid a) dz \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{a}(z)-a]^2 f_{z \mid a}(z \mid a) dz \right\} \geq 1. \quad (3.31)$$

Az egyenlőség akkor és csak akkor igaz, ha

$$\frac{\partial \ln f_{z \mid a}(z \mid a)}{\partial a} = [\hat{a}(z)-a]k(a). \quad (3.32)$$

Látható, hogy (3.31) bal oldalán levő kifejezések a (3.20)-ban szereplő várható értékeket adják meg. Így

$$E\{\hat{a}(z) - a\}^2 | a\} \cong \left[E \left\{ \left(\frac{\partial \ln f_{z|a}(z | a)}{\partial a} \right)^2 \right\} \right]^{-1}. \quad (3.33)$$

Az egyenlőtlenség másik alakja is egyszerűen belátható, ennek bemutatásától azonban itt eltekintünk.

Megjegyzések:

1. A megadott egyenlőtlenségek azt a lényeges tényt fejezik ki, hogy megfelelő feltételek fennállta esetén létezik az átlagos négyzetes hibának (MSE) alsó korlátja, így hiábavaló lenne ennél kisebb MSE elérésére törekedni.

2. Lényeges továbbá, hogy ezen alsó korlátok elérhetők, és ennek feltételei is megfogalmazhatók. Az alsó korlát eléréséhez az $f_{z|a}(z | a)$, ill. az $f_{z,a}(z, a)$ sűrűségfüggvényeknek kell bizonyos feltételeket kielégíteniük. A feltételes átlagos négyzetes hibára vonatkozó esetekben [(3.20), (3.22) összefüggések] a (3.32) összefüggésnek kell fennállnia, vagyis:

$$\frac{\partial \ln f_{z|a}(z | a)}{\partial a} = [\hat{a}(z) - a]k(a), \quad (3.34)$$

ahol $k(a)$ csak a mérendő paramétertől függő konstans.

A feltétel nélküli átlagos négyzetes hibára vonatkozó (3.23) és (3.24) összefüggésekben az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\frac{\partial \ln f_{z,a}(z, a)}{\partial a} = -k[\hat{a}(z) - a] \quad (3.35)$$

minden z -re és minden a -ra, ahol k nem lehet függvénye a -nak.

Amennyiben egy becslésnél az MSE az alsó korlátot eléri, a becslést hatásosnak nevezzük. A hatásosság feltételeit tehát (3.34) és (3.35) adja meg.

Gauss $f_{z|a}(z | a)$, ill. $f_{z,a}(z, a)$ sűrűségfüggvények mellett a fenti egyenlőségek teljesülnek, így a kapott becslés hatásos lesz.

3. A hiba alsó korlátja általánosítható többdimenziós esetre is, amikor az a mérendő paraméter n dimenziós vektor.

Torzítatlan esetben a becslés feltételes kovarianciamátrixára a következő alsó korlát adható:

$$\text{cov} [\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{a}} | \mathbf{a}] = E\{(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})^T | \mathbf{a}\} \cong \mathbf{J}^{-1}, \quad (3.36)$$

ahol $\mathbf{J}$ az ún. Fisher-információs mátrix.

Az $n \times n$ -es mátrix elemei a következők:

$$J_{ij} \triangleq E \left\{ \frac{\partial \ln f_{z|a}(z | a)}{\partial a_i} \frac{\partial \ln f_{z|a}(z | a)}{\partial a_j} \right\} = -E \left\{ \frac{\partial^2 \ln f_{z|a}(z | a)}{\partial a_i \partial a_j} \right\}. \quad (3.37)$$

A hatásosság feltétele itt is az, hogy (3.36)-ban az egyenlőség teljesüljön. Ez akkor és csak akkor lesz igaz, ha

$$\hat{a}_i - a_i = \sum_{j=1}^n k_{ij}(a) \frac{\partial \ln f_{z|a}(z | a)}{\partial a_j}, \quad (3.38)$$

vagyis, ha a becslés hibája az $\ln f_{z|a}(z | a)$ parciális deriváltjainak súlyozott összegeként állítható elő.

Ismert $f_a(a)$ a priori sűrűségfüggvény mellett a feltétel nélküli átlagos négyzetes hiba alsó korlátját definiáló egyenlőtlenség:

$$E\{(\hat{a} - a)(\hat{a} - a)^T\} \geq J^{-1}, \quad (3.39)$$

mely torzított esetben is alkalmazható, anélkül, hogy a $b(a)$ torzításfüggvényt pontosan ismernénk.

Itt tehát a becslési hiba korrelációmátrixára kapunk alsó korlátot:

$$R_{\hat{a}\hat{a}} \geq J^{-1}. \quad (3.40)$$

A J információs mátrix most két tagból áll:

$$J = J_d + J_f, \quad (3.41)$$

ahol J_d elemei

$$J_{d_{ij}} = E \left\{ \left(\frac{\partial \ln f_{z|a}(z|a)}{\partial a_i} \right) \left(\frac{\partial \ln f_{z|a}(z|a)}{\partial a_j} \right) \right\} = -E \left\{ \left[\frac{\partial^2 \ln f_{z|a}(z|a)}{\partial a_i \partial a_j} \right] \right\}, \quad (3.42)$$

J_f elemei pedig a következők:

$$J_{f_{ij}} = E \left\{ \frac{\partial \ln f_a(a)}{\partial a_i} \frac{\partial \ln f_a(a)}{\partial a_j} \right\} = -E \left\{ \frac{\partial^2 \ln f_a(a)}{\partial a_i \partial a_j} \right\}, \quad (3.43)$$

látható, hogy J_f az a priori ismereteket, J_d pedig a megfigyelésekből származó ismereteket képviseli.

A Gauss-sűrűségfüggvények — az egydimenziós esethez hasonlóan — itt is biztosítják a becslés hatásosságát, vagyis ilyenkor (3.36)-ban, ill. (3.39)-ben az egyenlőség áll fenn.

3.3. Bayes-becslők

Az egyes becslési eljárásokat a felhasználható a priori ismeretek mennyisége szerint rendszerezve tárgyaljuk. Ebben a részben a legtöbb előismeretet igénylő Bayes-becslőkkel foglalkozunk. A Bayes-becslők akkor alkalmazhatók, ha a meghatározandó mennyiség valószínűségi változó.

A 3.3.1. pontban a Bayes-becslők alapelvét, származtatásuk feltételeit ismertetjük.

A 3.3.2. pont a nemrekurzív Bayes-becslőket a leggyakrabban alkalmazott kritériumfüggvények esetére származtatja.

A nemrekurzív Bayes-becslőkkel Gauss-eloszlások mellett a 3.3.3. pont foglalkozik.

A rekurzív megvalósítást a 3.3.4. pontban, míg a Gauss-eloszlásokra vonatkozó rekurzív megoldást a 3.3.5. pontban foglaljuk össze.

3.3.1. A Bayes-becslők alapelve

Tételezzük fel, hogy az ismeretlen a valószínűségi változó paramétert a $\{z_i\}$ megfigyelések felhasználásával kívánjuk becsülni. Tételezzük fel továbbá, hogy az ismeretlen paraméterről bizonyos előismerettel rendelkezünk, melyet a paraméter $f_a(a)$ a priori valószínűség-sűrűségfüggvénye ad meg. Ez azt jelenti, hogy a keresett paraméter-

értéket egy olyan valószínűségi változó adott realizációjának tekintjük, melynek sűrűségfüggvénye ismert.

A mérendő rendszeren végzett megfigyelések további ismereteket szolgáltatnak az a paramétréről. Minthogy vizsgálati modellünkben feltételeztük, hogy megfigyeléseinket zaj terheli (zajos a jelátviteli csatorna), ezért kiértékelésükhöz a megfigyelések $f_{z|a}(z | a)$ feltételes sűrűségfüggvényét, az ún. csatornakarakterisztikát ismernünk kell. E sűrűségfüggvény rögzített paraméterérték mellett adja meg a megfigyelések lehetséges eloszlását. A megfigyelés utáni ismereteket — amelyek az a priori és a megfigyelésekből származó ismereteket is tartalmazzák — a paraméter $f_{a|z}(a | z)$ a posteriori sűrűségfüggvénye adja meg.

Az a priori és az a posteriori sűrűségfüggvényeknek a következő szemléletes értelmezést adhatjuk. Az a mérendő paraméter olyan valószínűségi változó, mely adott tartományban az a priori sűrűségfüggvény által meghatározott eloszlás szerint tetszőleges értéket vehet fel. A rendszeren végzett megfigyeléseket a paraméter egy adott realizációja mellett nyerjük, így a megfigyelések bizonyos paraméterértékeket jobban, másokat kevésbé valószínűsítene. A megfigyeléseket is figyelembe véve az a posteriori sűrűségfüggvény adja meg a lehetséges értékek tartományát és ezen tartományon belüli eloszlását. Amennyiben a megfigyelések tartalmazzák a paraméterre vonatkozó információt, az a posteriori sűrűségfüggvény a konkrét paraméterérték egy szűkebb környezetére terjed ki, (3.5. ábra).

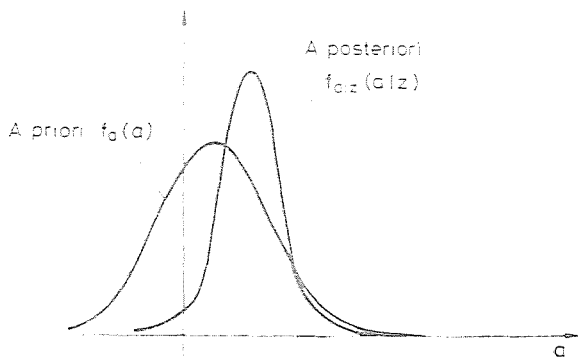
Nyilvánvaló, hogy minél több ismeretet szerzünk a megfigyelések által a paramétréről, annál jobban leszűkítjük a paraméter lehetséges értékeinek tartományát, s így annál jobb becslést kapunk.

A Bayes-becslési módszerek mindegyike az a posteriori sűrűségfüggvény meghatározására vezet, amely tehát a megfigyeléseket is figyelembe véve az a paraméter teljes statisztikai leírását adja meg.

A teljes statisztikai ismeretre azonban nincs mindig szükség, ezért célszerű lenne a lehetséges értékek közül egyet kiválasztani és azt tekinteni a becslési eljárás eredményének, $\hat{a}$ -nak. Ilyen lehetséges választás pl. az a posteriori sűrűségfüggvény maximumához tartozó érték, ami azt jelenti, hogy becslésnek a paraméter megfigyelés utáni legvalószínűbb értékét tekintjük. Azonban bármelyik értéket is választjuk eredménynek, a becslésnek mindig lesz hibája. A becslési hiba:

$$\tilde{a} = \hat{a} - a \quad (3.44)$$

szintén valószínűségi változó, amelynek valamilyen átlagos értéke alapján történhet az optimális becslés meghatározása.



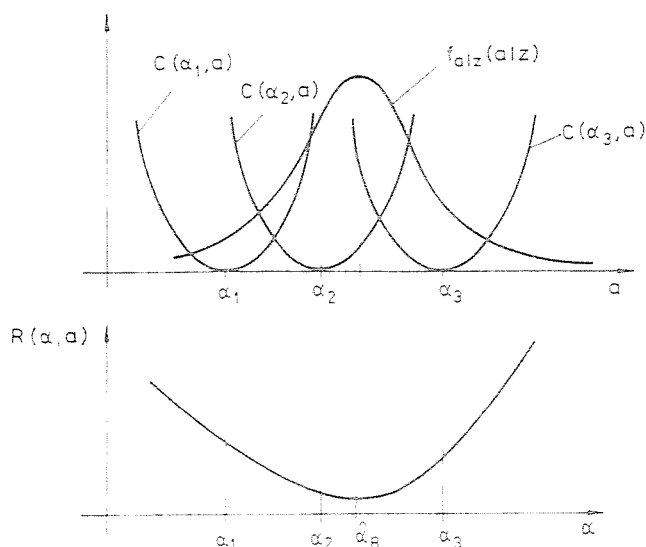
3.5. ábra. Az a priori és az a posteriori valószínűség-sűrűségfüggvények alakulása

Definiáljuk a becslés átlagos hibáját a következőképpen :
Legyen

$$R(\alpha, a) = E\{C(\alpha, a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha, a) f_{a|z}(a | z) da, \quad (3.45)$$

ahol $C(\alpha, a)$ a hibakritérium, melyet szokás költségfüggvénynek is nevezni.

A költségfüggvény bevezetése pl. lehetőséget ad arra, hogy az eltérő hibákat különböző súllyal vegyük figyelembe, de összetett becslési problémánál $C(\alpha, a)$ bármilyen feldolgozási algoritmust jelölhet, amely viszonylag egyszerűen megvalósítható és amely érvényes optimumkritérium alapját képezheti.



3.6. ábra. Az átlagos hiba alakulása négyzetes hibafüggvény mellett

Egy ésszerű lehetséges választás, ha a költségfüggvény csak a becslési hibától függ, vagyis $C(\alpha, a) = C(\hat{a})$. A 3.6. ábra az átlagos hiba alakulását mutatja, négyzetes költségfüggvény:

$$C(a) = (\alpha - a)^2 \quad (3.46)$$

esetére, attól függően, hogy a lehetséges értékek közül melyiket tekintjük a becslés eredményének. A *Bayes*-becslő az a paraméter olyan $\hat{\alpha}_B$ becslését keresi, amely az R átlagos hibát minimalizálja. A minimális átlagos hibát *Bayes*-hibának nevezzük és a továbbiakban R_B -vel jelöljük.

$$R_B = E\{C(\hat{\alpha}_B, a)\} = \min_{\hat{\alpha}} R(\alpha, a) = \min_{\hat{\alpha}} E\{C(\alpha, a)\}. \quad (3.47)$$

Látható, hogy a *Bayes*-hibát mind az a posteriori sűrűségfüggvény, mind a kritériumfüggvény befolyásolja.

Az a posteriori sűrűségfüggvény meghatározása a *Bayes*-szabály alkalmazásával lehetséges:

$$f_{a|z}(a|z) = \frac{f_a(a)f_{z|a}(z|a)}{f_z(z)} = \frac{f_a(a)f_{z|a}(z|a)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_a(a)f_{z|a}(z|a) da} \quad (3.48)$$

A Bayes-becslő tehát

- a becsülni kívánt paraméter $f_a(a)$ a priori sűrűségfüggvényétől;
- a megfigyelések $f_{z|a}(z|a)$ feltételes sűrűségfüggvényétől;
- és a $C(\alpha, a)$ kritériumfüggvénytől függ.

3.3.2. Nemrekurzív Bayes-becslők

A becslők származtatásához írjuk fel az átlagos hibát. Mivel a becslés a z megfigyeléstől és az a tényleges paramétertől függ, és mivel mind z , mind a valószínűségi változó, ezért a várható értéket az $f_{z,a}(z, a)$ együttes sűrűségfüggvény szerint kell képezni.

$$R = E_z\{E_a\{C(\alpha, a)\}\} = \int_z \int_a C(\alpha, a) f_{z,a}(z, a) dz da. \quad (3.49)$$

Az együttes sűrűségfüggvényt szorzat alakban felírva nyerjük az átlagos hiba következő alakját:

$$R = \int_z \left[f_z(z) \int_a C(\alpha, a) f_{a|z}(a|z) da \right] dz. \quad (3.50)$$

Az összefüggésben a belső integrál rögzített z megfigyelés mellett adja meg a hibát, melyet feltételes átlagos hibának nevezünk, és amelynek z szerinti várható értékét a külső integrállal határozzuk meg.

Mivel $f_z(z)$ nem negatív, az átlagos hiba minimalizálása ekvivalens a feltételes átlagos hiba minimalizálásával.

A minimumot α értékének megfelelő megválasztásával nyerjük, így a minimum elérésének szükséges feltétele, hogy a feltételes átlagos hiba α szerinti deriváltja zérus legyen.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a C(\alpha, a) f_{a|z}(a|z) da \Big|_{\alpha = \hat{\alpha}_B} = 0. \quad (3.51)$$

A további vizsgálat elvégzéséhez a kritériumfüggvény ismerete szükséges.

Említettük, hogy a költségfüggvény, ill. az optimumkritérium megválasztása bizonyos mértékig önkényes. A költségfüggvény befolyásolja a becslés tulajdonságait, valamint megvalósíthatóságát. Megválasztásánál ezért

- az adott alkalmazás követelményeit
- és a minél egyszerűbb realizálhatóságot kell szem előtt tartanunk.

A gyakorlatban a Bayes-becslőknél leggyakrabban alkalmazott költségfüggvények a következők:

— négyzetes hibafüggvény:

$$C(\alpha, a) = \sum_{i=1}^m (\alpha_i - a_i)^2 \quad (3.52)$$

— abszolút hibafüggvény:

$$C(\alpha, a) = \sum_{i=1}^m |\alpha_i - a_i| \quad (3.53)$$

— egyenletes költségfüggvény; itt kis hibákhoz, vagyis ha

$$|\alpha_i - a_i| < \frac{\Delta}{2} \quad \forall i\text{-re} \quad (3.54)$$

zérus költséget, az ennél nagyobb hibákhoz pedig állandó (pl. egységnyi) költséget rendelünk, ahol Δ tetszőlegesen kicsi pozitív érték.

A megfelelő hibafüggvények egydimenziós esetre a 3.7. ábrán láthatók.

A négyzetes költségfüggvénynél a hibákat súlyozottan vesszük figyelembe, az abszolút költségfüggvénynél a költség és a hiba között lineáris a kapcsolat. Az egyenletes költségfüggvény alkalmazásakor a $\pm \frac{\Delta}{2}$ -nél kisebb eltérésekhez nem rendelünk költséget, az ennél nagyobb hibákhoz viszont az eltérés nagyságától függetlenül állandó költség tartozik.

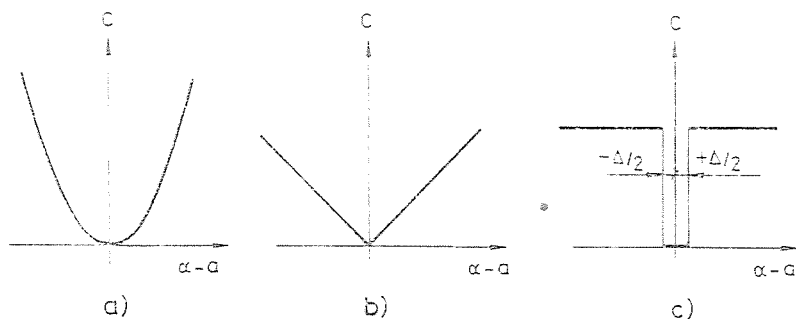
Ekkor tehát a mérendő paraméter adott, általában szűk környezetében „hibátlan”, minden más esetben pedig „hibásnak” tekintjük a becslést, ahol a különböző hibás eseteket nem különböztetjük meg.

A különböző költségfüggvények részben eltérő tulajdonságú becslőkhöz vezetnek. Szerencsére a megoldandó feladatok egy jelentős részében az optimális becslő a költségfüggvények meglehetősen tág osztályára azonos. A következőkben a (3.52), (3.53) és (3.54)-ben definiált három leggyakrabban alkalmazott költségfüggvény mellett vizsgáljuk a Bayes-becslőket.

Minimális átlagos négyzetes hibájú becslés

Négyzetes költségfüggvény (3.7a ábra) mellett a Bayes-hiba az átlagos négyzetes hibának felel meg.

$$R_{MS} = \int_a^{\infty} \int_{-\infty}^a (\alpha - a)^T (\alpha - a) f_{z,a}(z, a) dz da. \quad (3.55)$$



3.7. ábra. Tipikus hibafüggvények
a négyzetes; b abszolút; c egyenletes

A minimumhelyet mint láttuk a feltételes átlagos hiba minimálása útján nyerhetjük. Képezzük ezért a feltételes átlagos hiba α szerinti parciális deriváltját, majd az eredményt zérussá téve kapjuk a minimális átlagos négyzetes hibájú (MS) becslést.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha - a)^T (\alpha - a) f_{a|z}(a | z) da \Big|_{z=\hat{\alpha}_{MS}} = 0, \quad (3.56)$$

amiből

$$\hat{\alpha}_{MS} = \int_{-\infty}^{\infty} a f_{a|z}(a | z) da. \quad (3.57)$$

Az optimális Bayes-becslés tehát négyzetes költségfüggvény mellett a paraméter feltételes, a posteriori várható értéke.

Minimális átlagos abszolút hibájú becslés

Abszolút hibafüggvényt alkalmazva az átlagos hiba egydimenziós esetre a következőképpen alakul:

$$R_{ABS} = \int_a \int_z |z - a| f_{a,z}(a, z) dz da. \quad (3.58)$$

Keressük ismét a feltételes átlagos hiba minimumát. Írjuk fel ezért R_{ABS} -et a következő alakban:

$$R_{ABS}(z | z) = - \int_{-\infty}^z (z - a) f_{a|z}(a | z) da + \int_z^{\infty} (a - z) f_{a|z}(a | z) da. \quad (3.59)$$

Elvégezve a differenciálást, a derivált nulla értékét keresve kapjuk a következő összefüggést:

$$\int_{-\infty}^{\hat{\alpha}_{ABS}} f_{a|z}(a | z) da = \int_{\hat{\alpha}_{ABS}}^{\infty} f_{a|z}(a | z) da, \quad (3.60)$$

ahol $\hat{\alpha}_{ABS}$ az a posteriori sűrűségfüggvény mediánja.

Maximum a posteriori becslés

Egyenletes költségfüggvény mellett a minimálandó hiba egydimenziós esetre

$$R_{UCF} = \int_{-\infty}^{\infty} f_z(z) \left[1 - \int_{\hat{z} - \frac{\Delta}{2}}^{\hat{z} + \frac{\Delta}{2}} f_{a|z}(a | z) da \right] dz \quad (3.61)$$

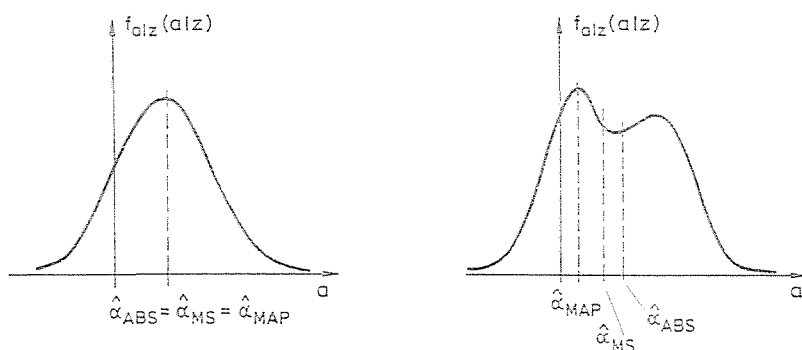
alakban írható fel.

A kifejezés a belső integrál maximumának keresésével minimálható. Különösen az az eset érdekes, amikor Δ tetszőlegesen kicsiny, de nem zérus érték. Ekkor az op-

timális becslés az a posteriori sűrűségfüggvény maximumához tartozó érték, ezért ezt a becslést maximum a posteriori (MAP) becslésnek is nevezik. A MAP becslés tehát a lehetséges paraméterértékek közül a legvalószínűbbet választja ki. Ez természetesen várható eredmény, hiszen egyenletes költségfüggvény mellett valójában csak két eset lehetséges: a becslést helyesnek tekintjük, ha a Δ sávon belül van, és hibásnak minden egyéb esetben.

Megjegyzések:

1. A Bayes-becslések a költségfüggvény megválasztásától függetlenül mindig az a posteriori sűrűségfüggvény ismeretében határozhatók meg. Az előbbiekből látható azonban, hogy a különböző költségfüggvények, hibakritériumok eltérő becsléseket eredményezhetnek. A 6.8. ábrán különböző Bayes-becslések láthatók eltérő a posteriori sűrűségfüggvények mellett. Sok esetben az optimális Bayes-becslés invariáns a költségfüggvény konkrét megválasztására és a minimális átlagos négyzetes hibájú



3.8. ábra. Különböző Bayes-becslők eltérő a posteriori sűrűségfüggvények mellett

(MS) becsléssel egyezik meg. Ehhez a költségfüggvényeknek és az a posteriori sűrűségfüggvényeknek a következő követelményeket kell kielégíteniük:

— legyen a költségfüggvény szimmetrikus a zérus becslési hibára, vagyis:

$$C(\tilde{a}) = C(-\tilde{a}) \quad (3.62)$$

— legyen a költségfüggvény konvex, azaz teljesüljön, hogy

$$C[bx_1 + (1-b)x_2] \leq bC(x_1) + (1-b)C(x_2) \quad (3.63)$$

tetszőleges $b \in (0, 1)$ és bármely x_1 és x_2 mellett. (A konvexitás feltétele egyszerűen azt jelenti, hogy a költségfüggvény bármely két pontját összekötő húr a költségfüggvény felett halad.)

— Legyen továbbá az a posteriori sűrűségfüggvény szimmetrikus az MS becslésre:

$$f_{a|z}(\hat{a}_{MS} - x | z) = f_{a|z}(\hat{a}_{MS} + x | z), \quad (3.64)$$

ahol $x = |a - \hat{a}_{MS}|$ tetszőleges a mellett.

A nem konvex költségfüggvények, mint pl. az egyenletes költségfüggvény is eredményezhetik a minimum varianciájú becslést, amennyiben a következő feltételek teljesülnek:

— legyen a költségfüggvény szimmetrikus, nemcsökkenő;
 — az a posteriori sűrűségfüggvény szimmetrikus, unimodális;
 — a költségfüggvény és az a posteriori sűrűségfüggvény szorzata végtelen a mellett legyen zérus:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} C(a) f_{a|z}(a | z) = 0. \quad (3.65)$$

Ezen eredmények jelentősége az, hogy a költségfüggvény megválasztása — az adott feltételek teljesülése esetén — a becslést nem befolyásolja, így az MS becslés széles körben az optimális Bayes-becslés.

2. A becslők minősítéséhez a megfelelő jellemzők — elsősorban a torzítás és a variancia (kovarianciamátrix), ill. az átlagos négyzetes hiba — meghatározása szükséges. Mivel eltérő hibakritériumok, költségfüggvények más és más becslést eredményezhetnek, az egyes Bayes-becslők tulajdonságai is különbözni fognak.

A torzítást vizsgálva általánosságban csupán annyi mondható el, hogy a Bayes-becslők rendszerint feltételesen torzítottak, míg ha a feltétel nélküli torzítást nézzük, megállapítható, hogy egyes Bayes-becslők — pl. a legkisebb átlagos négyzetes hibájú (MS) becslő — torzítatlanok, mások torzítottak.

Mivel torzítatlanságról általában nem beszélhetünk és a torzítás rendszerint nem korrigálható, a variancia helyett a becslés átlagos négyzetes hibáját vizsgáljuk. Az átlagos négyzetes hiba meghatározása a becslés hatásosságának eldöntését is lehetővé teszi.

A legkisebb átlagos négyzetes hibájú becslés — amennyiben létezik hatásos becslés — nyilván hatásos. Ez az alkalmazott optimumkritérium definíciójából következik.

A MAP becslő hatásosságának eldöntésekor előbb vizsgáljuk meg, hogy mi a feltétele a hatásos becslő létezésének.

Bayes-becslőknél a mérendő paraméter valószínűségi változó, melynek $f_a(a)$ a priori valószínűség-sűrűségfüggvénye ismert. A hatásosság eldöntéséhez ezért a (3.23), ill. többdimenziós esetben az ezzel analóg (3.39) egyenlőséget kell vizsgálni.

Láttuk, hogy — egydimenziós paraméter esetén — a (3.23) összefüggésben a hatásosságot jelentő egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha (3.35) teljesül, vagyis, ha az együttes sűrűségfüggvényre igaz, hogy

$$\frac{\partial \ln f_{z,a}(z, a)}{\partial a} = -k[\hat{a}(z) - a]. \quad (3.66)$$

E feltétel az együttes — és így az a posteriori — sűrűségfüggvényre is megkötést jelent. A feltételt tovább vizsgálva megállapítható, hogy a hatásosság szükséges és elégséges feltétele, hogy az a paraméter Gauss a posteriori sűrűségfüggvénnyel rendelkezzen minden z megfigyelés mellett. Ezt az állítást könnyen beláthatjuk, ugyanis a szerint differenciálva (3.66) mindkét oldalát a

$$\frac{\partial^2 \ln f_{z,a}(z, a)}{\partial a^2} = -k \quad (3.67)$$

összefüggést kapjuk. Ha ezt az a posteriori sűrűségfüggvény segítségével fejezzük ki, úgy felírható, hogy

$$\frac{\partial^2 \ln f_{a|z}(a | z)}{\partial a} = -k, \quad (3.68)$$

ami azt jelenti, hogy az a posteriori sűrűségfüggvény

$$f_{a|z}(a|z) = \exp[-ka^2 + c_1a + c_2] \quad (3.69)$$

alakú, amely Gauss-függvényt ad.

Gauss a posteriori sűrűségfüggvény esetén viszont a feltételes várható érték, a medián, és a maximumhoz tartozó érték, a modulus megegyezik, ezért az előzőekben vizsgált három hibakritérium mellett kapott Bayes-beclsés azonos és egyben mindhárom hatásos is.

A hatásosság azonban Bayes-beclsőknél csak speciális esetben, Gauss a posteriori sűrűségfüggvény mellett áll fenn. Amennyiben hatásos beclsés nem létezik, az MS beclsés továbbra is a legkisebb átlagos négyzetes hibát adja, azonban azt nem tudjuk megmondani, hogy ez a hiba mennyire közelíti meg a (3.23)-ban definiált alsó korlátot. A többdimenziós esetet részletesen nem vizsgáljuk, csupán megemlítjük, hogy az előzővel analóg eredményre jutunk.

3. Az MS beclsés lineáris abban az értelemben, hogy tetszőleges megfelelő dimenziójú determinisztikus A mátrix és c vektor mellett igaz, hogy ha

$$b = Aa + c, \quad \text{akkor} \quad \hat{\beta}_{MS} = A\hat{\alpha}_{MS} + c, \quad (3.70)$$

ahol $\hat{\beta}_{MS}$ b legkisebb átlagos négyzetes hibájú beclsése.

Továbbá, ha a és b két azonos dimenziójú véletlen vektor, akkor teljesül, hogy

$$E\{a + b | z\} = E\{a | z\} + E\{b | z\} = \hat{\alpha}_{MS} + \hat{\beta}_{MS}. \quad (3.71)$$

4. A Bayes-beclséseket viszonylag ritkán alkalmazzák. Ennek oka elsősorban a sok a priori ismeretigény, valamint az eljárás végigvitelénél jelentkező matematikai nehézségek. A Bayes-beclsések általános esetben a megfigyelések nemlineáris függvényeként állnak elő. Csak speciális esetben pl. Gauss-eloszlások mellett határozható meg egyszerűen az a posteriori sűrűségfüggvény, ill. annak valamely jellemzője. A Gauss-eloszlásokból származó előnyök, és az a tény, hogy a fizikai folyamatok sok esetben valóban Gauss-eloszlásúak, indokolják, hogy a Bayes-beclsést Gauss-eloszlások feltételezésével külön is érdemes vizsgálni (3.3.3. pont).

3.1. példa

Legyen a mérendő paraméter egy $[-U_{\max}, +U_{\max}]$ intervallumban egyenletes eloszlású feszültség. Feltételezve, hogy a feszültségmérő hibája zérus várható értékű, Gauss-eloszlású zajjal modellezhető, határozzuk meg a feszültség MS beclsését. Az eddigi jelölést alkalmazva a megfigyelés eredménye:

$$z = a + n, \quad (3.72)$$

ahol a a mérendő feszültség,
n a megfigyelési zaj.

Az előző eredmények szerint az MS beclsés az a posteriori várható érték.

$$\hat{a}_{MS} = \int_{-\infty}^{\infty} a f_{a|z}(a|z) da. \quad (3.73)$$

Az ismert jellemzőkkel kifejezve:

$$\hat{a}_{MS} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} a f_a(a) f_{z|a}(z|a) da}{\int_{-\infty}^{\infty} f_a(a) f_{z|a}(z|a) da}. \quad (3.74)$$

A Gauss-zaj miatt az $f_{z|a}(z|a)$ feltételes sűrűségfüggvény a következő:

$$f_{z|a}(z|a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma_n^2}}. \quad (3.75)$$

A megfelelő integrálások elvégzése után, felhasználva, hogy

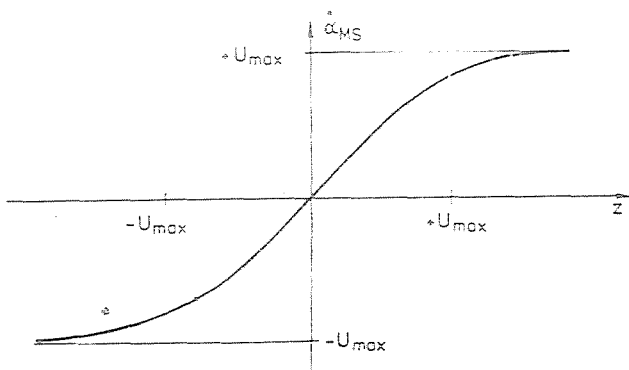
$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad (3.76)$$

az MS becslés a következőre adódik

$$\begin{aligned} \hat{a}_{MS} = & z - \frac{\sigma_n}{\sqrt{2\pi} \left[\varphi\left(\frac{U_{\max} - z}{\sigma_n}\right) + \varphi\left(\frac{U_{\max} + z}{\sigma_n}\right) \right]} \times \\ & \times \left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{U_{\max} - z}{\sigma_n}\right)^2} - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{U_{\max} + z}{\sigma_n}\right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.77)$$

A becslés a 3.9. ábrán látható.

Megjegyzés: A becslés (3.77) összefüggéséből látható, hogy az eredmény még ilyen egyszerű esetben is meglehetősen bonyolult, a megfigyelés nagymértékben nemlineáris függvénye. A 3.9. ábra szemlélteti, hogy a becslés nem eshet a $[-U_{\max}, +U_{\max}]$ tartományon kívülre, ami az a priori ismeretek következménye.



3.9. ábra. Egyenletes eloszlású paraméter Bayes-becslése Gauss-zaj mellett

3.3.3. Nemrekurzív Bayes-becslő Gauss-eloszlások mellett

Tételezzük fel, hogy mind a keresett paraméter, mind a megfigyelési zaj *Gauss*-eloszlású, ahol a várható érték és a kovarianciamátrix adott.

$$\begin{aligned} E\{a\} &= \mu_a; & E\{n\} &= 0; \\ \text{cov}[a, a] &= \Sigma_{aa} & \text{és} & \quad \text{cov}[n, n] = \Sigma_{nn}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Tételezzük fel továbbá, hogy a megfigyelés a paraméter lineáris függvénye, amelyhez additív zaj járul, vagyis:

$$z = Ua + n. \quad (3.79)$$

Itt a m dimenziós, z és n n dimenziós vektorok, U pedig egy $n \times m$ -es megfigyelési mátrix.

A becsléshez az a posteriori sűrűségfüggvény meghatározása szükséges:

$$f_{a|z}(a | z) = \frac{f_{z|a}(z | a)f_a(a)}{f_z(z)}. \quad (3.80)$$

Mivel mind a , mind n *Gauss*-eloszlású valószínűségi változó, és mivel a z megfigyelés a paraméter és a megfigyelési zaj lineáris függvénye, (3.74)-ben csak *Gauss*-sűrűségfüggvények szerepelnek, s így a szintén *Gauss* $f_{a|z}(a | z)$ momentumait egyszerűen meghatározhatjuk.

Az F2.1. függelék összefüggéseinek felhasználásával a $\mu_{a|z}$ a posteriori várható érték a következő:

$$\mu_{a|z} = \Sigma_{aa|z}(U^T \Sigma_{nn}^{-1} z + \Sigma_{aa}^{-1} \mu_a), \quad (3.81)$$

míg a feltételes kovarianciamátrix:

$$\text{cov}[a, a | z] = \Sigma_{aa|z} = [\Sigma_{aa}^{-1} + U^T \Sigma_{nn}^{-1} U]^{-1}. \quad (3.82)$$

A legkisebb átlagos négyzetes hibájú becslés az a posteriori sűrűségfüggvény várható értéke:

$$\hat{a}_{MS} = E\{a | z\} = \int_{-\infty}^{\infty} a f_{a|z}(a | z) da = \mu_{a|z}, \quad (3.83)$$

amely a következő formára hozható:

$$\hat{a}_{MS} = \mu_a + [U^T \Sigma_{nn}^{-1} U + \Sigma_{aa}^{-1}]^{-1} U^T \Sigma_{nn}^{-1} (z - U\mu_a). \quad (3.84)$$

A becslési hiba kovarianciamátrixa, $\Sigma_{\hat{a}\hat{a}}$, megegyezik $\Sigma_{aa|z}$ -vel. A (3.82) összefüggést a mátrix inverziós lemma (F2.2. függelék) felhasználásával átalakítva a kovarianciamátrix a következőre adódik:

$$\Sigma_{\hat{a}\hat{a}} = \Sigma_{aa} - \Sigma_{aa} U^T (\Sigma_{nn} + U \Sigma_{aa} U^T)^{-1} U \Sigma_{aa}, \quad (3.85)$$

amely kiszámítás szempontjából kedvezőbb alak, mint a (3.82).

Megjegyzések:

1. A (3.84) összefüggésből látható, hogy a becslés a megfigyelések lineáris függvénye. Az eredményt mint legkisebb átlagos négyzetes hibájú (MS) becslést származtattuk, de ugyanezt az eredményt szolgáltatja a MAP becslés, és mivel az adott feladatban az a posteriori sűrűségfüggvény várható értéke és mediánja megegyezik, $\hat{\alpha}_{\text{ABS}}$ is.

Tehát:

$$\hat{\alpha}_{\text{MS}} = \hat{\alpha}_{\text{MAP}} = \hat{\alpha}_{\text{ABS}} = \mu_{a|z}. \quad (3.86)$$

2. A kovarianciamátrix (3.82) összefüggése szerint

$$\text{cov}[a, a | z] \leq \text{cov}[a, a], \quad (3.87)$$

vagyis ha a megfigyeléseket is figyelembe vesszük, a variancia csökken. A (3.82) összefüggés jól mutatja a variancia alakulását akkor is, ha a mérendő paraméterről nincs a priori információnk. Ez ugyanis végtelen a priori varianciának felel meg, amikor is $\Sigma_{aa}^{-1} = 0$. A kovarianciamátrix (3.85) alakjából a zajmentes ($\Sigma_{nn} = 0$) megfigyelések esetére vonható le következtetés. Ekkor $\Sigma_{aa}^{-1} = 0$, ami nyilvánvaló is, hiszen a zajmentes megfigyelés eredményéből a paraméter értékét pontosan meg tudjuk határozni.

3. $\hat{\alpha}_{\text{MS}}$ (3.84) által megadott összefüggése két tagból áll: az első tag (μ_a) az a priori ismeretet képviseli, míg a második a megfigyelésből származó korrekciót jelenti, ahol a korrekció a tényleges megfigyelés (z) és az a priori ismeretek alapján várható megfigyelés ($U\mu_a$) különbségével arányos.

4. A kapott eredmények lineáris modell esetén és Gauss-eloszlások mellett érvényesek. A Gauss-eloszlásokból fakadó egyszerűsítések miatt sok esetben akkor is élhetünk a Gauss-feltételezéssel, ha valójában nem Gauss-eloszlásokkal van dolgunk, ill. a szükséges sűrűségfüggvények helyett csak az első és második momentumok állnak rendelkezésünkre.

A későbbiekben (4.2.1. pont) a lineáris legkisebb átlagos négyzetes hibájú becslést eloszlástól függetlenül származtatjuk. Az így származtatott becslés bár formailag megegyezik az eddigi eredményekkel, csak a lineáris becslések között lesz optimális. Ha a és n nem Gauss-eloszlású a (3.81) eredmény nem a feltételes várható értéket adja, s így nem egyezik meg a Bayes-becsléssel.

Az előző eredmények illusztrálására tekintünk a következő példát.

3.2. példa

Legyen feladatunk egy ellenállás értékének mérése, úgy, hogy a mérendő ellenálláson ismert áramot át bocsátva mérjük a rajta eső feszültséget.

A mérőeszköz hibái, valamint a mindig jelenlevő zaj miatt a megfigyelt feszültség és a keresett ellenállásérték közötti kapcsolat a következő:

$$U = IR + n,$$

tehát a mérési feladathoz lineáris modell rendelhető.

A mérendő ellenállás értéke egy valószínűségi változó konkrét realizációjának tekinthető. Amennyiben a valószínűségi változó a priori sűrűségfüggvénye ismert, az ellenállásérték Bayes-becslése meghatározható. N megfigyelést végezve, valamint feltételezve, hogy az áram értéke egységnyi, a becslést a

$$z_k = a + n_k \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.88)$$

megfigyelések felhasználásával határozhatjuk meg. A (3.88) összefüggésnél az általánosan használt jelöléseket alkalmaztuk, tehát itt z_k jelenti a megfelelő feszültség-értéket, a pedig a mérendő ellenállásértékét. A továbbiakban tételezzük fel, hogy mind az ellenállás, mind a megfigyelési zaj *Gauss*-eloszlású, továbbá a zaj megfigyelési értékei korrelálatlanok. A mérendő paraméter jellemzői μ_a várható érték és σ_a^2 variancia, a zaj jellemzői pedig $\mu_n=0$ várható érték és $\text{cov}[n_k, n_j]=\sigma_n^2 \delta_{kj}$ kovariancia. Az N megfigyelést vektoros alakban felírva kapjuk, hogy

$$z = Ua + n, \quad (3.89)$$

ahol $z^T = [z_1, z_2, \dots, z_N]$ az egyes megfigyelésekből álló megfigyelési vektor, $n^T = [n_1, n_2, \dots, n_N]$ a $\mu_n=0$ várható értékű és $\Sigma_{nn} = \sigma_n^2 E$ kovarianciamátrixú zajvektor, és

$$U = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \text{ egy } (N \times 1)\text{-es mátrix.}$$

A vektoros alak felírása lehetővé teszi, hogy közvetlenül alkalmazzuk a (3.84) és a (3.85) összefüggéseket.

Eszerint

$$\hat{a}_{MS} = \mu_a + [U^T \Sigma_{nn}^{-1} U + \Sigma_{aa}^{-1}]^{-1} U^T \Sigma_{nn}^{-1} (z - U \mu_a).$$

A becslés kifejezésébe a megfelelő értékeket behelyettesítve, valamint figyelembe véve, hogy $\Sigma_{aa} = \sigma_a^2$ skalár érték, az optimális *Bayes*-becslés a következőre adódik:

$$\hat{a}_{MS} = \frac{\mu_a + \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n}\right)^2 \sum_{k=1}^N z_k}{1 + N \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n}\right)^2}. \quad (3.90)$$

A becslési hiba varianciája pedig (3.82) felhasználásával:

$$\text{var}[\hat{a}] = \frac{\sigma_a^2}{1 + N \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n}\right)^2}. \quad (3.91)$$

A kapott eredményekből néhány következtetés adódik:

1. A becslés feltételesen torzított, hiszen

$$E\{\hat{a}_{MS} | a\} = \frac{\mu_a + \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n}\right)^2 Na}{1 + N \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n}\right)^2}. \quad (3.92)$$

A torzítás

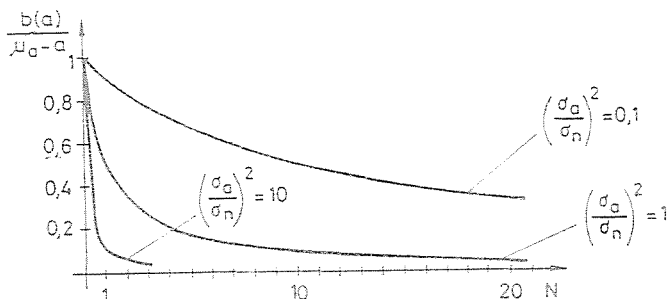
$$b(a) = \frac{\mu_a - a}{1 + N \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n}\right)^2}. \quad (3.93)$$

Látható, hogy a torzítás $N \rightarrow \infty$ esetben nullához tart, vagyis aszimptotikusan torzítatlan becslést kaptunk.

A nullához tartás gyorsasága a $\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n}\right)^2$ értéktől függ. A 3.10. ábra a normált torzítás,

$$\frac{b(a)}{\mu_a - a}$$

alakulását mutatja a megfigyelésszám, N függvényében.



3.10. ábra. A normált torzítás alakulása a megfigyelésszám függvényében

2. A becslés két tagból áll; az első tag az a priori ismeret, a második a megfigyelésekből származó ismeret függvénye. A két rész különböző súllyal szerepel a becslésben. Adott megfigyelésszám (N) mellett minél szűkebb területet jelöl meg az a priori sűrűségfüggvény (minél kisebb σ_a^2), és minél nagyobb a megfigyelési zaj (minél nagyobb σ_n^2), annál kisebb a megfigyelések súlya. A megfigyelések számának növelésével viszont látható, hogy az a priori ismeret hatása lesz egyre kisebb, $N \rightarrow \infty$ határát-

menetben pedig már egyáltalán nem befolyásolja a becslést. Ilyenkor $\hat{a}_{MS} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z_k$ vagyis az eredmény a megfigyelések átlaga.

3.3. példa

A mérési problémák számos esetben vezetnek a következő feladatra: adott egy jel, amelyhez additív zaj járul, s e zajos megfigyelések felhasználásával a jel valamely ismeretlen paraméterét akarjuk meghatározni. Feltételezzük, hogy az ismeretlen paraméter valószínűségi változó, melynek a priori sűrűségfüggvényét ismerjük, továbbá feltételezzük, hogy az additív zaj statisztikai jellemzői ismertek.

A következőkben tételezzük fel, hogy az ismeretlen jelparaméter egy ismert alakú jel amplitúdója.

Legyen a megfigyelések és a mérendő jel kapcsolata a következő:

$$z_i = as_i + n_i; \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.94)$$

Itt s_i az ismert jelsorozat értékeit, n_i a megfigyelési zaj mintáit jelöli, a pedig az ismeretlen amplitúdó.

Tételezzük fel, hogy mind a , mind az n_i értékek Gauss-eloszlásúak ismert várható értékkel és varianciával, valamint, hogy a mérendő paraméter és a zaj mintái függetlenek egymástól, vagyis:

$$\begin{aligned} E\{a\} &= \mu_a; & E\{n_i\} &= 0 \\ \text{var } [a] &= \sigma_a^2; & \text{cov } [n_i, n_j] &= \sigma_n^2 \delta_{ij} \\ \text{cov } [a, n_i] &= 0 \quad \forall \quad i\text{-re.} \end{aligned} \quad (3.95)$$

A MAP becslés az a posteriori sűrűségfüggvény maximumához tartozó érték. A szélsőértéket a

$$\left. \frac{\partial f_{a|z}(a | z)}{\partial a} \right|_{a=\hat{a}_{\text{MAP}}} = 0$$

megoldása szolgáltatja.

Alkalmazva a *Bayes*-szabályt és felhasználva a logaritmusfüggvény monotonitását a MAP becslés a következő egyenlet megoldásaként is nyerhető:

$$\left. \frac{\partial \ln f_a(a)}{\partial a} + \frac{\partial \ln f_{z|a}(z | a)}{\partial a} \right|_{a=\hat{a}_{\text{MAP}}} = 0. \quad (3.96)$$

Figyelembe véve, hogy

$$f_a(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(a - \mu_a)^2}{\sigma_a^2} \right] \quad (3.97)$$

és

$$f_{z|a}(z | a) = \frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{N/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^N (z_i - as_i)^2 \right], \quad (3.98)$$

a deriváltak meghatározhatók:

$$\frac{\partial}{\partial a} \ln f_a(a) = -\frac{a - \mu_a}{\sigma_a^2}, \quad (3.99)$$

és

$$\frac{\partial}{\partial a} \ln f_{z|a}(z | a) = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^N s_i (z_i - as_i). \quad (3.100)$$

Ezek felhasználásával a MAP becslés a következő

$$\hat{a}_{\text{MAP}} = \frac{\mu_a + \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n} \right)^2 \sum_{i=1}^N s_i z_i}{1 + \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n} \right)^2 \sum_{i=1}^N s_i^2}. \quad (3.101)$$

A becslés varianciája:

$$\text{var } [\hat{a}] = \frac{\sigma_a^2}{1 + \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n} \right)^2 \sum_{i=1}^N s_i^2}. \quad (3.102)$$

Megjegyzések:

1. A kapott eredményeket összevetve a 3.2. példa eredményeivel látható, hogy amennyiben a mérendő jel konstans, vagyis s_i minden i -re azonos és egységnyi, az előző eredménnyel megegyező becslést kapunk.

2. $\hat{\sigma}_{\text{MAP}}$ (3.101) összefüggésében a megfigyeléseknek az ismert jelmintákkal súlyozott összege szerepel. Ez azt jelenti, hogy a becslés megfigyelésektől függő része egy olyan szűrő kimenőjelének tekinthető, amelynek együttthatóit a mérendő jelhez illesztjük. Az ilyen szűrőt ezért szokás illesztett szűrőnek (matched filter) is nevezni.

3. A Gauss-eloszlások miatt a kapott becslés megegyezik az MS becsléssel.

3.3.4. Rekurzív Bayes-becslők

A Bayes-becslők rekurzív alakjának meghatározásához a feltételes sűrűségfüggvényt kell rekurzív formában megadni. A rekurzív alak felírásához abból indulhatunk ki, hogy a megfigyelések egy $\{z_k\} = z_1, z_2, \dots, z_i, \dots, z_k$ megfigyelési szekvencia formájában állnak rendelkezésünkre, amelynek elemeit egyenként használjuk fel.

Az összefüggések jobb áttekinthetősége érdekében a továbbiakban alkalmazzuk az alábbi egyszerűsített jelölést: a sűrűségfüggvényeknél hagyjuk el az indexet, vagyis $f_a(a)$ helyett $f(a)$; $f_{a|z}(a | z)$ helyett $f(a | z)$ és $f_{z|a}(z | a)$ helyett $f(z | a)$ jelölést használunk. Vezessük még be a következő jelöléseket: jelölje $f(a | z_k)$ a k -adik megfigyelés, $f(a | \{z_k\})$ pedig a z_1 -től z_k -ig terjedő összes megfigyelés figyelembevételével a feltételes, a posteriori sűrűségfüggvényt.

Az első megfigyelés után az a posteriori sűrűségfüggvényt a Bayes-szabály szerint kaphatjuk.

$$f(a | z_1) = \frac{f(z_1 | a)f(a)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(z_1 | a)f(a) da} \quad (3.103)$$

A rekurzív megoldáshoz az szükséges, hogy a következő megfigyelés (z_2) utáni a posteriori sűrűségfüggvényt (3.103) felhasználásával adjuk meg.

A Bayes-szabály alkalmazásával

$$f(a | z_1, z_2) = f(a | \{z_2\}) = \frac{f(z_2 | z_1, a)f(z_1, a)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(z_2 | z_1, a)f(z_1, a) da} \quad (3.104)$$

amelyet a következő alakra hozhatunk:

$$f(a | \{z_2\}) = \frac{f(z_2 | z_1, a)f(a | z_1)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(z_2 | z_1, a)f(a | z_1) da} \quad (3.105)$$

Tovább folytatva az eljárást a k -adik megfigyelés utáni a posteriori sűrűségfüggvény felírható:

$$f(a | \{z_k\}) = f(a | z_1, z_2, \dots, z_k) = \frac{f(z_k | \{z_{k-1}\}, a)f(a | \{z_{k-1}\})}{\int_{-\infty}^{\infty} f(z_k | \{z_{k-1}\}, a)f(a | \{z_{k-1}\}) da} \quad (3.106)$$

Az a posteriori sűrűségfüggvények (3.103), (3.105) és (3.106) összefüggéseit összevetve a formai hasonlóság azonnal szembetűnik. Az összefüggések a formai hasonlóságon kívül lényeges tartalmi hasonlóságot is mutatnak. (3.103)-ban a z_1 megfigyelés utáni a posteriori sűrűségfüggvényt az a priori sűrűségfüggvény ismeretében határoztuk meg. (3.105) és (3.106) már a z_1 és z_2 , ill. a $\{z_k\}$ megfigyelések utáni feltételes sűrűségfüggvényeket adják meg, kiindulásként pedig az első, ill. a $(k-1)$ -edik lépés eredményét használják. Ez azt a várható tényt mutatja, hogy egy előző lépésben kapott eredmény (a posteriori ismeret) a következő lépésben mint a priori ismeret szerepel. A Bayes-szabály felhasználásával tehát az a priori a posteriori sűrűségfüggvények lépésenkénti alakulását kaphatjuk meg.

Megjegyzés: Az a posteriori sűrűségfüggvény evolúciójának meghatározása a konkrét alkalmazásokban általában komoly nehézségekbe ütközik. Speciális esetekre pl.: Gauss-eloszlású független megfigyelésekre, vagy ha a megfigyelések Markov-folyamatot képeznek a sűrűségfüggvény időbeni változása megadható. Általános esetben azonban többnyire csak hosszan tartó numerikus eljárások vezetnek célhoz.

3.3.5. Rekurzív Bayes-beclső Gauss-eloszlások mellett

A következőkben a rekurzív Bayes-beclést Gauss-eloszlások feltételezésével vizsgáljuk. Láttuk, hogy Gauss-eloszlások mellett az optimális Bayes-beclső a költségfüggvények széles osztályára azonos.

Az eredményt ezért pl. akár MS, akár MAP beclésként meghatározhatjuk. Az egyes, azonos eredményt adó megközelítések közötti választást a felmerülő számítási nehézségek befolyásolják.

Tételezzük fel, hogy a megfigyelés a keresett paraméter lineáris függvénye, melyet a paramétertől független additív zaj terhel. A k -adik megfigyelés tehát:

$$z_k = Ua + n_k. \quad (3.107)$$

Mivel mind a paraméter, mind a megfigyelési zaj Gauss-eloszlású, jellemzésükhöz a várható érték és a kovariancia elegendő.

$$\left. \begin{aligned} E\{a\} &= \mu_a; & \text{cov}[a, a] &= \Sigma_{aa} \\ E\{n_k\} &= 0; & \text{cov}[n_k, n_j] &= \Sigma_{nn} \delta(k-j) \end{aligned} \right\} \quad (3.108)$$

ahol δ a Kronecker-delta.

Az első megfigyelésvektort figyelembe vevő beclső a nemrekurzív esetnek megfelelően nyerhető, vagyis a (3.84) összefüggés szerint:

$$\hat{a} = \mu_a + [U^T \Sigma_{nn}^{-1} U + \Sigma_{aa}^{-1}]^{-1} U^T \Sigma_{nn}^{-1} [z_1 - U\mu_a]. \quad (3.109)$$

Ez az alak, amelyet egy megfigyelés alapján kaptunk, alapját képezheti a szekvenciális megfigyeléseket felhasználó rekurzív formának. A beclső indexét jelölve az első megfigyelés alapján nyert beclső:

$$\hat{a}_1 = \hat{a}_0 + \Sigma_1 U^T \Sigma_{nn}^{-1} (z_1 - U\hat{a}_0), \quad (3.110)$$

ahol

$$\Sigma_1 = [U^T \Sigma_{nn}^{-1} U + \Sigma_0^{-1}]^{-1} \quad (3.111)$$

a beclső varianciája, és a nulla indexű elemek a beclső eljárásnál felhasznált eredeti, a priori jellemzőket jelentik:

$$\hat{\alpha}_0 = \mu_a \quad \text{és} \quad \Sigma_0 = \text{cov} [a, a]. \quad (3.112)$$

A két megfigyelést, $\{z_1, z_2\}$ felhasználó becslés a fenti eredményekből közvetlenül nyerhető, hiszen a megoldandó probléma teljesen hasonló, csupán az ott felhasznált a priori jellemzők helyére az első lépésben kapott a posteriori jellemzők kerülnek.

$$\hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}_1 + \Sigma_2 U^T \Sigma_{nn_2}^{-1} (z_2 - U \hat{\alpha}_1), \quad (3.113)$$

ahol

$$\Sigma_2 = [U^T \Sigma_{nn_2}^{-1} U + \Sigma_1^{-1}]^{-1}. \quad (3.114)$$

Ezen eljárás általánosításaként kapjuk a $k+1$ megfigyelés utáni optimális becslést:

$$\hat{\alpha}_{k+1} = \hat{\alpha}_k + \Sigma_{k+1} U^T \Sigma_{nn_{k+1}}^{-1} (z_{k+1} - U \hat{\alpha}_k), \quad (3.115)$$

ahol Σ_{k+1} a becslés feltételes kovarianciamátrixa

$$\Sigma_{k+1} = \text{cov} [\alpha, \alpha \mid z_1, z_2, \dots, z_{k+1}] = [U^T \Sigma_{nn_{k+1}}^{-1} U + \Sigma_k^{-1}]^{-1}. \quad (3.116)$$

Megjegyzések:

1. A kapott becslés szerkezete megegyezik a nemrekurzív becslésével: két tagból áll, ahol az első tag az adott lépésben a priori ismeretnek tekinthető előző becslés eredménye, a második pedig egy korrekciós tag, amely az új megfigyelés és az eddigi becslés alapján várható megfigyelés különbségével arányos.

2. Ez a forma ugyanakkor rekurzív becslést eredményezett, hiszen a $(k+1)$ -edik megfigyelés utáni eredményt az előző, k -adik megfigyelés utáni eredmény felhasználásával nyerjük.

3. A rekurzív formula valójában az a posteriori sűrűségfüggvény rekurzív számítását adja, hiszen *Gauss*-esetben a *Bayes*-becslés eredményeként kapott a posteriori várható érték és variancia magát az a posteriori sűrűségfüggvényt definiálja.

4. A kapott rekurzív *Bayes*-becslés ekvivalens a nemrekurzív becsléssel, hiszen azonos a priori ismeretek és optimumkritérium mellett nyertük. Így a két, eltérő módon származtatott becslő tulajdonságai is megegyeznek.

Látható, hogy a rekurzív eljárás alkalmazható nemstacionárius megfigyelési zaj jelenléte esetén is, mivel Σ_{nn_k} a k megfigyelési index függvényében változhat.

5. A rekurzív eljárás indítása az a priori ismeretek felhasználásával történik. Az eljárás azonban akkor is működik, ha nincs a priori ismeretünk. Az a priori ismeret hiányát ugyanis $\hat{\alpha}_0 = 0$ és $\Sigma_0^{-1} = 0$ értékekkel vehetjük figyelembe, ami azt jelenti, hogy nulla várható értékű, de végtelen varianciájú a mérendő paraméter a priori sűrűségfüggvénye.

6. A rekurzív és a nemrekurzív megoldást összevetve látható, hogy a megfigyelésszám növelésével a nemrekurzív becslés kiszámítása egyre nehezebb lesz, hiszen lépésenként növekvő méretű mátrix invertálására van szükség. Ezzel szemben a rekurzív megoldásnál a megfigyelésszám növelésével a mátrixok mérete nem változik.

3.4. példa

Határozzuk meg a 3.1. példa megoldását rekurzív alakban.

A (3.115) összefüggés felhasználásával

$$\hat{\alpha}_{k+1} = \hat{\alpha}_k + \Sigma_{k+1} \frac{1}{\sigma_n^2} (z_{k+1} - \hat{\alpha}_k), \quad (3.117)$$

ahol a skalár Σ_{k+1} -re a rekurzív összefüggés (3.116) szerint:

$$\Sigma_{k+1} = \left[\frac{1}{\sigma_n^2} + \frac{1}{\Sigma_k} \right]^{-1} = \frac{\sigma_n^2 \Sigma_k}{\sigma_n^2 + \Sigma_k}. \quad (3.118)$$

Ez egyben a becslési hiba varianciáját is megadja.

$$\text{var} [\hat{a}_{k+1}] = \Sigma_{k+1}. \quad (3.119)$$

A rekurzív eljárás az a priori adatokkal indítható:

$$\hat{a}_0 = \mu_a; \quad \Sigma_0 = \sigma_a^2. \quad (3.120)$$

3.4. Maximum likelihood becslők

A *Bayes*-becslő származtatásánál feltételeztük, hogy a mérendő mennyiség valószínűségi változó, melynek ismerjük a priori valószínűség-sűrűségfüggvényét. Ebből, valamint a rendelkezésre álló egyéb ismeretekből származtattuk az optimális becslőt. Amennyiben csak az $f_{z|a}(z|a)$ feltételes sűrűségfüggvény adott, tehát a *Bayes*-becslőkhöz képest kevesebb a priori ismeret áll rendelkezésünkre, *Bayes*-becslő nem származtatható.

Ilyenkor a legjobb becslést az ún. maximum likelihood (ML) becslő eredményezi.

Ez az eset áll elő, ha nem ismerjük a keresett paraméter eloszlását, vagy éppen séggel a paraméter nem tekinthető valószínűségi változónak.

A maximum likelihood becselőket a következő felépítésben tárgyaljuk: a 3.4.1. pont származtatásukat és főbb jellemzőiket mutatja be, a 3.4.2. pontban *Gauss*-eloszlás feltételezésével vizsgáljuk az ML becselőket, melynek eredményeképpen a *Gauss*—*Markov*-becslők nyerhetők.

3.4.1. A maximum likelihood becslők származtatása

A maximum likelihood becselő származtatásához előbb definiáljuk az ún. likelihood függvényt. Likelihood függvénynek a következőkben a megfigyelés feltételes sűrűségfüggvényét $f_{z|a}(z|\alpha)$ -t tekintjük, melynek α szerinti maximumhelyéhez tartozó paraméterérték adja meg definíciószerűen az optimális becslést, $\hat{\alpha}_{ML}$ -t.

A szélsőérték feladatát a likelihood egyenlet írja le:

$$\left. \frac{\partial f_{z|a}(z|\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\hat{\alpha}_{ML}} = 0, \quad (3.121)$$

vagy felhasználva a logaritmus függvény monotonitását

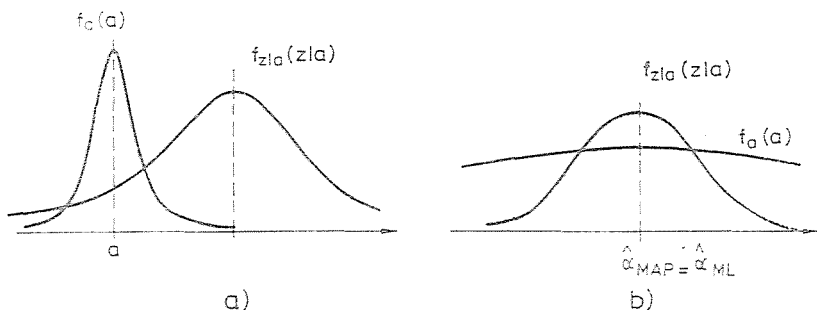
$$\left. \frac{\partial \ln f_{z|a}(z|\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\hat{\alpha}_{ML}} = 0. \quad (3.122)$$

A maximum likelihood becslést kétféle módon is értelmezhetjük. Egyfelől egyszerűen származtatható a maximum a posteriori becslésből, másfelől a kapott eredménynek intuitív értelmezést is adhatunk.

A *Bayes*-becslőknél az $f_a(a)$ a priori sűrűségfüggvény ismeretére szükség volt. A maximum likelihood becselőknél $f_a(a)$ -t nem ismerjük, ami úgy modellezhető, mint ha egyre jobban szétterülő sűrűségfüggvényünk volna.

Az a mérendő paramétert tehát egyre nagyobb — határártmenetben végtelen — varianciájú valószínűségi változónak tekintjük.

Az a priori sűrűségfüggvény variancianövekedésének hatását mutatja a 3.11. ábra. A 3.11a ábrán látható esetben $f_a(a)$ egy szűk környezetre terjed ki, ekkor a MAP becslés, amely $f_a(a)$ és $f_{z|a}(z|a)$ függvények szorzatának maximumához tartozó érték, jelentős mértékben különbözik az $f_{z|a}(z|a)$ maximumhelyétől. A 3.11b ábrán viszont $f_a(a)$ varianciája nagy, a sűrűségfüggvény szétterül, így $f_a(a)$ -nak lényegében nincs hatása az a posteriori sűrűségfüggvényre, vagyis a MAP becslés az $f_{z|a}(z|a)$ maximumához tartozó érték lesz.



3.11. ábra. Az a priori sűrűségfüggvény hatása

A MAP becslésnél adott z megfigyelési eredmény mellett az a posteriori sűrűségfüggvény maximumhelyét kell megkeresni:

$$\max_{\alpha} f_{a|z}(\alpha | z) = \max_{\alpha} \frac{f_{z|a}(z | \alpha) f_a(\alpha)}{f_z(z)}, \quad (3.123)$$

ahol az $f_{a|z}(a | z)$ a posteriori sűrűségfüggvénynél a konstans a helyére az α változó kerül, hiszen ennek függvényében kell a maximumhelyet megkeresnünk.

Mivel most a végtelen variancia miatt $f_a(\alpha)$ konstans, továbbá mivel $f_z(z)$ α -tól nem függ, ezért a szélsőértékprobléma a likelihood egyenletre vezet:

$$\left. \frac{\partial f_{z|a}(z | \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha = \hat{\alpha}_{ML}} = 0. \quad (3.124)$$

A maximum likelihood becslésnek szemléletes értelmezést is adhatunk. Minthogy vagy nem ismerjük a paraméter eloszlását, vagy a paraméter ismeretlen, nem valószínűségi változó, csak a megfigyelésekre támaszkodhatunk. Az ML becslésnek ezért azt a paraméterértéket tekintjük, amely mellett a kapott megfigyelés a „legvalószínűbb”. A likelihood függvény tehát a kapott megfigyelés hihetőségének mértékét a keresett paraméterérték függvényében adja meg.

Megjegyzések:

1. A maximum likelihood becslés is megvalósítható rekurzív formában, ha a likelihood függvény rekurzív alakban előállítható. A rekurzív becslésnek itt is első-sorban szekvenciális megfigyeléseknél van szerepe.

A rekurzív formában történő felírás a megfigyelésektől függ, csak speciális esetekre adható meg egyszerűen. Ilyen speciális esetnek tekinthető pl., ha a megfigyelé-

sek egy valószínűségi változó független mintái. Nem független megfigyeléseknél a sűrűségfüggvény időbeli alakulásának meghatározása hasonló problémát jelent, mint a rekurzív Bayes-becsléseknél az a posteriori sűrűségfüggvény lépésenkénti alakulásának megadása.

2. A maximum likelihood becslők tulajdonságainak meghatározásához a szokásos jellemzőket, a torzítást és a varianciát, ill. az átlagos négyzetes eltérést kell vizsgálni.

A torzítás az adott becslési feladattól — elsősorban a megfigyelési zaj statisztikai jellemzőitől — függ. Így az ML becslés a megfigyelési zajtól függően lehet torzított vagy torzítatlan. A becslő varianciájának (kovarianciamátrixának) meghatározása helyett — hasonlóan, mint ahogy a Bayes-becslőknél tettük — a varianciára általánosan érvényes alsó korlátot és e korlát elérésének feltételeit érdemes vizsgálni.

Amennyiben egy ML becslés varianciája (kovarianciamátrixa) a megfelelő alsó korlátot eléri, a becslés hatásos.

A hatásosság eldöntéséhez a megfelelő Cramer—Rao-egyenlőtlenség vizsgálata szükséges. Minthogy maximum likelihood becslőknél az a priori sűrűségfüggvényt nem ismerjük, a feltételes átlagos négyzetes hibát kell vizsgálni. Ez azt jelenti, hogy egydimenziós esetben, torzítatlan becslőkre a (3.20) vagy a (3.21) összefüggés, torzított becslőkre pedig a (3.22) egyenlőtlenség vonatkozik.

Többdimenziós mérendő paraméter mellett a hatásosság eldöntéséhez a (3.36) egyenlőtlenséget kell kiértékelni.

A 3.2.2. pontban láttuk, hogy a hatásos becslés létezéséhez az $f_{z|a}(z|a)$ sűrűségfüggvénynek bizonyos feltételt ki kell elégítenie, mely feltételt a (3.34) összefüggés fogalmazott meg. Eszerint hatásos becslés akkor és csak akkor létezik, ha fennáll, hogy

$$\frac{\partial \ln f_{z|a}(z|a)}{\partial a} = k(a)(\hat{a} - a). \quad (3.125)$$

Mivel (3.125) az a paraméter bármely értéke mellett fenn kell álljon, a helyébe $\hat{a}_{ML}$ -t írva is teljesülnie kell, vagyis:

$$\left. \frac{\partial \ln f_{z|a}(z|a)}{\partial a} \right|_{a=\hat{a}_{ML}} = k(a)(\hat{a} - a)|_{a=\hat{a}_{ML}}. \quad (3.126)$$

A kifejezés bal oldala a likelihood egyenletet adja, amely $a = \hat{a}_{ML}$ helyen zérus értékű. A kifejezés jobb oldala a megfigyelésektől függően akkor válik zérussá, ha

$$\hat{a} = \hat{a}_{ML}. \quad (3.127)$$

Ezek az eredmények azt mutatják, hogy ha létezik hatásos becslés, akkor az az ML becslés, melyet a likelihood egyenlet megoldásával nyerhetünk. Ez azt jelenti, hogy a maximum likelihood becslés minden olyan esetben hatásos, ha hatásos becslés egyáltalán létezik. Az eddigiek természetesen nem jelentik azt, hogy minden maximum likelihood becslő hatásos, minthogy hatásos becslő nem mindig létezik. Ilyenkor a Cramer—Rao-egyenlőtlenségek semmit sem mondanak $\hat{a}_{ML}$ „jószágáról”.

Többdimenziós esetre a hatásosság feltételét külön nem vizsgáljuk, ez természetesen kiterjesztése az egydimenziós esetnek.

3. Szekvenciális becsléseknél különös fontossága van az aszimptotikus tulajdonságok vizsgálatának. Mint a 3.2.1. pontban láttuk, az aszimptotikus tulajdonságok a becslést olyan esetre minősítik, ha a megfigyelések száma, k tart a végtelenhez.

Az ML becslés a következő aszimptotikus tulajdonságokkal rendelkezik:

— a becslés konzisztens abban az értelemben, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P\{|\hat{a}_{ML(k)} - a| > \varepsilon\} = 0, \quad (3.128)$$

ahol $\varepsilon > 0$, egyébként tetszőleges érték.

— a becslés aszimptotikusan hatásos, vagyis

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{var} [\hat{a}_{ML(k)} - a | a]}{\left[-E \left\{ \frac{\partial^2 \ln f_{z|a}(z | a)}{\partial a^2} \right\} \right]^{-1}} = 1 \quad (3.129)$$

— a becslés aszimptotikusan normális eloszlású.

Megjegyezzük, hogy mind a (3.120), mind a (3.121) összefüggés egydimenziós esetre érvényes. Többdimenziós esetre az összefüggések általánosíthatók.

Az ML becslők kedvező aszimptotikus tulajdonságai indokolják gyakori alkalmazásukat még akkor is, ha az adott esetben hatásos becslés nem létezik.

4. Igazolható, hogy ha $\hat{a}_{ML}$ az a vektorváltozó maximum likelihood becslése, akkor az a valamely g függvényeként előálló $g(a)$ maximum likelihood becslése $g(\hat{a}_{ML})$, ahol g tetszőleges olyan függvény, amely az a valós szám n -est, valamely $g(a)$ valós szám m -esre képezi le, és $m \leq n$.

Ez az ún. invariancia elv azt a gyakorlatban jól használható tulajdonságot jelenti, hogy egy paraméter valamely függvényének ML becslése meghatározható a paraméter ML becslésének megfelelő függvényeként is.

5. A maximum likelihood becslőket a Bayes-becslőkkel összevetve nyilvánvaló, hogy jellemzői kedvezőtlenebbek lesznek. Ennek ellenére az ML becslőket gyakran alkalmazzák.

A gyakori alkalmazást indokolja:

- az eljárás egyszerűsége,
- az, hogy származtatásához kevés statisztikai előismeret szükséges,
- valamint, hogy szekvenciális megfigyelések mellett az aszimptotikus tulajdonságai kedvezőek.

Az ML becslőket sok esetben akkor is alkalmazzák, ha a rendelkezésre álló a priori ismeret Bayes (MAP)-becslést is lehetővé tenné, de az a posteriori sűrűségfüggvény meghatározása a likelihood függvény meghatározásánál sokkal nehezebb.

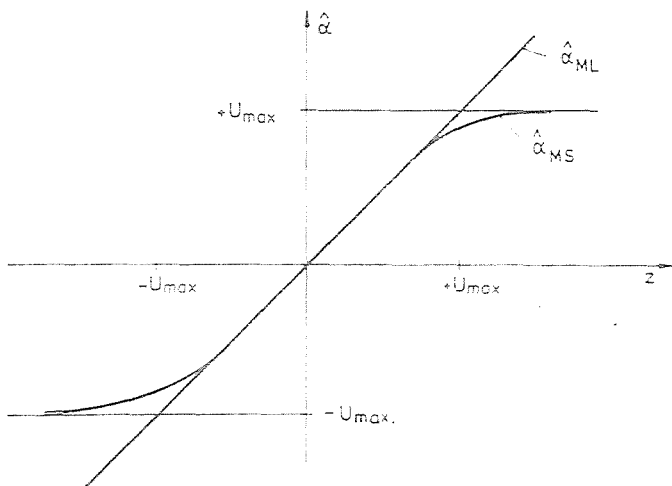
3.5. példa

Határozzuk meg a 3.1. példa megoldását arra az esetre, ha nem vesszük figyelembe a mérendő feszültség a priori sűrűségfüggvényét. Az ML becslés az $f_{z|a}(z | a)$ feltételes sűrűségfüggvény maximumához tartozó érték.

A 3.1. példában a (3.74) összefüggés adta meg $f_{z|a}(z | a)$ -t, amely olyan Gauss-sűrűségfüggvény, amelynek maximuma a z helyen van. A maximum likelihood becslés tehát egy megfigyelés esetén maga a megfigyelési érték

$$\hat{a}_{ML} = z. \quad (3.130)$$

A 3.12. ábra együtt ábrázolja az ML és az MS becsléseket a megfigyelés függvényében. Az ábrán jól látható az a priori ismeret hiányából adódó különbség.



3.12. ábra. Az ML és az MS becslések a megfigyelések függvényében

3.4.2. Gauss—Markov-becslő

Vizsgáljuk meg a maximum likelihood becslőt *Gauss*-megfigyelési zaj és lineáris megfigyelési egyenlet feltételezésével. Legyen a megfigyelési zaj várható értéke és kovarianciamátrixa a következő:

$$E\{\mathbf{n}\} = \mathbf{0}; \quad \text{cov}[\mathbf{n}, \mathbf{n}] = \Sigma_{nn} \quad (3.131)$$

tehát n dimenziós megfigyelések mellett a zaj sűrűségfüggvénye:

$$f_n(\mathbf{n}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma_{nn}|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{n}^T \Sigma_{nn}^{-1} \mathbf{n} \right]. \quad (3.132)$$

Felhasználva a

$$\mathbf{z} = \mathbf{U}\mathbf{a} + \mathbf{n} \quad (3.133)$$

lineáris megfigyelési egyenletet a likelihood függvény a következőre adódik:

$$f_{z|a}(\mathbf{z} | \mathbf{a}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma_{nn}|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{a})^T \Sigma_{nn}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{a}) \right], \quad (3.134)$$

melynek szélső értékét a likelihood egyenletből határozhatjuk meg:

$$\frac{\partial \ln f_{z|a}(\mathbf{z} | \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} [(\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{a})^T \Sigma_{nn}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{a})] \Big|_{\mathbf{a}=\hat{\mathbf{a}}_{ML}} = 0 \quad (3.135)$$

vagy

$$\mathbf{U}^T \Sigma_{nn}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{a} - \mathbf{U}^T \Sigma_{nn}^{-1} \mathbf{z} \Big|_{\mathbf{a}=\hat{\mathbf{a}}_{ML}} = 0. \quad (3.136)$$

Ha az $[\mathbf{U}^T \Sigma_{nn}^{-1} \mathbf{U}]^{-1}$ inverz létezik, a paraméter *Gauss—Markov*-becslése a következő:

$$\hat{\mathbf{a}}_{GM} = [\mathbf{U}^T \Sigma_{nn}^{-1} \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \Sigma_{nn}^{-1} \mathbf{z}. \quad (3.137)$$

A Gauss—Markov-becslő és a Gauss esetben nyert Bayes-becslő kapcsolata jól látható, ha (3.137)-et összevetjük (3.84)-gyel.

A Gauss—Markov-becslésnél nem ismerjük az $f_a(a)$ a priori sűrűségfüggvényt. Mint az előzőekben már láttuk ez úgy vehető figyelembe, hogy $f_a(a)$ -t végtelen varianciájú Gauss-sűrűségfüggvénynek tekintjük. Ilyenkor $\Sigma_{aa}^{-1} = 0$. Behelyettesítve ezt (3.84)-be, (3.137) közvetlenül adódik.

Megjegyzés: Láttuk, hogy a Gauss—Markov-becslés a maximum likelihood becslés olyan speciális esete, amikor a megfigyelési zaj Gauss-eloszlású, a megfigyelési egyenlet pedig lineáris. A Gauss—Markov-becslőre tehát mindazon tulajdonságok igazak, melyek általában az ML becslőkre teljesülnek. A speciális körülmények miatt azonban néhány további kedvező tulajdonsággal is rendelkezik.

1. A Gauss—Markov-becslés (3.137)-es összefüggését vizsgálva látható, hogy a becslés a megfigyelés lineáris függvénye.

2. A becslő torzítatlan, hiszen felhasználva a megfigyelési egyenletet:

$$\begin{aligned} E\{\hat{\alpha}_{GM} | a\} &= [U^T \Sigma_{nn}^{-1} U]^{-1} U^T \Sigma_{nn}^{-1} [Ua + E\{n\}] = \\ &= [U^T \Sigma_{nn}^{-1} U]^{-1} [U^T \Sigma_{nn}^{-1} U]a = a. \end{aligned} \quad (3.138)$$

3. A becslő hatásos. A hatásosság eldöntéséhez a kovarianciamátrixot a Cramer—Rao-korláttal kell összehasonlítani. A kovarianciamátrixot a következő összefüggés adja meg:

$$\text{cov} [\hat{\alpha}_{GM}, \hat{\alpha}_{GM}] = E\{(\hat{\alpha}_{GM} - a)(\hat{\alpha}_{GM} - a)^T\} = [U^T \Sigma_{nn}^{-1} U]^{-1}. \quad (3.139)$$

A Fisher információs mátrixot a (3.134)-ben megadott likelihood függvényből kiindulva nyerhetjük:

$$\frac{\partial \ln f_{z|a}(z | a)}{\partial a} = U^T \Sigma_{nn}^{-1} (z - Ua), \quad (3.140)$$

$$J = - \frac{\partial}{\partial a} [U^T \Sigma_{nn}^{-1} (z - Ua)]^T = U^T \Sigma_{nn}^{-1} U. \quad (3.141)$$

Összevetve a (3.139)-ben adott kovarianciamátrixot az információs mátrixszal látható, hogy

$$\text{cov} [\hat{\alpha}_{GM}, \hat{\alpha}_{GM}] = J^{-1}, \quad (3.142)$$

vagyis a hatásosságot jelentő egyenlőség teljesül, tehát a Gauss—Markov-becslő az összes torzítatlan becslőt tekintetbe véve minimális varianciájú.

4. A (3.137) összefüggésből látható, hogy a becslés csupán a megfigyelési zaj első és második momentumától függ. Bár ezt az eredményt Gauss-eloszlás feltételezésével kaptuk, később látni fogjuk (3.5.3. pont), hogy a Gauss—Markov-becslés Gauss-feltételezés nélkül is származtatható, mint legkisebb négyzetes hibájú súlyozott torzítatlan becslés, ahol a súlymátrix a megfigyelési zaj kovarianciamátrixának inverze. Az eredményt ekkor a zaj eloszlásától függetlenül nyerjük, amely azonban csak Gauss-esetben egyezik meg az ML becsléssel.

3.6. példa

Határozzuk meg a 3.2. példa ML becslését. A megfigyelések továbbra is

$$z_k = a + n_k \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.143)$$

összefüggéssel modellezhetők, ahol feltételezzük, hogy $\{n_k\}$ diszkrét Gauss fehérzaj folyamat.

A zaj jellemzői tehát :

$$E\{n_k\}=0; \quad \text{cov}[n_k, n_j]=\sigma_n^2 \delta_{kj}. \quad (3.144)$$

A becslés meghatározásához írjuk fel a likelihood függvényt. A független megfigyelések miatt

$$f_{z|a}(z|a)=\prod_{k=1}^N f_{z_k|a}(z_k|a)=\frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{N/2}} \exp\left[-\sum_{k=1}^N (z_k-a)^2 \frac{1}{2\sigma_n^2}\right], \quad (3.145)$$

amelyből a likelihood egyenlet

$$\left. \frac{\partial \ln f_{z|a}(z|a)}{\partial a} \right|_{a=\hat{a}_{ML}} = \frac{N}{\sigma_n^2} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z_k - a \right] \Big|_{a=\hat{a}_{ML}} = 0. \quad (3.146)$$

így

$$\hat{a}_{ML} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z_k, \quad (3.147)$$

vagyis a paraméter ML becslése a megfigyelések átlaga. A becslés torzítatlan, mivel

$$E\{\hat{a}_{ML} | a\} = a. \quad (3.148)$$

A Gauss-eloszlás miatt a hatásosság feltétele is teljesül, tehát a kapott becslés hatásos. A becslés varianciája ezért a Cramer—Rao-korlát meghatározásával is kiszámítható

$$\text{var}[(\hat{a}_{ML} - a) | a] = \left[-\frac{\partial^2 \ln f_{z|a}(z|a)}{\partial a^2} \right]^{-1} = \frac{\sigma_n^2}{N}. \quad (3.149)$$

Látható, hogy a variancia N megfigyelés esetén a megfigyelési zaj varianciájának N -ed része.

Írjuk fel az eredményt rekurzív alakban is. Ehhez $(N-1)$ megfigyelés alapján adjuk meg az ML becslést.

Az előzők szerint:

$$\hat{a}_{N-1} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} z_k. \quad (3.150)$$

Ennek felhasználásával a rekurzív forma felírható :

$$\hat{a}_N = \frac{1}{N} [(N-1)\hat{a}_{N-1} + z_N] = \hat{a}_{N-1} + \frac{1}{N} (z_N - \hat{a}_{N-1}). \quad (3.151)$$

A becslés rekurzív formája azt mutatja, hogy az új ML becslés az előző becslésből és egy korrekciós tagból áll, ahol a korrekciós tag a régi becslés és az új megfigyelés különbségének függvénye. Az $1/N$ szorzófaktor N növelésével egyre csökken, így a korrekció hatása a megfigyelések számának növelésével szintén csökken. Minthogy a rekurzív ML becslés csupán az előző eredmény más formában történő megadása, tulajdonságai a nemrekurzív becslés tulajdonságaival megegyeznek.

3.7. példa

Az előző példában fehér megfigyelési zajt tételeztünk fel. A mérési feladatok jelentős része pontosabban modellezhető színes zaj feltételezésével, vagyis amikor az egymást követő zajminták nem korrelálatlanok. Nézzük meg ezért, hogyan alakul az előző példa eredménye színes zaj mellett. Mivel továbbra is Gauss-eloszlású a megfigyelési zaj, az eredmény Gauss—Markov-bebecslésként is nyerhető.

Megfigyeléseinkre most is lineáris modellt tételeztünk fel

$$z_k = a + n_k \quad 1 \leq k \leq N, \quad (3.152)$$

ahol az a konstans, skalár paramétert kívánjuk becsülni. Az n_k megfigyelési zaj jellemzői:

$$E\{n_k\} = 0; \quad \text{cov}[n_k, n_j] = \sigma_{j,k} \sigma_n^2. \quad (3.153)$$

Az N megfigyelést és a megfigyelési zajt írjuk fel N dimenziós vektor formájában

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}; \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_N \end{bmatrix}. \quad (3.154)$$

Ezekkel a megfigyelési egyenlet a következő:

$$\mathbf{z} = \mathbf{U}a + \mathbf{n}, \quad (3.155)$$

ahol

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{egy } N \times 1\text{-es mátrix.}$$

A Gauss—Markov-bebecslés (3.137) összefüggése szerint

$$\hat{a}_{\text{GM}} = \hat{a}_{\text{ML}} = [\mathbf{U}^T \Sigma_{\text{nn}}^{-1} \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \Sigma_{\text{nn}}^{-1} \mathbf{z}. \quad (3.156)$$

A megfigyelési zaj kovarianciamátrixának elemeit (3.153) adja meg:

$$\Sigma_{\text{nn}}(j, k) = \text{cov}[n_j, n_k] = \varrho_{jk} \sigma_n^2. \quad (3.157)$$

A becslés kovarianciamátrixa (3.139) alapján

$$\text{cov}[\hat{a}_{\text{GM}}, \hat{a}_{\text{GM}}] = [\mathbf{U}^T \Sigma_{\text{nn}}^{-1} \mathbf{U}]^{-1}. \quad (3.158)$$

Mind a becslés, mind a kovarianciamátrix kiértékeléséhez mátrix inverzióra van szükség, amely különösen ha N nagy, meglehetősen számításigényes.

Tételezzük fel ezért, hogy $\varrho_{j,k} = \delta(j-k)$, amely a fehér megfigyelési zajnak felel meg. A kapott becslés ilyenkor megegyezik a minták átlagával (lásd 3.6. példa).

$$\hat{a}_{\text{GM}} = \hat{a}_{\text{ML}} = [\mathbf{U}^T \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{z} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z_k. \quad (3.159)$$

Ha ugyanezt a becslést alkalmazzuk színes zaj mellett is a becslés varianciája a zaj-minták korreláltsága miatt lassabban csökken N növelésével, mint fehér zaj esetében.

Ott ugyanis a variancia

$$\text{var} [\hat{a}_{\text{ML}}] = \frac{\sigma_n^2}{N} \quad (3.160)$$

volt, míg színes zaj mellett

$$\text{cov} [\hat{a}_{\text{GM}}, \hat{a}_{\text{GM}}] = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N q_{jk} \sigma_n^2}{N^2} = \frac{1}{N} \sigma_n^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N q_{jk} \sigma_n^2. \quad (3.161)$$

A becslés varianciáját úgy is csökkenthetjük, ha a megfigyeléseket olyan idő-közönként vesszük, ahol $q_{jk} \ll 1$, s így a mintavételezett folyamatban a zajkomponens közel fehérnek tekinthető.

A kapott becslés — ahol a színes megfigyelési zaj ellenére a fehér zajnak megfelelő eredményt használjuk — tulajdonságai kedvezőtlenebbek lesznek, mintha a színes zajra vonatkozó Gauss—Markov-becslést alkalmaznánk. A becslés meghatározása, a becslési algoritmus realizálása azonban lényegesen egyszerűbb.

3.5. Legkisebb négyzetes hibájú becslők

Láttuk, hogy általában a becslők az a priori ismeretek és valamilyen alkalmasan megválasztott hibakritérium alapján származtathatók.

A Bayes-becslőknél a becsülni kívánt paraméter és a megfigyelések statisztikai jellemzőit kellett ismerni, az ML becslőknél a megfigyelések feltételes sűrűségfüggvényének a priori ismeretére volt szükség.

A priori ismeret hiányában viszont csupán a mérendő rendszer és a modell közötti valamilyen értelemben megfogalmazott eltérés minimalizálása lehet a származtatás alapja.

A legkisebb négyzetes hibájú becslőkhöz négyzetes hibakritérium alapján jutunk el, vagyis, ha a mérendő rendszerről nyert megfigyelések és a modell kimenetén kapott értékek különbségének négyzetét minimalizáljuk.

A négyzetes kritérium mellett sok elméleti és gyakorlati megfontolás szól, így pl.: könnyen kezelhető analitikusan, fizikailag jól interpretálható (pillanatnyi teljesítmény, energiatartalom stb.) és nem utolsósorban az ilyen kritérium alapján származtatott becslő könnyen realizálható. E kedvező tulajdonságok is közrejátszanak abban, hogy a legkisebb négyzetes hibájú becslők a becslésemélet egyik leggyakrabban alkalmazott témakörét képezik.

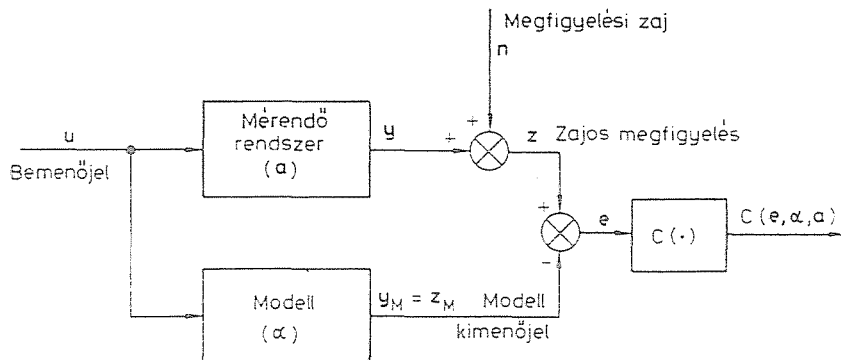
A fejezet célja a legkisebb négyzetes hibájú becslők származtatásának, legfontosabb tulajdonságainak bemutatása. A következőkben előbb a nemrekurzív LS becslők származtatását adjuk meg (3.5.1. pont), majd a rekurzív megoldást ismertetjük (3.5.2. pont). A 3.5.3. pontban a rekurzív LS becslők idővariáns paraméterek becslésére alkalmas módosításával foglalkozunk.

3.5.1. Nemrekurzív legkisebb négyzetes hibájú becslők

A legkisebb négyzetes hibájú becslés feladatát a következőképpen fogalmazhatjuk meg: a mérendő rendszer ismeretlen a paraméterének olyan $\hat{\alpha}$ becslését keressük, amely mellett a rendszerről nyert megfigyelés (z) és a modell kimenőjelének (y_M) négyzetes eltéréseként definiált hiba (3.13. ábra)

$$C(a, \alpha) = (z - y_M)^T (z - y_M) \quad (3.162)$$

minimális lesz.



3.13. ábra. A négyzetes hibafüggvény értelmezése

A becslést a mérendő rendszerről nyert megfigyelés felhasználásával valamilyen $\hat{\alpha} = g(z)$ összefüggés szerint kaphatjuk.

Vizsgálatainkkor feltételezzük, hogy a keresett paraméter $a^T = [a_1, a_2, \dots, a_m]$ m dimenziós, a $z^T = [z_1, z_2, \dots, z_n]$ megfigyelés n dimenziós vektor, valamint hogy a megfigyelések és a paraméter között

$$z_i = f_i(a) + n_i \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.163)$$

függvénykapcsolat van, ahol az n_i értékek a megfigyelések hibáit jelentik, az $f_i(a)$ függvény pedig az i -edik megfigyelés és a keresett paraméter kapcsolatát adja meg zajmentes esetben. Fenti megadás megengedi, hogy az egyes megfigyeléskomponensek és a mérendő paraméter között eltérő függvénykapcsolat legyen. A megfigyelések hibái a mérőeszköz pontatlanságából, a jelátviteli csatorna zajából vagy az $f_i(a)$ függvény nem megfelelő megválasztásából adódhatnak. A továbbiakban az $\{n_i\}$ értékeket az eddigiekhez hasonlóan megfigyelési zajnak nevezzük.

Mint hogy a modell kimenete és az α paraméter közötti kapcsolat a következő:

$$z_{M_i} = y_{M_i} = f_i(\alpha), \quad (3.164)$$

a minimálandó négyzetes eltérés a következő formába írható:

$$C(a, \alpha) = \sum_{i=1}^n (z_i - z_{M_i})^2 = \sum_{i=1}^n [z_i - f_i(\alpha)]^2. \quad (3.165)$$

A feladat tehát az így definiált hibakritérium minimumhelyének megkeresése α függvényében.

Az LS becslés meghatározásához deriváljuk (3.165)-öt α szerint. A deriválást komponensenként elvégezve m egyenletet kapunk, melyek megoldása eredményezi $\hat{\alpha}_{LS}$ -et. Az m egyenlet, melyeket normál egyenletnek szokás hívni, a következő formába írható:

$$\sum_{i=1}^n [z_i - f_i(\alpha)] \frac{\partial f_i(\alpha)}{\partial \alpha_j} \Big|_{\alpha = \hat{\alpha}_{LS}} = 0. \quad (3.166)$$

A megoldás bonyolultsága nyilvánvalóan jelentős mértékben függ attól, hogy a $z = f(a)$ függvénykapcsolat lineáris vagy nemlineáris.

Nemlineáris modell esetén a normál egyenletek is nemlineáris függvényei lesznek a keresett paraméternek. Megoldásuk ezért általában komoly nehézségekbe ütközik. Sok esetben a legcélravezetőbb iteratív eljárás alkalmazása. Néhány ilyen iteratív minimumkereső eljárással a 3.6. szakaszban foglalkozunk.

A legkisebb négyzetes hibájú becslők minősítésére statisztikai ismeretek hiányában az $\tilde{a} = \hat{a} - a$ hibavektor alkalmas. Bebizonyítható, hogy amennyiben az f_i függvények bizonyos — meglehetősen gyenge — feltételeknek eleget tesznek, a becslés hibájára a következő közelítés adható:

$$\tilde{a} = \hat{a} - a \cong [B(a)]^{-1} d(a) n, \quad (3.167)$$

ahol $d(a)$ egy olyan $m \times n$ -es mátrix, melynek elemei az f_i függvények ($i = 1, 2, \dots, n$ a_j szerinti ($j = 1, 2, \dots, m$) parciális deriváltjai

$$d_{ji} = \frac{\partial f_i(a)}{\partial a_j}, \quad (3.168)$$

$B(a)$ pedig $d(a)$ felhasználásával a következő $m \times m$ -es mátrixot jelöli:

$$B(a) = [d(a)][d(a)]^T. \quad (3.169)$$

A (3.167) összefüggés a hiba elsőrendű közelítése, vagyis az $\tilde{a} = \hat{a} - a$ Taylor-sorának első tagja.

Az általános eset vizsgálata után a következőkben tételezzük fel, hogy a megfigyelések a mérendő paraméter lineáris függvényei. Látni fogjuk, hogy lineáris modell esetén az LS becslés egyszerűen a megfigyelések lineáris függvényeként határozható meg. Az egyszerű megvalósíthatóság miatt ezért sok esetben akkor is célszerű a lineáris modellel való közelítést alkalmazni, ha valójában nemlineáris esettel állunk szemben. Tételezzük fel tehát, hogy a z megfigyelés és az a mérendő paraméter kapcsolata a következő:

$$z = Ua + n, \quad (3.170)$$

ahol U egy $n \times m$ -es mátrix, n pedig most is a megfigyelési zaj.

Az optimumkeresés alapját képező hibafüggvény:

$$C(\alpha, a) = (z - U\alpha)^T (z - U\alpha), \quad (3.171)$$

amely a következő formába is írható:

$$C(\alpha, a) = z^T z + (U\alpha)^T (U\alpha) - z^T U\alpha - (U\alpha)^T z. \quad (3.172)$$

A hibafüggvény minimumához tartozó α érték, tehát a legkisebb négyzetes hibához tartozó becslés, a

$$\frac{\partial C(\alpha, a)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha = \hat{\alpha}_{LS}} = 0$$

egyenlet megoldása útján nyerhető. Elvégezve a deriválást és felhasználva, hogy $(\hat{\mathbf{U}}\boldsymbol{\alpha})^T = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{U}^T$ kapjuk a minimum elérésének feltételét:

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{U}^T \mathbf{z} |_{\boldsymbol{\alpha} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{LS}} = 0, \quad (3.173)$$

amelyből a normál egyenlet a következőre adódik:

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{LS} = \mathbf{U}^T \mathbf{z}. \quad (3.174)$$

Amennyiben $[\mathbf{U}^T \mathbf{U}]$ invertálható, létezik egyértelmű megoldás:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{LS} = [\mathbf{U}^T \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{z}. \quad (3.175)$$

A becslési hiba ebből (3.170) felhasználásával egyszerűen nyerhető:

$$\tilde{\mathbf{a}} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{LS} - \mathbf{a} = [\mathbf{U}^T \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{n}. \quad (3.176)$$

Megjegyzések:

1. A négyzetes hibakritérium (3.165) definíciója általánosítható a következő módon: legyen

$$C(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i,k=1}^n [z_i - f_i(\boldsymbol{\alpha})] q_{ik} [z_k - f_k(\boldsymbol{\alpha})] \quad (3.177)$$

az általánosított minimálandó hibakritérium, ahol a q_{ik} együtthatók az egyes hibakomponensekhez rendelt súlytényezőket jelentik.

Az így definiált súlyozott négyzetes hibakritérium lehetőséget ad arra, hogy az egyes hibakomponenseket az eredő hibában különböző súllyal vegyük figyelembe.

A súlyozott négyzetes hibakritérium alkalmazását indokolhatja pl., ha a $\mathbf{z}$ megfigyelésvektor egyes komponenseit különböző pontossággal nyerjük. Célszerű pl. a kevésbé bizonytalan megfigyelések hatását nagyobb súllyal, a pontatlanabb megfigyeléseket pedig kisebb súllyal figyelembe venni a becslő származtatásánál.

A súlytényezők ilyen megválasztása lényegében bizonyos előismeretet tételez fel a megfigyelési zajról. Mint a későbbiekben látni fogjuk, amennyiben a zajról a priori ismeretek állnak rendelkezésünkre, a súlyfaktorokat ezzel összhangban célszerű megválasztani.

Az általánosított hibakritérium minimumhelyének megkeresése súlyozott LS becsléseknél is a normál egyenletekhez vezet. A (3.177) összefüggést $\boldsymbol{\alpha}$ szerint deriválva az m megoldandó egyenlet a következő alakú:

$$\sum_{i,k=1}^n \left\{ [z_i - f_i(\boldsymbol{\alpha})] q_{ik} \frac{\partial f_k(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j} + [z_k - f_k(\boldsymbol{\alpha})] q_{ik} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j} \right\} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.178)$$

Az általánosított becslés hibája a (3.167)-hez hasonlóan közelítőleg a következő formában adható meg:

$$\tilde{\mathbf{a}} = \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \mathbf{a} \cong [\mathbf{B}(\mathbf{a})]^{-1} \mathbf{d}(\mathbf{a}) \mathbf{Q} \mathbf{n}, \quad (3.179)$$

ahol $\mathbf{Q}$ a q_{ik} elemekből felépített $n \times n$ -es szimmetrikus pozitív definit súlymátrix.

Látható (3.177)-ből, hogy a súlyozott négyzetes hibakritérium $q_{ik} = \delta_{ik}$ mellett visszaadja a közönséges négyzetes hibakritériumot.

Ilyenkor $\mathbf{Q} = \mathbf{E}$.

2. Lineáris modell esetén az általánosított LS becslésből származó normál egyenlet a következő

$$[U^TQU]\hat{\alpha}_{LS}=U^TQz. \quad (3.180)$$

amelyből, ha U^TQU invertálható, adódik az egyértelmű megoldás:

$$\hat{\alpha}_{LS}=[U^TQU]^{-1}U^TQz. \quad (3.181)$$

A becslés hibája

$$\tilde{a}=[U^TQU]^{-1}U^TQn. \quad (3.182)$$

Lineáris modell esetén a (3.179) összefüggés a becslési hiba pontos értékét adja, így megegyezik (3.182) eredményével.

3. Az eddigiekből látható, hogy a legkisebb négyzetes hibájú becslők származtatásánál semmilyen statisztikai ismeretet nem használtunk fel. A kapott eredmények érvényesek függetlenül attól, hogy az a paraméter, ill. a megfigyelési zaj mintái valószínűségi változók-e vagy sem. Amennyiben valószínűségi változók, az eredményeket nem befolyásolja, hogy milyen statisztikai jellemzőkkel rendelkeznek.

4. Az előzőből következik, hogy a becslés eredményéhez nem rendelhetünk statisztikai jellemzőket — mint torzítás vagy variancia —, a becslés minősítésére ezért az $\tilde{a}$ becslési hiba szolgál, amely a konkrét megfigyelési zaj függvénye.

A becslési hiba ilyen megfogalmazása [lásd a (3.167), (3.176) és (3.179), (3.182) összefüggéseket] azonban csupán azt a várható tényt mutatja, hogy ha nem volna megfigyelési zaj, a becslés hibátlan lenne. Konkrét becslési feladatok megoldásánál, mivel a zaj megfigyelési értékei ismeretlenek, ezen összefüggések a hiba meghatározására nem alkalmasak.

5. A becslés jellemzésére a megadott összefüggések csak akkor szolgáltatnak gyakorlatban is kiértékelhető eredményt, ha a megfigyelési zajról van a priori ismeretünk. Amennyiben a megfigyelési zajhoz statisztikai jellemzőket rendelhetünk, lehetséges a becslés statisztikai minősítése, vagyis a szokásos jellemzők, tulajdonságok megadása (torzítás, variancia stb.).

Tételezzük fel, hogy adott $E\{n\}=\mu_n$ várható érték és $\text{cov}[n, n]=\Sigma_{nn}$ kovarianciamátrix. Ekkor a lineáris modell esetét vizsgálva, a becslési hiba várható értéke a (3.182) összefüggés felhasználásával

$$E\{\tilde{a} | a\}=[U^TQU]^{-1}U^TQE\{n\}, \quad (3.183)$$

amely nulla várható értékű megfigyelési zaj mellett a becslés torzítatlanságát jelenti:

$$E\{\tilde{a} | a\}=0 \quad (3.184)$$

vagy másképp fogalmazva

$$E\{\hat{\alpha}_{LS} | a\}=a. \quad (3.185)$$

A becslés kovarianciamátrixa pedig:

$$\text{cov}[\hat{\alpha}_{LS}, \hat{\alpha}_{LS}]=[U^TQU]^{-1}U^TQ\Sigma_{nn}QU[U^TQU]^{-1}. \quad (3.186)$$

6. Feltételezve, hogy a megfigyelési zaj kovarianciamátrixa (Σ_{nn}) ismert, választhatjuk a súlymátrixot a következőképpen:

$$Q=V^{-1}V^T, \quad V^TQ=\Sigma_{nn}^{-1} \quad (3.187)$$

Az (1.10) és (1.11) lineáris modell helyett erre az esetre:

$$y=Ux, \quad U^T\Sigma^{-1}y=U^T\Sigma^{-1}Ux. \quad (3.188)$$

Ha a kapott összefüggést összevetjük a Gauss—Markov-becslés (3.137) összefüggésével látható, hogy azonos becslést kaptunk. Addig azonban, amíg (3.137)-et olyan maximum likelihood becslésként származtattuk, amikor a megfigyelési zaj Gauss-eloszlású, súlyozott legkisebb négyzetes hibájú becslésként a zaj eloszlásának feltételezése nélkül nyertük az eredményt. A súlyozott LS becslés (3.186) és a Gauss—Markov-becslés (3.141) kovarianciamátrixát összevetve látható, hogy

$$\text{cov} [\hat{\alpha}_{\text{GM}}, \hat{\alpha}_{\text{GM}}] \leq \text{cov} [\hat{\alpha}_{\text{LS}}, \hat{\alpha}_{\text{LS}}], \quad (3.189)$$

ahol az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$Q = \Sigma_{nn}^{-1}. \quad (3.190)$$

A kapott becslés tehát általános esetben (a megfigyelési zaj eloszlásától függetlenül) torzítatlan és a lineáris becslések között minimális varianciájú, amennyiben azonban a zaj Gauss-eloszlású, maximum likelihood becslést nyertünk, tehát a becslés egyben hatásos is.

A Gauss-eloszlás ténye természetesen nem a becslés varianciáját befolyásolja, csupán a becslés optimalitásának körét határozza meg (az optimum tulajdonság csak a lineáris becsléseket tekintve, vagy általánosan áll fenn).

Végül meg kell említeni azt az esetet is, amikor a súlymátrixot nem a megfigyelési zaj kovarianciamátrixának inverzeként választjuk meg annak ellenére, hogy Σ_{nn} ismert. Az eltérő megválasztást elsősorban számítási egyszerűsítések indokolhatják. A legkézenfekvőbb, hogy diagonális súlymátrixot választunk akkor is, ha a megfigyelést színes zaj terheli, vagyis ha Σ_{nn} nem diagonális (lásd 3.7. példa).

Ez természetesen a becslés varianciájának növekedését eredményezi. Q tényleges megválasztását ezért egyrésztől a kívánt pontosság, másrésztől a számítási nehézségek és a számítás sebessége befolyásolja.

3.8. példa

Legyen a mérendő paraméter és a megfigyelés közötti kapcsolat a következő:

$$z_i = f_i(a) + n_i = e^{-at_i} + n_i \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.191)$$

Az adott nemlineáris kapcsolat számos gyakorlati problémánál jelentkezik. Ezek közül csupán egyet említünk meg: ha t időt jelent, az ismeretlen paraméter a vizsgált rendszer időállandójának reciproka.

A mérési feladat tehát a következő: egy ismeretlen időállandójú rendszer kimenőjelét mérve az időállandó legkisebb négyzetes hibájú becslését kívánjuk meghatározni, feltételezve, hogy a kimenőjel végértékét ismerjük.

A megfigyeléseknél jelentkező mérési pontatlanságot n_i képviseli.

Alkalmazva (3.166)-ot a normál egyenlet nyerhető

$$\sum_{i=1}^n [z_i - f_i(x)] \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} \Big|_{x=\hat{\alpha}_{\text{LS}}} = 0. \quad (3.192)$$

Mivel

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x} = -t_i e^{-at_i} \quad (3.193)$$

$$\sum_{i=1}^n [z_i - e^{-at_i}] [-t_i e^{-at_i}] \Big|_{a=\hat{\alpha}_{\text{LS}}} = 0, \quad (3.194)$$

vagy

$$\sum_{i=1}^n z_i t_i e^{-z t_i} - \sum_{i=1}^n t_i e^{-2 z t_i} \Big|_{\alpha=\hat{\alpha}_{LS}} = 0. \quad (3.195)$$

Látható, hogy még ebben az egyszerű nemlineáris esetben, skalár paraméter mellett sem könnyű a normál egyenlet megoldása.

Többdimenziós mérendő paraméter esetében és bonyolultabb modell mellett a megoldás különösen nehéz lehet, így csaknem minden esetben iteratív eljárást kell alkalmazni.

3.9. példa

Mint a 2.5.6. pontban láttuk, a jelek leírásának egyik lehetősége, hogy a jelet egy ismert bemenőjellel gerjesztett lineáris rendszer kimenőjének tekintjük. A jel ebben az esetben jellemezhető a generáló rendszer jellemzőivel. Amennyiben a rendszerről paraméteres modellt állítunk fel, a jel leírása ezen rendszerparaméterek meghatározását igényli. A rendszerparaméterek a leírandó jel mintavételi értékeinek — mint megfigyelési értékeknek — a felhasználásával határozhatók meg.

A megfigyelt jel és a modell kimenőjele természetesen nem egyezik meg pontosan.

A modell kimenet és a megfigyelés eltérését megfigyelési zajként vehetjük figyelembe.

A megfigyelési zaj oka lehet az egyes megfigyeléseknél jelentkező mérési hiba, vagy eredhet a modell nem megfelelő megválasztásából is. Az alábbiakban feltételezzük, hogy a jelet generáló rendszer MA típusú, vagyis egy nemrekurzív digitális szűrőként realizálható.

MA paraméterek LS becslése

Tételezzük fel, hogy egy sztochasztikus folyamat egy MA rendszer kimenőjével modellezhető, vagyis

$$y_n = \sum_{k=0}^p b_k x_{n-k} \quad n=1, 2, \dots, N, \quad (3.196)$$

ahol az x_l , $l=1-p, \dots, N$ bemenőjel értékek ismertek, a b_k , $k=0, 1, \dots, p$ rendszerparaméterek pedig ismeretlenek.

A folyamatról kapott megfigyelések a keresett paraméterek lineáris függvényei

$$z = Ub + n. \quad (3.197)$$

Itt z a megfigyelésekből képzett megfigyelési vektor

$$z^T = [z_1, z_2, \dots, z_N], \quad z_n = y_n + n_n.$$

U az ismert x_l értékekből felépülő $N \times (p+1)$ -es mátrix:

$$U = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_{1-k} & \dots & x_{1-p} \\ x_2 & & x_{2-k} & \dots & x_{2-p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_n & \dots & x_{n-k} & \dots & x_{n-p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_N & \dots & x_{N-k} & & x_{N-p} \end{bmatrix}, \quad (3.198)$$

n pedig a megfigyelési zajvektor.

A $\mathbf{b}^T = [b_0, b_1, \dots, b_p]$ együttthatóvektor $\hat{\mathbf{b}}_{LS}$ becslését a $\hat{\mathbf{b}}_{LS} = [\mathbf{U}^T \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{z}$ összefüggés adja meg.

Figyelembe véve $\mathbf{U}$ értékét

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \sum_{n=1}^N \begin{bmatrix} x_n^2 & x_{n-1}x_n & \dots & x_{n-p}x_n \\ x_n x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-p}x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n x_{n-p} & \dots & \dots & x_{n-p}^2 \end{bmatrix} \quad (3.199)$$

és

$$\mathbf{U}^T \mathbf{z} = \sum_{n=1}^N \begin{bmatrix} x_n z_n \\ x_{n-1} z_n \\ \vdots \\ x_{n-p} z_n \end{bmatrix}. \quad (3.200)$$

Az $\mathbf{U}^T \mathbf{U}$ mátrix elemei a rendszer diszkrét bemenőjelmintáiból becsült autokorreláció értékét jelentik.

$$\hat{R}_{xx}(k-p) = \sum_{n=1}^N x_{n-k} x_{n-p}, \quad (3.201)$$

vagyis

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \hat{\mathbf{R}}_{xx}, \quad (3.202)$$

míg $\mathbf{U}^T \mathbf{z}$ a bemenőjel és a megfigyelések keresztkorrelációs mátrixának, $\mathbf{R}_{xz}$ -nek a becslését adják

$$\mathbf{U}^T \mathbf{z} = \hat{\mathbf{R}}_{xz}, \quad (3.203)$$

tehát:

$$\hat{\mathbf{b}}_{LS} = \hat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{xz}. \quad (3.204)$$

Megjegyzés: A példában a rendszerparaméterek LS becslése a korrelációs mérés-technika alkalmazására vezetett. A korrelációs mérés-technika néhány egyéb alkalmazásával a 2.5.1. pont és a 2.11. példa foglalkozik.

3.5.2. Rekurzív legkisebb négyzetes becslés

A négyzetes becslések is megvalósíthatók rekurzív formában, biztosítva ezzel a szekvenciális megfigyelések hatékony felhasználását, idővariáns esetben pedig a paraméterek változásának követését.

A nemrekurzív becsléseknél a $\mathbf{z}^T = [z_1, z_2, \dots, z_n]$ megfigyelésvektor felhasználásával adtuk meg az $\mathbf{a}^T = [a_1, a_2, \dots, a_m]$ paramétervektor becslését. Most tételezzük fel, hogy a mérendő rendszerről további megfigyelések állnak rendelkezésünkre, tehát a megfigyelések újabb vektor n -esekkel bővíthetők.

A rekurzív becslések származtatását ezért a $\{z_1, z_2, \dots, z_k, \dots\}$ n dimenziós megfigyelésvektorok sorozata alapján végezzük. A további tárgyalás előtt vezessük be a következő jelöléseket. Jelölje $\hat{\alpha}_{|k}$ a -nak azt a becslését, amelyet a

$$\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$$

megfigyelési szekvencia felhasználásával nyerünk. Ugyanakkor jelölje $\hat{\alpha}(z_j)$ a megfigyelési szekvencia j -edik elemének felhasználásával kapott becslést. Hasonlóképpen $\tilde{a}_{|k}$ annak a becslésnek a hibáját jelöli, amelyet a $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ megfigyelések alapján nyertünk, tehát

$$\tilde{a}_{|k} = \hat{\alpha}_{|k} - a, \quad (3.205)$$

míg $\tilde{a}(z_j)$ a j -edik megfigyelés alapján kapott becslés hibája, vagyis

$$\tilde{a}(z_j) = \hat{\alpha}(z_j) - a. \quad (3.206)$$

A jelöléseknél a legkisebb négyzetes hibára utaló LS indexet a jobb áttekinthetőség érdekében elhagyjuk.

A rekurzív LS becslések származtatását csak lineáris modell esetére végezzük el. A nemlineáris eset vizsgálata meghaladja a jelen lehetőségeket, így csak a témával foglalkozó irodalomra utalhatunk.

A legkisebb négyzetes hibájú becslés az alábbi hibafüggvény minimálásán alapult:

$$C(\alpha_{|k}) = [z_{|k}(a) - z_{M|k}(\alpha_{|k})]^T [z_{|k}(a) - z_{M|k}(\alpha_{|k})], \quad (3.207)$$

ahol $z_{|k} = [z_1, z_2, \dots, z_k]$ megfigyelési szekvencia elemeiből alkotott $(k \times n)$ dimenziós vektor, $z_{M|k}$ pedig a modell kimenetén kapott hasonló dimenziós vektor, vagyis

$$z_{|k} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_k \end{bmatrix}; \quad z_{M|k} = \begin{bmatrix} z_{M1} \\ z_{M2} \\ \vdots \\ z_{Mk} \end{bmatrix}. \quad (3.208)$$

A rekurzív becslés származtatásához tételezzük fel, hogy újabb megfigyelések állnak rendelkezésünkre.

Lineáris modell feltételezésével legyen a $(k+1)$ -edik megfigyelés a következő:

$$z_{k+1} = U_{k+1}a + n_{k+1}. \quad (3.209)$$

Az új megfigyelést is figyelembe véve a $k+1$ megfigyelésvektorra vonatkozó összefüggés az alábbi formában is felírható:

$$z_{|k+1} = U_{|k+1}a + n_{|k+1}, \quad (3.210)$$

ahol

$$z_{|k+1} = \begin{bmatrix} z_{|k} \\ z_{k+1} \end{bmatrix}, \quad n_{|k+1} = \begin{bmatrix} n_{|k} \\ n_{k+1} \end{bmatrix}. \quad (3.211)$$

$U_{|k+1}$ pedig az egyes megfigyelésvektorokhoz tartozó

$$\{U_1, U_2, \dots, U_n, U_{k+1}\}$$

mátrixokból álló $(k+1) \cdot n \cdot m$ -es mátrix, azaz

$$\mathbf{U}_{|k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{|k} \\ \mathbf{U}_{k+1} \end{bmatrix}. \quad (3.212)$$

A legkisebb négyzetes hibájú becslés (3.176) összefüggését felhasználva nyerhető a $(k+1)$ megfigyelésen alapuló becslés

$$\hat{\mathbf{a}}_{|k+1} = [\mathbf{U}_{|k+1}^T \mathbf{U}_{|k+1}]^{-1} \mathbf{U}_{|k+1}^T \mathbf{z}_{|k+1}. \quad (3.213)$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\mathbf{P}_{|k+1} = [\mathbf{U}_{|k+1}^T \mathbf{U}_{|k+1}]^{-1}. \quad (3.214)$$

Ezzel

$$\hat{\mathbf{a}}_{|k+1} = \mathbf{P}_{|k+1} \mathbf{U}_{|k+1}^T \mathbf{z}_{|k+1}. \quad (3.215)$$

$\mathbf{P}_{|k+1}$ -re $\mathbf{U}_{|k+1}$ (3.212) összefüggését felhasználva rekurzív kifejezés adható

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{|k+1} &= [\mathbf{U}_{|k+1}^T \mathbf{U}_{|k+1}]^{-1} = \left[\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{|k}^T & \mathbf{U}_{k+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{|k} \\ \mathbf{U}_{k+1} \end{bmatrix} \right]^{-1} = \\ &= [\mathbf{U}_{|k}^T \mathbf{U}_{|k} + \mathbf{U}_{k+1}^T \mathbf{U}_{k+1}]^{-1} = [\mathbf{P}_{|k}^{-1} + \mathbf{U}_{k+1}^T \mathbf{U}_{k+1}]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.216)$$

Néhány átalakítási lépés után, valamint felhasználva a mátrix inverziós lemmát (F.2.2. függelék) a becslésre a következő rekurzív összefüggést nyerjük:

$$\hat{\mathbf{a}}_{|k+1} = \hat{\mathbf{a}}_{|k} + \mathbf{K}_{|k+1} [z_{k+1} - \mathbf{U}_{k+1} \hat{\mathbf{a}}_{|k}], \quad (3.217)$$

ahol

$$\mathbf{K}_{|k+1} = \mathbf{P}_{|k} \mathbf{U}_{k+1}^T [\mathbf{E} + \mathbf{U}_{k+1} \mathbf{P}_{|k} \mathbf{U}_{k+1}^T]^{-1} \quad (3.218)$$

az ún. lépésfüggő erősítésmátrix és

$$\mathbf{P}_{|k+1} = \mathbf{P}_{|k} - \mathbf{P}_{|k} \mathbf{U}_{k+1}^T [\mathbf{E} + \mathbf{U}_{k+1} \mathbf{P}_{|k} \mathbf{U}_{k+1}^T]^{-1} \mathbf{U}_{k+1} \mathbf{P}_{|k}, \quad (3.219)$$

amely a kiszámítás szempontjából kedvezőbb forma, mint a (3.216).

Megjegyzések:

1. (3.217) belátható, hogy a legkisebb négyzetes hibájú becslés rekurzív alakja, hasonlóan az addigi rekurzív formákhoz, az új becslést a régi becslésből és egy korrekciós tagból képezi, amely a tényleges $(k+1)$ -edik megfigyelés és az előző becslés alapján vart megfigyelés különbségének erősítésszerese.

Az erősítésmátrix lépésenként változik, meghatározásához minden lépésben mátrixinverzióra van szükség, ami a numerikus megoldás szempontjából nem kedvező, viszont látható, hogy értéke az egyes megfigyelésektől független, így ha az $\mathbf{U}_i$ mátrixok ismertek, az egyes lépésekhez tartozó erősítésmátrixok előre meghatározhatók.

2. A rekurzív megoldás megegyezik a nemrekurzív LS becsléssel, csupán a megfigyelések felhasználásának módja eltérő. Így a két megoldás tulajdonságai is megegyeznek.

3. A rekurzív eljárás indításához definiálni kell a kezdeti feltételeket, ami azt jelenti, hogy meg kell adni $P_{|0}$ és $\hat{\alpha}_{|0}$ értékét. A kezdeti értékek megadására különböző lehetőségeink vannak:

— amennyiben van valamennyi előismeretünk a -ról és P -ről ezek képezhetik a kiinduló értékeket,

— néhány megfigyelés felhasználásával nemrekurzív becslést végzünk, ennek eredménye lesz a rekurzív eljárás kezdeti értéke.

A kezdeti értéket például l megfigyelés $\{z_1, z_2, \dots, z_l\}$ alapján meghatározva

$$\hat{\alpha}_{|0} = \hat{\alpha}_{|l} = [U_{|l}^T U_{|l}]^{-1} U_{|l}^T z_{|l} \quad (3.220)$$

és

$$P_{|0} = P_{|l} = [U_{|l}^T U_{|l}]^{-1}, \quad (3.221)$$

ahol

$$z_{|l} = U_{|l} a + n_{|l} \quad (3.222)$$

— kellően nagyszámú megfigyelés mellett a kezdeti becslés tetszőleges érték lehet (pl. $\hat{\alpha}_{|0} = 0$), míg $P_{|0}$ meghatározását a $P_{|0} = \frac{E}{\varepsilon}$ összefüggés alapján rögzíthetjük, ahol ε értékét kicsire kell választani.

4. A négyzetes hibakritérium rekurzív esetre is általánosítható. Ilyenkor a minimalizálandó hibafüggvény:

$$C(\alpha_{|k}) = [z_{|k}(a) - z_{M|k}(\alpha_{|k})]^T Q_{|k} [z_{|k}(a) - z_{M|k}(\alpha_{|k})], \quad (3.223)$$

ahol $Q_{|k}$ az egyes megfigyelésvektorokhoz tartozó $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_k\}$ $n \times n$ -es szimmetrikus, pozitív definit súlymátrixokból felépített $(kn \times kn)$ -es blokkmátrix:

$$Q_{|k} = \begin{bmatrix} Q_1 & & & \\ & Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_k \end{bmatrix}, \quad (3.224)$$

ami azt jelenti, hogy az egyes megfigyelésvektoroknál jelentkező hibák egymástól független hibakomponensként vehetők figyelembe.

A súlyozott LS becslés eredménye a nemsúlyozott esethez hasonlóan adható meg:

$$\hat{\alpha}_{|k+1} = \hat{\alpha}_{|k} + K_{|k+1} [z_{k+1} - U_{k+1} \hat{\alpha}_{|k}], \quad (3.225)$$

ahol most az erősítésmátrix a következőnek adódik

$$K_{|k+1} = P_{|k} U_{k+1}^T [Q_{k+1}^{-1} + U_{k+1} P_{|k} U_{k+1}^T]^{-1} \quad (3.226)$$

és

$$P_{|k+1} = P_{|k} - P_{|k} U_{k+1}^T [Q_{k+1} + U_{k+1} P_{|k} U_{k+1}^T]^{-1} U_{k+1} P_{|k}. \quad (3.227)$$

Amennyiben a megfigyelési zaj statisztikai jellemzői ismertek, itt is megválasztható a súlymátrix a megfigyelési zaj kovarianciamátrixának inverzeként:

$$Q_{jk} = \Sigma_{njk}^{-1}, \quad (3.228)$$

amikor is az eredmény ismét megegyezik a Gauss—Markov-becsléssel. A (3.225,) (3.226), (3.227) összefüggések tehát $Q_{k+1} = \Sigma_{n_{k+1}}^{-1}$ választás mellett a Gauss—Markov-becslés rekurzív alakját adják meg.

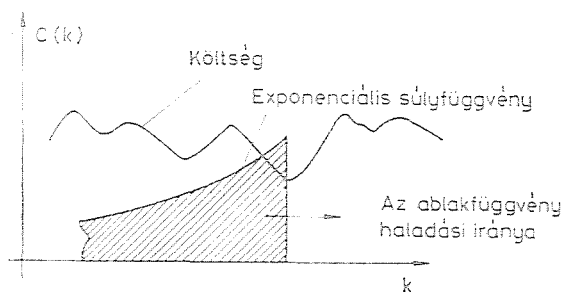
3.5.3. Idővariáns paraméterek becslése

Az előzőekben tárgyalt LS becsléseknél feltételeztük, hogy a becsülni kívánt paraméter állandó. Idővariáns paraméterek rekurzív LS becslésénél az előző módszerek alkalmazása nem célszerű, hiszen az egyre újabb megfigyelések nem állandó paraméterről hordoznak információt. A változás követése érdekében a régi megfigyelések hatását csökkenteni kell; a régi megfigyeléseket fokozatosan el kell felejtetni.

A paraméter időbeli változásának hatása úgy is tekinthető, hogy a pillanatnyi paraméterértékhez viszonyítva a régebbi megfigyelések egyre nagyobb hibával rendelkeznek, egyre pontatlanabbak. Ezért a becslés alapját képező hibakritérium megfogalmazásában a régebbi, pontatlanabb megfigyeléseket egyre kisebb súllyal kell figyelembe venniük.

A felejtő algoritmusok közül kettőt említünk meg. Az elsőben a régi megfigyelések hatását fokozatosan felejtjük el, egy új megfigyelés beérkezésekor a régebbi megfigyelésekből adódó hibakomponenseket kisebb súllyal vesszük figyelembe; a hibakomponensekhez exponenciálisan csökkenő súlyt rendelünk.

A 3.14. ábra rekurzív becslésnél az egyes megfigyelésekhez tartozó hibaértékeket, valamint azt az exponenciálisan csökkenő ablakfüggvényt adja meg, amely a hibakomponensek súlyfaktorait rögzíti.



3.14. ábra. Exponenciálisan felejtő rekurzív becslés

A másik megoldásban mindig azonos számú megfigyelést használunk fel a becslés származtatásához. Minden újabb megfigyelés figyelembevételkor a legrégebbi hatását meg kell szüntetni. E megoldásnál tehát mintegy (mozgó) négyzetes ablakon keresztül figyeljük a megfigyeléseket, ill. az azokhoz tartozó hibakomponenseket, (3.15. ábra).

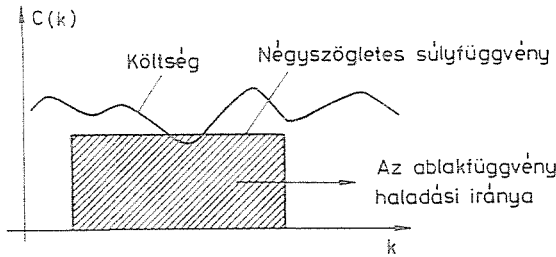
Exponenciális ablakfüggvény

Az exponenciálisan súlyozott legkisebb négyzetes becslésnél a hibafüggvény következő általános alakjából indulhatunk ki:

$$C_{|k+1}(\alpha) = \lambda C_{|k}(\alpha) + [z_{k+1} - U_{k+1}\alpha]^T [z_{k+1} - U_{k+1}\alpha], \quad (3.229)$$

ahol $0 < \lambda \leq 1$.

Itt $C_{|k}$ most is a k megfigyelés $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ felhasználásával kapott négyzetes hiba.



3.15. ábra. Négyszögletes ablakfüggvényt felhasználó rekurzív becslés

A fenti kifejezés azt jelenti, hogy a régebbi megfigyelésekből származó hibákhoz exponenciálisan csökkenő súlyt rendelünk; ugyanis a k -adik időpillanatban a j -edik megfigyelésből ($j \leq k$) származó hiba súlyfaktora

$$\lambda^{k-j} = e^{-(k-j)/\tau}, \quad (3.230)$$

ahol τ a „felejtés” időállandója.

Az időállandó megválasztását elsősorban a paraméter változási sebessége, valamint a becslés meghozatalához szükséges megfigyelésszám befolyásolja. Minél zajosabbak az egyes megfigyelések, λ értékét annál közelebb kell választani az 1 értékhez, mivel így a becslés megfelelő hosszúságú megfigyeléssorozat alapján hozható. Másfelől viszont ha $\lambda = 1$, visszakapjuk a standard legkisebb négyzetes hibájú becslést.

Az exponenciálisan súlyozott legkisebb négyzetes becslő rekurzív összefüggése — lineáris modell esetén — a következőre adódik:

$$\hat{\alpha}_{|k+1} = \hat{\alpha}_{|k} + K_{|k+1}(z_{k+1} - U_{k+1}\hat{\alpha}_{|k}), \quad (3.231)$$

ahol

$$K_{|k+1} = P_{|k} U_{k+1}^T [\lambda E + U_{k+1} P_{|k} U_{k+1}^T]^{-1} \quad (3.232)$$

és

$$P_{|k+1} = \frac{1}{\lambda} [E - P_{|k} U_{k+1}^T (\lambda E + U_{k+1} P_{|k} U_{k+1}^T)^{-1} U_{k+1}] P_{|k}. \quad (3.233)$$

Az exponenciálisan felejtő rekurzív becslések súlyozott négyzetes becslésekből is származtathatók. Az exponenciális felejtés itt is úgy nyerhető, hogy az állandó Q súlymátrix helyett az első, a második stb. és a legfrissebb, k -adik hibakomponenshez rendre

$$e^{-(t_k - t_1)/\tau} Q, \quad e^{-(t_k - t_2)/\tau} Q, \quad \dots, \quad e^{-(t_k - t_k)/\tau} Q = Q \quad (3.234)$$

súlymátrixokat rendelünk. Ebben az esetben $K_{|k+1}$ és $P_{|k+1}$ értéke a következő lesz:

$$K_{|k+1} = P_{|k} U_{k+1}^T [\lambda Q + U_{k+1} P_{|k} U_{k+1}^T]^{-1} \quad (3.235)$$

és

$$\mathbf{P}_{k+1} = \frac{1}{\lambda} [\mathbf{E} - \mathbf{P}_{|k} \mathbf{U}_{k+1}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{U}_{k+1} \mathbf{P}_{|k} \mathbf{U}_{k+1}^T)^{-1} \mathbf{U}_{k+1}] \mathbf{P}_{|k}. \quad (3.236)$$

Ha

$$\lambda = e^{-(t_k - t_{k-1})^{\frac{1}{\tau}}}, \quad (3.237)$$

a $\mathbf{Q} = \mathbf{E}$ választással láthatóan visszakapjuk (3.232)-t, ill. (3.233)-at.

Megjegyzés: Az exponenciális ablakfüggvény alkalmazása, vagyis az új megfigyelések szerepének kiemelése a régebbiekhez képest nem csak időfüggő rendszereknél célszerű. Abban az esetben, ha a becslést pontatlan modell alapján végezzük és a megfigyelési zaj is kicsi a becslés rossz értékhez tarthat, mivel a $\mathbf{K}$ erősítés mátrix kicsi lesz. Az új megfigyelések hatásának erősítése kis $\mathbf{K}$ érték mellett úgy is megtörténhet, ha az előző lépések hatását csökkentjük.

Négyszögletes ablakfüggvény

Az exponenciális súlyozású becslésnél a régi megfigyelések hatását fokozatosan csökkentjük. A négyszögletes ablak algoritmus véges számú (N) megfigyelést vesz figyelembe, az ennél régebbieket teljesen figyelmen kívül hagyja. E megközelítés abból az intuitív szemléletből származik, hogy olyan időtartam (megfigyelés-szám) mellett végezzük a becslést, amely mellett a mérendő paraméter állandónak tekinthető.

Szekvenciális megfigyeléseknél egy újabb megfigyelés figyelembevétele a legrégebbi elhagyásával egyidejűleg történik, így mindig azonos számú, N adat alapján jön létre a becslés.

A megfelelő algoritmus származtatásához induljunk ki abból, hogy $\mathbf{z}_{k+N}$ az utolsó megfigyelés.

A rekurzív legkisebb négyzetes becslés az új megfigyelést figyelembe véve

$$\hat{\mathbf{a}}_{|k+N,k} = \hat{\mathbf{a}}_{|k+N-1,k} + \mathbf{K}_{|k+N,k} [\mathbf{z}_{k+N} - \mathbf{U}_{k+1}^T \hat{\mathbf{a}}_{|k+N-1,k}], \quad (3.238)$$

$$\mathbf{K}_{|k+N,k} = \mathbf{P}_{|k+N-1,k} \mathbf{U}_{k+N}^T [\mathbf{E} + \mathbf{U}_{k+N} \mathbf{P}_{|k+N-1,k} \mathbf{U}_{k+N}^T]^{-1}, \quad (3.239)$$

$$\mathbf{P}_{|k+N,k} = [\mathbf{E} - \mathbf{P}_{|k+N-1,k} \mathbf{U}_{k+N}^T (\mathbf{E} + \mathbf{U}_{k+N} \mathbf{P}_{|k+N-1,k} \mathbf{U}_{k+N}^T)^{-1} \mathbf{U}_{k+N}] \mathbf{P}_{|k+N-1,k}. \quad (3.240)$$

ahol a kettős index első eleme a legújabb megfigyelés sorszámát, a második eleme, a legrégebbi, még figyelembe vett megfigyelés sorszámát jelöli, tehát $\hat{\mathbf{a}}_{|k+N,k}$ az a paraméter becslése a $\{\mathbf{z}_k, \mathbf{z}_{k+1}, \dots, \mathbf{z}_{k+N}\}$ megfigyelési szekvencia felhasználásával.

Az adatablak szélességének visszaállításához hagyjuk el a legrégebbi, k -edik megfigyelést, amiből

$$\hat{\mathbf{a}}_{|k+N,k+1} = \hat{\mathbf{a}}_{|k+N,k} - \mathbf{K}_{|k+N,k+1} [\mathbf{z}_k - \mathbf{U}_k \hat{\mathbf{a}}_{|k+N,k}] \quad (3.241)$$

és

$$\mathbf{K}_{|k+N,k+1} = \mathbf{P}_{|k+N,k} \mathbf{U}_k^T [\mathbf{E} - \mathbf{U}_k \mathbf{P}_{|k+N,k} \mathbf{U}_k^T]^{-1}, \quad (3.242)$$

$$\mathbf{P}_{|k+N,k+1} = \mathbf{P}_{|k+N,k} + \mathbf{P}_{|k+N,k} \mathbf{U}_k^T [\mathbf{E} - \mathbf{U}_k \mathbf{P}_{|k+N,k} \mathbf{U}_k^T]^{-1} \mathbf{P}_{|k+N,k}. \quad (3.243)$$

A következőkben ismét a 3.2. példában már említett ellenállásmérési feladatot vizsgáljuk.

Tételezzük fel, hogy az ellenállásértéket most is feszültség- és árammérés útján kívánjuk meghatározni. Két esetet vizsgálunk. Az elsőben az ismeretlen ellenállás értéke állandó, míg a másodikban változó.

Ennek megfelelően előbb súlyozatlan rekurzív LS becslést végzünk, majd az idővariáns paraméterek becslésére alkalmas fejlett LS eljárást alkalmazzuk.

3.10. példa

A becslési feladatban a mérendő paraméter (ellenállás) és a megfigyelések (feszültség) között lineáris kapcsolat áll fenn. Az eddigi jelöléseinknek megfelelően

$$z_i = Ua + n_i \quad (3.244)$$

ahol a képviseli az ismeretlen ellenállásértéket, U az ellenálláson átfolyó áramot, melyet az egyszerűség kedvéért egységnyiinek tekintünk, z_i a mért feszültségértékeket, n_i pedig a mérési bizonytalanságból adódó megfigyelési zajt jelöli.

A rekurzív LS becslés kiinduló értékeiként k megfigyelés alapján végzett nem-reakurzív becslést használunk. A k megfigyelést vektoros alakba felírva

$$z_{|k} = U_{|k}a + n_{|k}, \quad (3.245)$$

ahol

$$z_{|k}^T = [z_1, z_2, \dots, z_k]; \quad n_{|k}^T = [n_1, n_2, \dots, n_k]$$

és

$$U_{|k}^T = [1, 1, \dots, 1]$$

a pedig a skalár mérendő paraméter.

Az LS becslés (3.175) összefüggése szerint

$$\hat{a}_{|k} = [U_{|k}^T U_{|k}]^{-1} U_{|k}^T z_{|k}, \quad (3.246)$$

amely a megfelelő behelyettesítések után

$$\hat{a}_{|k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k z_i. \quad (3.247)$$

Újabb megfigyelés után a (3.217) összefüggés felhasználásával nyerhetjük $\hat{a}_{|k+1}$ -et.

Ehhez határozzuk meg $P_{|k}$, $P_{|k+1}$ és $K_{|k+1}$ értékét a (3.214), (3.219), ill. a (3.218) összefüggések felhasználásával.

$$P_{|k} = [U_{|k}^T U_{|k}]^{-1} = \left\{ [1, 1, \dots, 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} = \frac{1}{k},$$

$$P_{|k+1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \frac{1}{1 + \frac{1}{k}} = \frac{1}{1+k},$$

mivel

$$U_{k+1} = 1,$$

és

$$K_{|k+1} = \frac{1}{k} \left[1 + \frac{1}{k} \right]^{-1} = \frac{1}{1+k}.$$

Tehát $\hat{a}_{|k+1}$ -re a következő rekurzív formula adódik

$$\hat{a}_{|k+1} = \hat{a}_{|k} + \frac{1}{1+k} [z_{k+1} - \hat{a}_{|k}]. \quad (3.248)$$

Megjegyzések:

1. A kapott eredmény nyilvánvalóan megegyezik a nemrekurzív megoldással. Ez közvetlenül belátható, hiszen a (3.247) eredmény felhasználásával

$$\hat{a}_{|k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} z_i, \quad (3.249)$$

ami felírható

$$\hat{a}_{|k+1} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k z_i + \frac{1}{k+1} \left[z_{k+1} - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k z_i \right] \quad (3.250)$$

alakban is. Ez jól láthatóan megegyezik (3.248)-cal.

2. Ebben az egyszerű példában a rekurzív megoldásnak nincs lényeges előnye a nemrekurzív megoldással szemben, mindössze azt eredményezi, hogy a megfigyelések tárolására nincs szükség, valamint, hogy a megfigyelések szekvenciális feldolgozása miatt lépésenként követhető az eredmény és az egész eljárás a megfelelő lépés után leállítható.

3. Az LS becslés a megfigyelések átlaga, így a (3.248) eredmény az átlagolás rekurzív összefüggését adja meg (l. még 5.1.2. pont).

3.11. példa: Konstans jel detektálása

A következőkben vizsgáljuk azt az esetet, ha a megfigyelések változó paraméterre vonatkoznak. Négyszögletes ablakfüggvény alkalmazásával a becslés rekurzív megoldását a (3.238) és a (3.241) összefüggések alapján határozhatjuk meg.

Az előző példához hasonlóan az első N megfigyelés felhasználásával nyert becslés

$$\hat{a}_{|N,1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i. \quad (3.251)$$

Egy újabb, az $N+1$ -edik megfigyelés után (3.238) szerint kaphatjuk meg az eredményt

$$\hat{a}_{|N+1,1} = \hat{a}_{|N,1} + \frac{1}{N+1} [z_{N+1} - \hat{a}_{|N,1}] \quad (3.252)$$

felhasználva, hogy

$$P_{|N,1} = \frac{1}{N}$$

és

$$K_{|N+1,1} = \frac{1}{N+1}.$$

Az adatablak szélességét az első megfigyelés elhagyásával állítjuk vissza. Mivel (3.240) szerint

$$P_{|N+1,1} = \frac{1}{N+1}$$

és (3.242) alkalmazásával

$$K_{|N+1,2} = \frac{1}{N},$$

a becslés eredménye a következőre adódik:

$$\begin{aligned}\hat{a}_{|N+1,2} &= \hat{a}_{|N+1,1} - \frac{1}{N} [z_1 - \hat{a}_{|N+1,1}] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i + \frac{1}{N+1} \left[z_{N+1} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i \right] - \frac{1}{N} \left[z_1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i \right] = \\ &= \hat{a}_{|N,1} + \frac{1}{N+1} (z_{N+1} - z_1) - \frac{1}{N(N+1)} (z_1 - \hat{a}_{|N,1}).\end{aligned}\quad (3.253)$$

Megjegyzés: A kapott eredmény itt is rekurzív átlagolás útján nyerhető. A mozgó ablak miatt azonban a rekurzív megoldás ellenére az átlag meghatározásához az utolsó N megfigyelés tárolására szükség van, ami széles ablak (nagy N érték) mellett jelentős tárolókapacitást igényel.

3.6. Determinisztikus és sztochasztikus iteratív szélsőérték-kereső eljárások

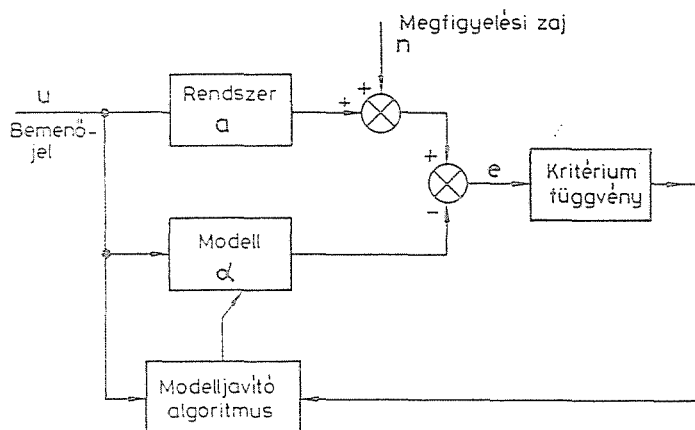
Az eddigiekben láttuk, hogy egy rendszer ismeretlen jellemzőjének (paraméter, állapot) meghatározása egy alkalmasan megválasztott kritériumfüggvény minimumhelyének megkeresését jelenti. A kritériumfüggvény a vizsgált rendszer és a rendszerről felállított modell kimenőjelei különbségének valamely függvénye, amely az α modell-paraméter megfelelő megválasztásával ($\hat{\alpha}$) minimalizálható.

A $C(\alpha)$ kritériumfüggvény ismeretében a

$$\frac{\partial C(\alpha)}{\partial \alpha} = 0$$

megoldása a mérendő paraméterre vonatkozó explicit matematikai kifejezést eredményez. Ekkor a becslési feladat analitikus eredményre vezet. Az analitikus kifejezés meghatározása azonban bonyolultabb esetekben, különösen, ha a mérendő rendszerről megfelelő pontossággal csak nemlineáris modell állítható fel, komoly matematikai nehézségeket jelenthet. Sok esetben a mérendő paraméterre analitikus kifejezés nem is adható. Ilyenkor iteratív eljárások alkalmazhatók, ahol a modell-paramétereket valamilyen algoritmus szerint addig változtatjuk, amíg a kritériumfüggvény minimumát (szélső értékét) el nem érjük, vagyis itt a $\frac{\partial C(\alpha)}{\partial \alpha} \rightarrow 0$ összefüggésnek megfelelően jutunk el a szélső értékhez. Olyan algoritmus kialakítása a cél, amely a modell paramétereit a kritériumfüggvény értékétől függően változtatja, (3.16. ábra).

A rendszeren végzett megfigyeléseket rendszerint zaj terheli. Ha a megfigyelési zaj hatása elhanyagolható, determinisztikus eljárások alkalmazhatók, míg zaj jelenlétében sztochasztikus modelljavító eljárásokra van szükség.



3.16. ábra. Általános modelljavító eljárás sémája

A szélsőérték-kereső eljárások különféle feltételek és eltérő hibakritériumok eseteire vonatkozó igen széles skáláját dolgozták ki. Nem lehet célunk e témakör teljes áttekintése, csupán néhány fontosabb determinisztikus (3.6.1. pont) és sztochasztikus (3.6.2. pont) eljárással foglalkozunk. Mind a determinisztikus, mind a sztochasztikus eljárásokkal szemben a következő főbb követelmények szabhatók:

- legyen konvergens;
- a konvergencia sebessége legyen minél nagyobb;
- legyen minél egyszerűbben megvalósítható;
- minél szélesebb körben lehessen alkalmazni.

3.6.1. Determinisztikus konvergens eljárások

A modelljavító eljárásoknál egy függvény (vagy funkcionál) minimumhelyének meghatározása a cél. Természetesen ahhoz, hogy a minimumhely megtalálására alkalmas konvergens eljárást kapjunk, a kritériumfüggvényről valamilyen ismeretre van szükségünk. Így attól függően, hogy mennyi előismeretünk van a determinisztikus eljárások egész sora alakítható ki. Az egyes eljárások különböznek az alkalmazási feltételekben (szűkebb vagy tágabb alkalmazási terület), a felmerülő számítási nehézségekben és a minimumhely megtalálásának sebességében, a konvergencia sebességben. Az eljárásokat két fő csoportba sorolhatjuk:

- gradiens módszerek;
- kereső eljárások.

A gradiens eljárásokhoz ismerni kell (vagy valamilyen módon meg kell határozni) a $C(\alpha)$ kritériumfüggvény gradiensét tetszőleges α érték mellett, míg a kereső eljárások csupán a $C(\alpha)$ különböző pontokban felvett függvényértékeit használják fel. A keresett paraméter (jellemző), α általában vektorváltozó, a $C(\alpha)$ kritériumfüggvény ezért egy hiperfelülettel jellemezhető, melynek minimumhelyét kívánjuk meghatározni. A gradiens eljárásnál e hibafelületet az adott paramétereknek megfelelő pont környezetében általában lineáris felülettel közelítjük, míg a kereső eljárások többé-kevésbé feltérképezik a felület alakulását. Természetesen minél többet tudunk a felületről, ill. a konstans hibához tartozó izokritérium görbékről, annál jobb megoldást nyerhetünk.

Gradiens eljárások

A gradiens eljárásoknál a zérus gradiensvektorhoz tartozó értéket keressük, mivel a

$$\frac{\partial C}{\partial \alpha} = \left[\frac{\partial C}{\partial \alpha_1} \frac{\partial C}{\partial \alpha_2} \dots \frac{\partial C}{\partial \alpha_n} \right]^T = 0 \quad (3.254)$$

egy minimumhely létezésének szükséges feltétele.

A gradiens módszerek lehetnek

- folytonos és
- lépésenkénti modelljavító eljárások.

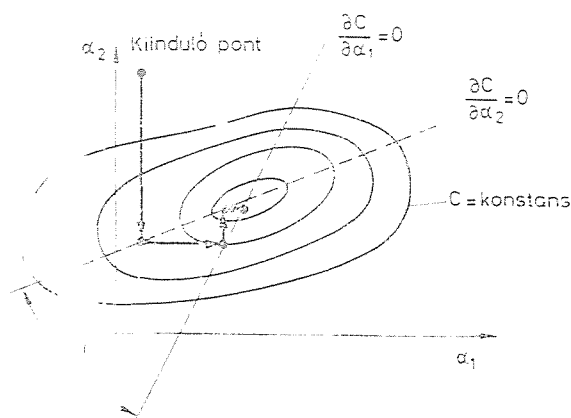
A következőkben csak a lépésenkénti eljárásokkal foglalkozunk, melyeknél a paramétervektor módosítása végezhető komponensenként, ill. az összes komponens módosítása történhet szimultán.

Relaxációs módszer

A relaxációs módszer olyan minimalizáló eljárás, ahol egyidejűleg a paramétervektornak csak egy komponensét változtatjuk. Az i -edik komponenst addig változtatjuk, amíg $\frac{\partial C}{\partial \alpha_i} = 0$ feltétel nem teljesül. A paraméterenkénti (komponensenkénti) változtatást a modell összes paraméterére elvégezzük. Ha szükséges, az eljárást ciklikusan többször is meg kell ismételni. A 3.17. ábra kétdimenziós esetre mutatja a megoldás menetét. Az ábrán látható görbék a $C(\alpha) = \text{konstans}$ izokritérium görbéket adják meg.

A minimumhelyhez közel az izokritérium görbék koncentrikus ellipszisekkel közelíthetők. A relaxációs módszer feltételes minimumhelyeken keresztül közelíti meg a kritériumfüggvény minimumát. A feltételes minimumhelyeket a $\frac{\partial C}{\partial \alpha_1} = 0$ és a $\frac{\partial C}{\partial \alpha_2} = 0$ egyenleteket kielégítő pontok adják meg, melyek ha az izokritérium görbék koncentrikus ellipszisek, egy-egy egyenes mentén helyezkednek el.

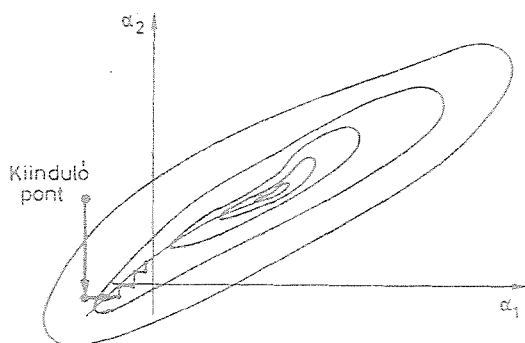
A konvergencia sebességét befolyásolja ezen egyenesek egymással bezárt szöge, γ , amit ezért konvergenciaszögnek is szokás nevezni. Minél kisebb γ értéke, annál nagyobb a szélső érték eléréséhez szükséges iterációk száma, s minél közelebb van a konvergenciaszög 90° -hoz, a szélső érték annál gyorsabban elérhető.



3.17. ábra. Relaxációs módszer

A relaxációs szélsőérték-kereső eljárások tipikus alkalmazási területét képezik a mérőhidak, ugyanis komplex impedanciák mérésére szolgáló hidaknál a komponensenkénti kiegyenlítést szokás alkalmazni (lásd 25. fejezet).

A relaxációs eljárás jól alkalmazható, ha az izokritérium-görbék közel koncentrikus ellipszisek, viszont alkalmazásakor különösen kedvezőtlen helyzet áll elő, ha a kritériumfelületen keskeny völgy húzódik végig (3.18. ábra), amikor is az eljárás leállhat még mielőtt a felület minimumhelyét (szélső értékét) elértük volna.



3.18. ábra. Relaxációs módszer keskeny völgy esetében

Legmeredekebb lejtő módszer

A legmeredekebb lejtő módszerénél a paraméterváltoztatás iránya a lokális gradiens irányával egyezik meg. A módosítás algoritmus

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - G \frac{\partial C}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha = \alpha_k} \quad (3.255)$$

Itt a paraméter összes komponensét egyidejűleg változtatjuk.

A G együtthatómátrix megválasztására több lehetőség áll rendelkezésünkre: értéke lehet állandó, vagy változhat lépésenként.

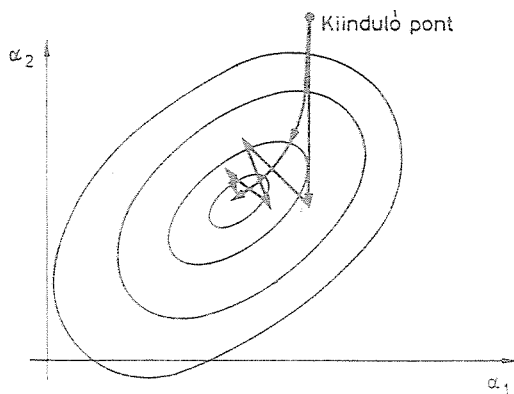
Konstans, kis G mellett a legmeredekebb lejtő módszer a folytonos megoldást közelíti.

Mivel minden egyes pontban a gradiens irányában történik változtatás, ilyenkor a trajektóriához közelálló úton érjük el a minimumhelyet. Hátránya, hogy túl sok lépés kell a minimumhely eléréséhez, s mivel minden lépésben meg kell határozni a lokális gradiens értékét, az eljárás lassú. Nagy G érték mellett a megoldás erősen eltér a trajektóriáktól, a beállítás oszcillációkon keresztül történik (3.19. ábra).

Lépésfüggő megoldásnál G értékét úgy választjuk meg, hogy adott gradiens irányban a minimumhelyet (feltételes minimum) érjük el. A megoldáshoz nem a trajektória mentén jutunk, de viszonylag kevés pontban kell a gradienst meghatározni (3.20. ábra). A legmeredekebb lejtő módszer hátrányai:

— Mivel a megoldást a $\frac{\partial C}{\partial \alpha} = 0$ feltétel szerint keresi, a konvergencia lokális minimumhelyet eredményezhet. Más kezdeti értékről indítva az eljárást, másik lokális minimumot kaphatunk.

— A minimumhely környezetében a gradiensvektor közel zérus, ezért itt a konvergencia nagyon lelassul. A legmeredekebb lejtő módszerénél az egyes lépésekben a korrekció mértéke a gradiens értékének csökkenése miatt egyre csökken. A minimumhely elérésekor további korrekció nem történik.



3.19. ábra. A legmeredekebb lejtő módszer

Bár a legmeredekebb lejtő módszer elvileg konvergens, a minimumhely környezében a lassú konvergencia miatt általában valamilyen leállítási szabályra van szükség. A leggyakrabban alkalmazott leállítási szabály: az eljárást le kell állítani, ha

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial C}{\partial x_i} \right)^2 \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta C}{\Delta \alpha_i} \right)^2 < \varepsilon, \quad (3.256)$$

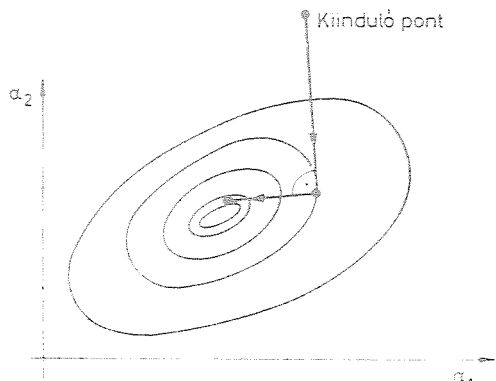
ahol ε alkalmasan megválasztott kis pozitív szám.

— Az eljárás számításigényes, hiszen minden újabb iteráció után ki kell számítani a lokális gradiens értékét.

A legmeredekebb lejtő módszer idővariáns esetben is alkalmazható — követi a minimumhelyet — akkor, ha a számítási-követési eljárás gyorsabb, mint amilyen gyorsan a minimumhely változik.

Megjegyzések:

1. A legmeredekebb lejtő módszernél — a lineáris közelítés miatt — ahol a felület meredeksége kicsi, az eljárás nem hatékony, ezért kidolgoztak másodfokú közelítést alkalmazó eljárásokat is (pl. *Newton—Raphson*, *Gauss—Newton* eljárások). Amennyiben ezen eljárások konvergensnek, konvergencia-sebességük kedvező — a legmerede-



3.20. ábra. A legmeredekebb lejtő módszer változó erősítés választással

kebb lejtő módszer konvergenciasebességénél nagyobb — viszont a konvergencia nem minden esetben biztosított. További hátrányt jelent a viszonylag nagy számításigény (a második derivált iterációnkénti meghatározása, ill. lépésenkénti mátrixinvertálás szükséges).

2. Az említett gradiens eljárásokon kívül számos egyéb eljárást dolgoztak még ki, melyek az alkalmazási feltételekben, a tulajdonságokban (pl. konvergenciasebesség, számításigény) térnek el. Ilyenek pl. a *Fletcher—Powell*-eljárás, a *Marquardt*-módszer vagy a konjugált gradiensek módszere stb., melyek ismertetésére itt nem térhetünk ki, csupán a megfelelő irodalomra utalunk.

3. Az eljárások alkalmazásánál külön ki kell emelni a kezdeti érték megválasztásának fontosságát. Jó kezdeti érték mellett a konvergencia sokkal gyorsabb lehet, mint egyébként, nem unimodális felületek mellett pedig egyes eljárások a kezdeti érték megválasztásától függően lokális szélső értéket is eredményezhetnek. A kezdeti érték megválasztásához ezért minden rendelkezésre álló a priori ismeretet fel kell használni.

Kereső eljárások

A gradiens módszerek hatékony működéséhez a kritériumfelületről bizonyos tulajdonságokat fel kellett tételezni. A kedvező konvergenciasebességet általában csak kvadratikusan hibafelület mellett biztosítják, továbbá a minimumhely elérése csak akkor biztos, ha a felületen nincsenek lokális minimumok (unimodális a felület).

További nehézséget okoz, ha nem határozható meg analitikusan a gradiens értéke, a numerikus közelítés számításigényes. Különösen nehéz jó eljárást találni, ha a hibafelületen keskeny völgy húzódik végig. Ezekre az esetekre speciális megoldásokat dolgoztak ki, melyek hatékonyságát általában mesterségesen generált „kedvezőtlen” felületen tesztelik.

Ha gradiens módszerek nem alkalmazhatók, vagy a gradiens meghatározása túl bonyolult, keresőeljárásokkal lehet a minimumhelyet meghatározni.

A kereső eljárások általában nem tételeznek fel semmit a kritériumfelületről. A keresés során valamilyen véletlen vagy determinisztikus algoritmus szerint feltérképezik a felületet.

Kimerítő (teljes) keresés

A legkézenfekvőbb megoldás a kritériumfelület teljes feltérképezése, azaz minden lehetséges paraméterérték mellett a kritériumfüggvény meghatározása. Mivel csak véges számú pontban határozható meg a kritériumérték, a paraméterek változtatása diszkrét lépésekben történhet. Ez azt jelenti, hogy a paramétertérre egy megfelelő finomságú rácsot helyezünk, és a kritériumértékeket a rácspontokban határozzuk meg. Ez az ún. „kimerítő keresés” finom felbontás mellett a minimumhelyet biztosan megtalálja, viszont a dimenziószám növelésével a rácspontok száma hatványozottan növekszik, amely a módszer alkalmazásának korlátja lehet.

Véletlen keresés

Véletlen kereső módszereknél a paraméterértékek véletlenszerű megváltoztatásával próbálkozunk. Ha egy próbálkozás eredményeképpen kapott paraméterhez tartozó kritériumérték az előző pontbelinél kisebb, az új pontot tekintjük a következő lépés kiindulópontjának, ellenkező esetben a régi paraméterértéket tartjuk meg és a keresést tovább folytatjuk. Az algoritmus minél hatékonyabbá tétele érdekében a véletlen

keresésnél is különböző eljárások alakultak ki. Ezen eljárások különböznek a keresési irány és az adott irányban történő módosítás nagyságának megválasztásában.

A véletlen keresési módszerek a globális minimumhely eléréséig használhatók. Előnyük az egyszerű megvalósítás, valamint az, hogy hatékonyak akkor is, ha a hiba-felületről nagyon keveset, vagy semmit sem tudunk.

Összefoglalás

A sokféle eljárás értékelése, összehasonlítása általánosságban nem lehetséges, hiszen tulajdonságaik attól is függnék, hogy milyen feladatokban alkalmazzuk őket (milyen a kritériumfüggvény alakja, hány dimenziós a feladat stb.). Ezért „legjobb” eljárásról nem beszélhetünk. Egyesek kedvezőbbek a konvergenciasebesség tekintetében, más eljárások a kritériumfüggvények szélesebb osztályára alkalmazhatók, vagy egyszerűbb számításokat igényelnek. Sok esetben célszerű az egyes eljárások kombinált alkalmazása: pl. egy véletlen keresési módszer alkalmas lehet a globális minimumhely közelítő meghatározására, majd innen valamely unimodális felületet feltételező módszerrel (pl. *Gauss—Newton* stb.) a globális minimum pontos helye megtalálható.

3.6.2. Sztochasztikus approximáció

A determinisztikus szélsőérték-kereső eljárásoknál, bár a kritériumfüggvényt explicit alakban nem ismertük, értéke bármely paraméterérték mellett megfigyelhető volt. Abban az esetben, ha ezen megfigyelések — a megfigyelési zaj jelenléte miatt — a pontos függvényértékeket nem szolgáltatják determinisztikus eljárások nem alkalmazhatók. Olyan sztochasztikus szélsőérték-kereső eljárásokra van szükség, melyeknél a zajos megfigyelések ellenére is biztosított a konvergencia.

A sztochasztikus approximációs algoritmusok olyan rekurzív szélsőérték-kereső eljárások, melyek a determinisztikus gradiens eljárások sztochasztikus megfelelőinek tekinthetők.

A sztochasztikus approximációs alapfeladat a következő: legyen adott egy determinisztikus kritériumfüggvény $C(\alpha)$, melynek szélső értékéhez tartozó $\hat{\alpha}$ értéket kívánjuk meghatározni. A $C(\alpha)$ kritériumfüggvényt explicit alakban nem ismerjük, és adott α mellett $C(\alpha)$ pontos értékét sem tudjuk megfigyelni. A szerezhető megfigyelésektől függően különböző rekurzív algoritmusok származtathatók, melyek közül ebben a részben az alábbi két alapesetet foglaljuk össze:

1. Tételezzük fel, hogy tetszőleges α mellett megfigyelhető a kritériumfüggvény gradiensének zajjal terhelt értéke. A zajos gradiens értékeket $y(\alpha)$ -val jelölve a megfigyelés és a kritériumfüggvény gradiensének kapcsolata a következő:

$$E\{y(\alpha) \mid \alpha\} = \frac{\partial C(\alpha)}{\partial \alpha} \quad (3.257)$$

A zajos megfigyelés alapján kell a szélső értéket meghatározni, ami a gradiens zérushelyénél lesz. A feladat ebben az esetben egy függvény (a gradiens függvény) gyökének megkeresését jelenti a zajos megfigyelések felhasználásával.

2. Amennyiben a gradiens zajos értékét sem ismerjük, a szélső érték megkereséséhez előbb tetszőleges α érték mellett a gradiens közelítő meghatározására van szükség. A gradiens közelítő meghatározása a kritériumfüggvény zajos megfigyeléseinek felhasználásával lehetséges.

A zajos megfigyeléseket $z(\alpha)$ -val jelölve :

$$E\{z(\alpha) \mid \alpha\} = C(\alpha). \quad (3.258)$$

Ebben az esetben tehát egy függvény (a kritériumfüggvény) szélső értékének helyét kívánjuk meghatározni a függvény zajos megfigyelései segítségével.

Az előbbi esetben az ún. *Robbins—Monro*, az utóbbiban a *Kiefer—Wolfowitz* sztochasztikus approximációs algoritmus származtatható.

A következőkben megadjuk a sztochasztikus approximáció alapalgoritmusainak rekurzív összefüggéseit. Előbb a *Robbins—Monro*, majd a *Kiefer—Wolfowitz*-algoritmust tárgyaljuk. Mindkét módszernél megadjuk az algoritmusok konvergenciáját biztosító feltételrendszert.

Az egyes eljárások minősítéséhez a konvergencia ténye nem elegendő; a konvergencia sebessége az algoritmusok hatékonyságának lényeges jellemzője.

Mivel a konvergenciasebesség meghatározása meglehetősen nehéz, és nem is tartozik szorosan a sztochasztikus approximáció témakörébe, továbbá mivel a konvergenciasebességet csak speciális esetekben tudjuk meghatározni, e problémára csupán utalunk.

A Robbins—Monro-algoritmus

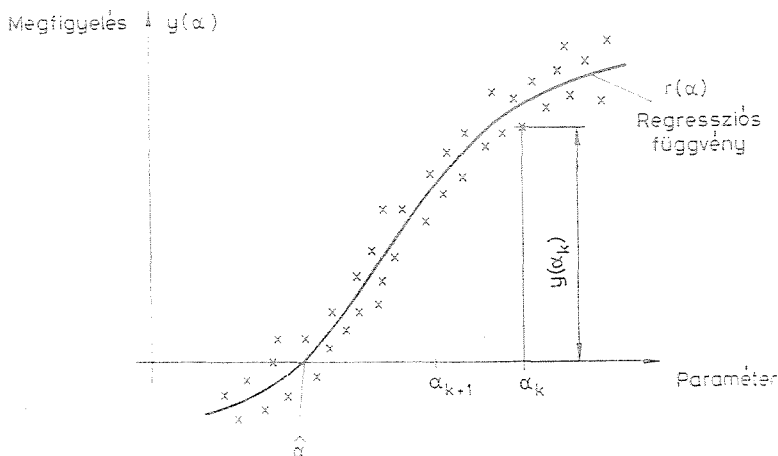
A *Robbins—Monro*-algoritmus olyan rekurzív eljárás, amely egy ismeretlen függvény gyökhelyét határozza meg.

Legyen $r(\alpha)$ egy rögzített, de ismeretlen függvény, és tételezzük fel, hogy bármely α mellett $y(\alpha)$ megfigyelhető, ahol

$$r(\alpha) = E\{y(\alpha) \mid \alpha\}. \quad (3.259)$$

Az $r(\alpha)$ függvényt szokás regressziós függvénynek is nevezni. Az $r(\alpha) = 0$ egyenlet gyökét $\hat{\alpha}$ -t az $\{y(\alpha_k)\}$ megfigyelési sorozat felhasználásával kereshetjük (3.21. ábra) a következő rekurzív összefüggés szerint :

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - g_k y(\alpha_k). \quad (3.260)$$



3.21. ábra. A *Robbins—Monro*-feladat

A *Robbins—Monro*-algoritmus tehát az új közelítést az aktuális közelítésnek és az új megfigyelésnek a felhasználásával nyeri. Amennyiben az $y(\alpha_k)$ zajos megfigyelést egy kritériumfüggvény gradienseként tekintjük, a gyökhelykeresés a kritériumfüggvény szélsőérték-keresését jelenti.

Ezt tekintetbe véve (3.260) összevethető a determinisztikus legmeredekebb lejtő módszerének (3.255) összefüggésével. A *Robbins—Monro*-algoritmusnál a gradiens érték helyett annak zajos megfelelője található. A $\{g_k\}$ együttható sorozat megfelelő megválasztása hivatott kompenzálni a zajos megfigyelések hatását.

A Robbins—Monro-algoritmus átlagos négyzetes értelemben és egységnyi valószínűséggel is konvergens, vagyis

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E\{(\alpha_k - \hat{\alpha})^2\} = 0 \quad (3.261)$$

ill.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P\{|\alpha_k - \alpha| = 0\} = 1,$$

ha a következő feltételek teljesülnek.

1. A $\{g_k\}$ együtthatósorozatra teljesüljenek a következők :

$$g_k > 0; \quad \sum_{k=1}^{\infty} g_k = \infty; \quad \sum_{k=1}^{\infty} g_k^2 < \infty \quad (3.262)$$

2. Az $y(\alpha_k)$ megfigyelések statisztikailag függetlenek és azonos eloszlásúak.

3. Az $r(\alpha)$ regressziós függvényre teljesüljön, hogy

$$K_1(\alpha - \hat{\alpha})^2 \leq r(\alpha)(\alpha - \hat{\alpha}) \leq K_2(\alpha - \hat{\alpha})^2; \quad 0 < K_1 \leq K_2 < \infty \quad (3.263)$$

és

$$\text{var} [\eta_k] = \text{var} [y(\alpha_k) - r(\alpha_k)] = \int_{\mathcal{Y}} [y(\alpha_k) - r(\alpha_k)]^2 f_{y|\alpha}(\mathcal{Y} | \alpha) d\mathcal{Y} < \sigma^2 < \infty. \quad (3.264)$$

Vizsgáljuk meg röviden a fenti feltételek jelentését. Az együtthatósorozatra vonatkozó feltételeket a következőképpen értelmezhetjük : az együtthatósorozat elemeinek zérushoz kell tartaniuk, különben a megfigyelések véletlenszerűsége miatt az algoritmus $\hat{\alpha}$ körül oszcillálna és nem lenne konvergens ; másfelől, ha a zérushoz tartás túl gyors, a folyamat leállhat még mielőtt a gyökhelyet elérnénk. Egy tipikus együtthatósorozat, amely a két feltételt egyidejűleg kielégíti :

$$g_k = \frac{g}{k}; \quad (3.265)$$

ahol $g > 0$.

A (3.263) feltétel azt jelenti, hogy az $r(\alpha)$ regressziós függvénynek két egymást metsző egyenes között kell elhelyezkednie, melyek meredeksége K_1 és K_2 . A két egyenes $\alpha = \hat{\alpha}$ pontban metszi egymást, ez egyben biztosítja $r(\alpha)$ egyértelmű gyökhelyét is $\hat{\alpha}$ pontban. A (3.264) feltétel csupán a megfigyelések véges varianciáját jelenti.

Megjegyzések :

1. Az eddigiekben a R—M algoritmust egydimenziós esetre vizsgáltuk. Többdimenziós kiterjesztése a következő

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - g_k \mathbf{y}(\alpha_k). \quad (3.266)$$

A konvergencia feltételei az egydimenziós eset feltételeinek kiterjesztéseként adhatók meg. A megfelelő feltételek betartása esetén az eljárás itt is átlagos négyzetes értelemben és 1 valószínűséggel konvergens. Megemlítjük, hogy többdimenziós esetben a korrekciós tag együtthatói lehetnek mátrixok is.

2. A sztochasztikus approximáció *Robbins—Monro*-algoritmusra vezető feladata megfogalmazható a következő módon is:

Keressük az $r(\alpha) = \lambda$ egyenlet egyértelmű $\alpha = a$ gyökét.

Az iteratív algoritmus ebben az esetben:

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - g_k[y(\alpha_k) - \lambda]. \quad (3.267)$$

Az algoritmus ilyen felírása mutatja, hogy a sztochasztikus approximáció összefüggése formailag megegyezik a rekurzív becslések összefüggésével; vagyis a $k+1$ -edik lépés eredménye a k -adik lépés eredményéből és egy korrekciós tagból áll, ahol a korrekciós tag a tényleges megfigyelés és a megoldásnál várt megfigyelési érték különbségének súlyozott összege.

Összevetve e megoldást a rekurzív becslések összefüggéseivel látható, hogy az alapvető eltérés a korrekciós tag együtthatójának megválasztásában van.

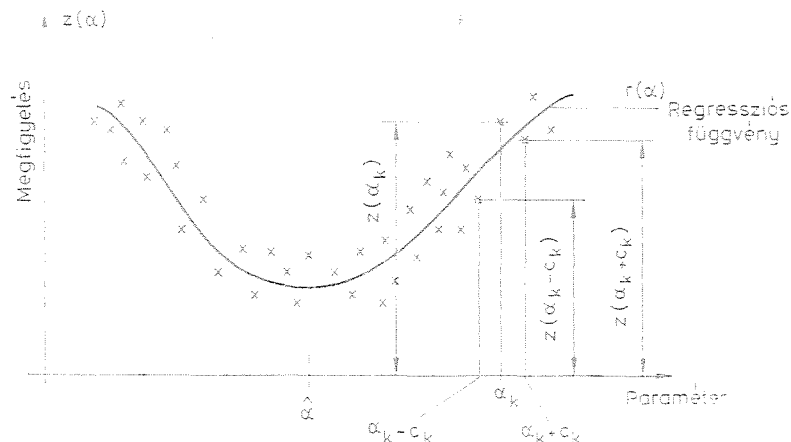
A különféle rekurzív becsléseknél az együttható értékét a rendelkezésre álló a priori ismeretek befolyásolják. Sztochasztikus approximációnál az együtthatósorozat megválasztásához a priori ismeretek nem állnak rendelkezésünkre, a választás a konvergencia biztosításának megfelelően történik.

Az egyszerűbb együttható a számítások egyszerűsítését eredményezi, másfelől, mivel a feladattól függő erősítésmátrix nem ismeretes, nincs a pontosságra vonatkozó mérték.

A Kiefer—Wolfowitz-algoritmus

A Kiefer—Wolfowitz-algoritmus akkor alkalmazható, ha egy függvény szélső értékének helyét kell meghatározni a függvényérték $z(\alpha_k)$ zajos megfigyelései alapján. A feladat kitűzését a 3.22. ábra szemlélteti.

A szélső érték helyének meghatározásához az $r(\alpha)$ regressziós függvény gradienseinek zérushelyét kell megkeresni. Mivel a regressziós függvény gradienseinek sem



3.22. ábra. A Kiefer—Wolfowitz-feladat

pontos, sem zajos értékét nem figyelhetjük meg, ezért a gradiens kísérleti közelítését használhatjuk fel.

A Kiefer—Wolfowitz-algoritmus a következő rekurzív összefüggés alapján közelíti a szélsőérték-helyet:

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{g_k}{c_k} [z(\alpha_k + c_k) - z(\alpha_k - c_k)]. \quad (3.268)$$

Látható, hogy a K—W algoritmusban a sztochasztikus gradiens értékét a szomszédos függvényértékek felhasználásával számítjuk ki. A K—W algoritmus konvergenciájához a következő feltételeket kell betartani:

1. A $\{g_k\}$ és a $\{c_k\}$ együtthatósorozatok elemei legyenek olyan pozitív számok melyekre fennáll, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k = \infty; \quad \sum_{k=1}^{\infty} g_k c_k < \infty; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{g_k}{c_k} \right)^2 < \infty, \quad (3.269)$$

ahol a $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{g_k}{c_k} \right)^2 < \infty$ feltétel biztosítja, hogy a korrigáló tagok négyzetösszege véges,

a $\sum_{k=1}^{\infty} g_k = \infty$ feltétel pedig most is azt biztosítja, hogy a rekurzív folyamat a szélső érték elérése előtt ne álljon le.

A két együtthatósorozat tipikus értékei:

$$g_k = \frac{g}{k} \quad \text{és} \quad c_k = \frac{c}{k^\gamma}; \quad 0 < \gamma < \frac{1}{2}; \quad g, c > 0. \quad (3.270)$$

2. A regressziós függvényvel szemben támasztott követelmények a következők:

— $r(\alpha)$ és második deriváltja legyen korlátos;
— $\hat{\alpha}$ legyen lokális minimuma $r(\alpha)$ -nak, vagyis valamely $\varepsilon > 0$ mellett $r(\hat{\alpha}) \leq r(\alpha)$, ha $|\alpha - \hat{\alpha}| > \varepsilon$;

— tetszőleges α mellett $\frac{d}{d\alpha} r(\alpha) \neq 0$ ha $\alpha \neq \hat{\alpha}$;

— továbbá, a megfigyelések varianciája legyen véges:

$$\text{var} \{ \eta(\alpha) \} = \text{var} \{ z(\alpha) - r(\alpha) \} \leq \sigma^2 < \infty.$$

Ezen feltételek teljesülése biztosítja az algoritmus egy valószínűségű és MS konvergenciáját.

A Kiefer—Wolfowitz-algoritmus is kiterjeszthető többdimenziós esetre. Ehhez azonban a gradiens közelítő meghatározásához a dimenziószámtól függő megfigyelést kell végezni. A sztochasztikus gradiens becslésére a következő összefüggés használható:

$$\hat{\nabla}_z z(\alpha_k) = \sum_j e_j \frac{1}{2c_k} [z(\alpha_k + c_k e_j) - z(\alpha_k - c_k e_j)], \quad (3.271)$$

tehát n dimenziós esetben a gradiens meghatározásához a $z(\alpha)$ függvényből $2n$ mintát kell venni. A mintavételek helye

$$(\alpha_k \pm c_k e_j) \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

ahol $e_j, j = 1, 2, \dots, n$ az n dimenziós egységvektorokat jelöli.

Megjegyzések:

1. A sztochasztikus approximációs algoritmusoknak széles körű gyakorlati alkalmazásuk van. Ezt többek között a következők indokolják:

- az algoritmusok megvalósítása viszonylag egyszerű;
- a feladat megoldását rekurzív formában adják meg;
- alkalmazásukhoz kevés a priori ismeretre van szükség;
- mind lineáris, mind nemlineáris problémákra alkalmazhatók.

2. A sztochasztikus approximációs algoritmusok gyakorlati alkalmazásánál fontos kérdés a konvergencia sebessége. A megfelelő feltételek betartása a *Robbins—Monro*- és a *Kiefer—Wolfowitz*-algoritmusok esetében csak a konvergencia tényét biztosítják. A konvergencia sebessége nyilvánvalóan függ az algoritmusokban szereplő együtthatók tényleges megválasztásától. Különböző speciális esetekre vonatkozó konvergenciasebességgel a sztochasztikus approximáció bőséges irodalma foglalkozik.

3.7. A döntéselmélet alapjai

Számos mérési probléma vezet olyan feladatra, amikor véges számú lehetséges eredmény közül kell egyet kiválasztani. Ilyen feladat lehet pl., ha egy zajos digitális jelből kell megállapítani, hogy a lehetséges két érték közül a jel adott időpillanatban melyiket vette fel, vagy ha megfigyelések alapján azt kell eldönteni, hogy a vizsgált jel egy bizonyos jelkomponenst tartalmaz-e vagy sem. Ezeknél a döntési feladatoknál a becslésekhez hasonlóan a vizsgált objektum (jel- vagy rendszer) valamely jellemzőjét (paraméterérték, állapot stb.) kell meghatározni a rendszeren végzett megfigyelések, valamilyen alkalmasan megválasztott hibakritérium és a rendelkezésünkre álló a priori ismeretek alapján. Ilyen a priori ismeret lehet a lehetséges értékek száma (a diszkrét jellemzőhalmaz elemeinek száma), az egyes értékek a priori valószínűségei és — minthogy a mérendő jellemzőre vonatkozó megfigyeléseket egy általában zajos jelátviteli csatorna kimenetén kapjuk — a zajos megfigyelésekre vonatkozó feltételes sűrűségfüggvények.

Az optimumkritérium és az a priori ismeretek felhasználásával származtatható a döntési szabály, amely alkalmazásával konkrét megfigyelések mellett a döntés meghozható.

A döntési szabály tehát — hasonlóan a becslési szabályhoz — annak a fizikai rendszernek a matematikai modellje, amely a megfigyelés feldolgozását végzi és a döntést meghozza. Az optimumkritérium megfogalmazása hasonló a becslések optimumkritériumához: a cél a hibás döntések valószínűségét minimálisra szorítani, ill. általánosan, ha a hibás döntésekhez költséget rendelünk a döntési eljárás átlagos költségét minimálni.

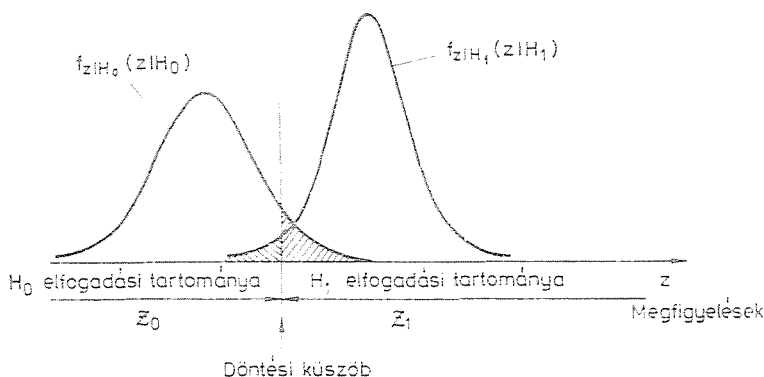
Döntéseknél a hiba fogalma a diszkrét jelleg következtében némileg eltér a becslési hiba fogalmától. Egy döntés lehet helyes vagy helytelen. Így pl. egy véges állapotú digitális rendszer állapotának mérésekor is általában csak arról beszélhetünk, hogy az eredmény megegyezik-e a tényleges állapottal vagy sem. Minden egyes döntéshez a helyes döntés feltételezésével költségérték rendelhető. Így a helyes döntéshez is tartozhat költség, a különböző hibás döntések közötti súlyozást pedig a hozzájuk rendelt különböző költségérték képviselheti.

A döntéseknél a lehetséges eredményekre hipotézisek állíthatók fel; a döntés meghozatalával a lehetséges hipotézisek közül egyet elfogadunk. A döntési feladatot ezért szokás hipotézis tesztelésnek is nevezni.

Egy egyszerű bináris, vagy kéthipotézises döntésnél kétfajta hiba lehetséges. H_0 -val és H_1 -gyel jelölve a két hipotézist a következő hibás esetek fordulhatnak elő:

- elfogadjuk H_0 hipotézist, holott H_1 igaz, vagy
- H_1 hipotézist tekintjük igaznak, annak ellenére, hogy H_0 igaz.

A bináris döntési feladatot illusztrálja a 3.23. ábra. A megfigyelések olyan valószínűségi változó realizációinak tekinthetők, melyek sűrűségfüggvénye függ attól, hogy melyik hipotézis igaz. A két $f_{z|H_0}(z | H_0)$ és $f_{z|H_1}(z | H_1)$ feltételes sűrűségfüggvény a két esetre vonatkozó megfigyelések lehetséges értékeinek alakulását mutatják. Míthogy a két sűrűségfüggvény átfedi egymást, tehát azonos megfigyelést kaphatunk bármelyik hipotézis is igaz, akárhogy is rendeljük a megfigyeléseket a hipotézisekhez, az esetek egy részében döntésünk hibás lesz. Az ábrán a vonalkázott területek a hibás döntések valószínűségeivel arányosak.



3.23. ábra. Bináris döntési feladat

A két hibavalószínűséget a döntéselmélettel foglalkozó irodalomban szokás P_M -mel (miss probability) és P_F -fel (false alarm probability) jelölni, a két hibatípust pedig elsőfajú, ill. másodfajú hibának nevezni. Ezek a jelölések és elnevezések a döntéselmélet egyik klasszikus alkalmazásából — a radar jelek alapján történő objektum-detektálásból — származnak. Ebben az esetben H_1 hipotézis azt állítja, hogy az objektum jelen van, míg H_0 azt, hogy nincs. Az első fajú hiba a tévesztést (miss) jelöli, vagyis az objektum jelenléte ellenére a H_0 hipotézist fogadjuk el. Másodfajú hiba felesleges riasztáskor (false alarm) lép fel, amikor jelezzük az objektumot, pedig valójában nincs ott.

A döntési eljárások során a megfigyelési tartományt olyan módon kell két — vagy többhipotézises esetben több — részre bontani, hogy a döntési eljárás átlagos költsége legyen minimális.

A 3.23. ábra esetében ez a döntési küszöbérték megfelelő megválasztását jelenti. A küszöbérték megválasztását az a priori valószínűségek és a költségértékek is befolyásolják.

A döntési eljárásokat a becslési módszerekhez hasonlóan a rendelkezésre álló a priori ismeretek függvényében vizsgáljuk. A legtöbb a priori ismeretet igénylő Bayes-döntést tárgyaljuk először (3.7.1. pont), majd egyre kevesebb a priori ismeret mellett származtatjuk a további eljárásokat, melyek általában a Bayes-döntés speciális eseteinek is tekinthetők. A minimax döntéssel a 3.7.2. pont, a Neyman—Pearson-döntéssel a 3.7.3. pont foglalkozik.

3.7.1. Bayes-döntések

Ebben a pontban a legtöbb előismeretet igénylő Bayes-döntésekkel foglalkozunk. Előbb kéthipotézises esetre származtatjuk a Bayes-döntési szabályt, majd az eredményeket kiterjesztjük több hipotézis esetére is.

A Bayes-döntések — a becslésekhez hasonlóan — szekvenciális megfigyelések alapján is meghozhatók. A többhipotézises döntéseket követően a szekvenciális Bayes-döntéseket említjük meg.

Kéthipotézises Bayes-döntés

Jelölje a két hipotézist H_0 és H_1 , és tekintsük adottnak a két hipotézishez rendelt a priori valószínűségeket, melyeket P_0 -val, ill. P_1 -gyel jelöljük. Ezek tehát azt jelentik, hogy az egyes hipotézisek az adott valószínűséggel bizonyulnak igaznak.

Feltételezzük továbbá, hogy megfigyeléseinket zaj terheli, és e zaj statisztikai jellemzői adottak: ismerjük a zaj sűrűségfüggvényét. Ez azt jelenti, hogy adottak a megfigyelések feltételes sűrűségfüggvényei (csatornakarakterisztika), melyek a megfigyelési zaj és a megfigyelt jellemző függvényei. A két lehetséges esetnek megfelelően ezeket $f_{z|H_0}(z|H_0)$, ill. $f_{z|H_1}(z|H_1)$ jelöli.

Az optimumkritérium megfogalmazásához definiálni kell a döntésekhez rendelt költségeket. Jelölje C_{ij} annak a döntésnek a költségét, amikor az i -edik hipotézist fogadjuk el, holott a j -edik az igaz. Vezessük be továbbá a $P(H_i|H_j)$ jelölést, amely az előbbi eset bekövetkezési valószínűségét jelöli.

A Bayes-döntési szabály az átlagos költség minimumát biztosítja. Származtatásához írjuk fel az átlagos költséget, amely kéthipotézises esetben a következő:

$$R = C_{00}P_0P(H_0|H_0) + C_{10}P_0P(H_1|H_0) + C_{01}P_1P(H_0|H_1) + C_{11}P_1P(H_1|H_1). \quad (3.272)$$

Bináris döntéseknél vagy H_0 vagy H_1 hipotézist fogadjuk el, tehát, mint a 3.23. ábrán láthattuk, a $\mathcal{Z}$ megfigyelési teret két diszjunkt tartományra $\mathcal{Z}_0$ -ra és $\mathcal{Z}_1$ -re kell osztani. $\mathcal{Z}_0$ tartományba azon megfigyelések tartoznak, amikor H_0 hipotézist fogadjuk el, míg a $\mathcal{Z}_1$ tartománybeli megfigyeléseknél H_1 -et tekintjük igaznak. Az átlagos költség minimumát e tartományok megfelelő megválasztásával keressük. Használjuk fel, hogy $P(H_i|H_j)$ felírható a feltételes sűrűségfüggvény megfelelő tartományra vett integráljaként:

$$P(H_i|H_j) = \int_{\mathcal{Z}_i} f_{z|H_j}(z|H_j) dz.$$

Így az átlagos költség a következő formába írható:

$$\begin{aligned} R = & C_{00}P_0 \int_{\mathcal{Z}_0} f_{z|H_0}(z|H_0) dz + C_{01}P_1 \int_{\mathcal{Z}_0} f_{z|H_1}(z|H_1) dz + \\ & + C_{10}P_0 \int_{\mathcal{Z}_1} f_{z|H_0}(z|H_0) dz + C_{11}P_1 \int_{\mathcal{Z}_1} f_{z|H_1}(z|H_1) dz. \end{aligned} \quad (3.273)$$

Felhasználva, hogy bináris döntésnél a megfigyelési teret két diszjunkt tartományra osztjuk:

$$R = C_{10}P_0 + C_{11}P_1 + \int_{\mathcal{Q}_0} \{P_1[C_{01} - C_{11}]f_{z|H_1}(z|H_1) - P_0[C_{10} - C_{00}]f_{z|H_0}(z|H_0)\} dz. \quad (3.274)$$

A (3.274) összefüggés első két tagja a döntés állandó költsége, a tartományok megválasztásától független. Az átlagos költség további tagjának vizsgálatakor feltételezzük, hogy a helyes döntés költsége kisebb, mint a hibásé, ezért $C_{10} > C_{00}$ és $C_{01} > C_{11}$: így az integrandus mindkét tagja pozitív.

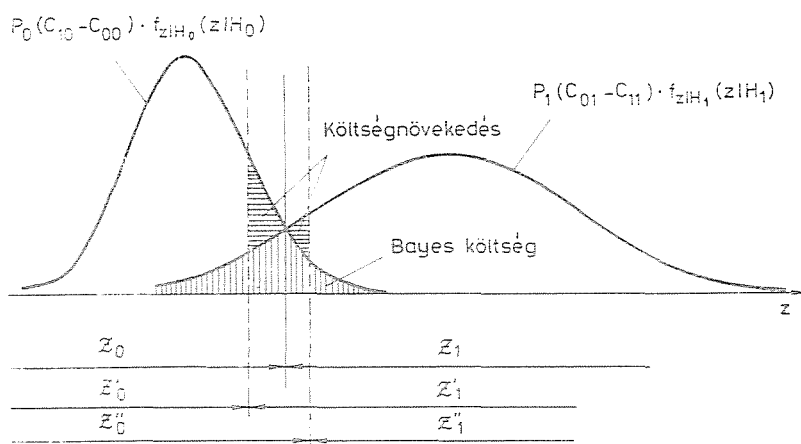
A minimum eléréséhez minden olyan megfigyelésnek a $\mathcal{Q}_0$ tartományba kell lennie, ahol az integrandus második tagja nagyobb, mint az első, vagyis z legyen $\mathcal{Q}_0$ -része, ha

$$P_0(C_{10} - C_{00})f_{z|H_0}(z|H_0) > P_1(C_{01} - C_{11})f_{z|H_1}(z|H_1). \quad (3.275)$$

Hasonlóan minden olyan megfigyelés a $\mathcal{Q}_1$ tartományba kell tartozzon, ahol

$$P_0(C_{10} - C_{00})f_{z|H_0}(z|H_0) < P_1(C_{01} - C_{11})f_{z|H_1}(z|H_1). \quad (3.276)$$

A döntési szabály működése jól követhető a 3.24. ábrán. Mint a (3.275) és (3.276) összefüggésekből látható a $\mathcal{Q}_0$ és $\mathcal{Q}_1$ tartományok határát úgy kell megválasztani, hogy a súlyozott feltételes sűrűségfüggvények e határon azonos értékűek legyenek. Az ábra mutatja a Bayes-döntés átlagos költségét, vagyis az adott feladatban a minimális



3.24. ábra. A döntési tartományok megválasztása

átlagos költséget, amely a $\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1$ felosztáshoz tartozik. A tartományok bármely más megválasztása (az ábrán $\mathcal{Q}'_0$ és $\mathcal{Q}'_1$, ill. $\mathcal{Q}''_0$ és $\mathcal{Q}''_1$) az átlagos költség növekedését eredményezik. A (3.275) és (3.276) egyenlőtlenséget felhasználva a döntési szabály a következő módon is megfogalmazható:

$$\frac{f_{z|H_1}(z|H_1)}{f_{z|H_0}(z|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \frac{P_0(C_{10} - C_{00})}{P_1(C_{01} - C_{11})}. \quad (3.277)$$

Látható, hogy a döntési szabály a megfigyelések feltételes sűrűségfüggvényeinek — a likelihoodfüggvényeknek — az arányaként fogalmazható meg. A két sűrűségfüggvény arányát likelihoodaránynak nevezzük és $\Lambda(z)$ -vel jelöljük.

$$\Lambda(z) = \frac{f_{z|H_1}(z | H_1)}{f_{z|H_0}(z | H_0)}. \quad (3.278)$$

A Bayes-döntés tehát olyan likelihoodarány teszt,

$$\Lambda(z) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta, \quad (3.279)$$

ahol a teszt küszöbértéke az a priori valószínűségektől és a költségértékektől függ:

$$\eta = \frac{P_0(C_{10} - C_{00})}{P_1(C_{01} - C_{11})}. \quad (3.280)$$

A logaritmusfüggvény monotonitása miatt (3.279)-tel ekvivalens tesztet kapunk, ha mindkét oldal logaritmusát képezzük:

$$l(z) = \ln \Lambda(z) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln \eta = \gamma. \quad (3.281)$$

Az így nyert log-likelihoodarány a gyakorlati döntési feladatoknál sokszor egyszerűbb megoldást eredményez.

A költség megválasztására általános szabály nem adható, a költségértékek általában az alkalmazástól függenek. Egy speciális esetet azonban megemlíthünk. Rendeljük minden hibás döntéshez egységnyi, a helyes döntésekhez pedig zérus költséget. A likelihoodarány-teszt küszöbértéke ekkor:

$$\eta = \frac{P_0}{P_1}. \quad (3.282)$$

A döntési szabály (3.277) összefüggését átrendezve nyerjük a következőt:

$$P_1 f_{z|H_1}(z | H_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} P_0 f_{z|H_0}(z | H_0), \quad (3.283)$$

vagy más formában:

$$P_{H_1|z}(H_1 | z) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} P_{H_0|z}(H_0 | z), \quad (3.284)$$

ami azt jelenti, hogy a döntést az a posteriori valószínűségek összevetése alapján hozhatjuk meg. A Bayes-döntéseknek ezt a speciális esetét — hasonlóan a becslések-nél látott esethez — maximum a posteriori (MAP) döntésnek nevezzük.

A következőkben olyan klasszikus jelmérési feladatokat vizsgálunk, amelyek döntési módszerek alkalmazásával oldhatók meg.

Zajjal fedett jelek detektálása esetén a megfigyelések alapján azt kell eldönteni, hogy a várt és ismert paraméterekkel rendelkező jel jelen van-e vagy sem.

Három tipikus esetet vizsgálunk. Ezek a következők:

- konstans jel detektálása zajban;
- változó, de ismert jel detektálása zajban;
- ismert statisztikai jellemzőkkel rendelkező sztochasztikus jel detektálása zajban.

Mindhárom esetben több megfigyelést végzünk, melyeket egy lépésben dolgozunk fel. A megoldás során a likelihoodarányt határozzuk meg.

3.12. példa: Kontans jel detektálása

Legyen a két hipotézisünk a következő:

$$\begin{aligned} H_0: z_k &= n_k, & k &= 1, 2, \dots, N \\ H_1: z_k &= a + n_k, \end{aligned} \quad (3.285)$$

ahol a a konstans jel, $\{n_k\}$ pedig a megfigyelési zajsorozat. Feltételezzük, hogy az egyes megfigyelések zajkomponensei független Gauss-eloszlású valószínűségi változók nulla várható értékkel és σ_n^2 varianciával.

A két feltételes sűrűségfüggvény tehát:

$$f_{z|H_0}(z | H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp \left[-\frac{z^2}{2\sigma_n^2} \right], \quad (3.286)$$

$$f_{z|H_1}(z | H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(z-a)^2}{\sigma_n^2} \right]. \quad (3.287)$$

A feltételes sűrűségfüggvényeket felhasználva, a megfigyelések függetlenségét figyelembe véve az N -edik megfigyelés után meghozott likelihoodarány-teszt a következő:

$$\Lambda(z) = \prod_{k=1}^N \frac{f_{z|H_1}(z_k | H_1)}{f_{z|H_0}(z_k | H_0)} = \prod_{k=1}^N \frac{\exp \left[-\frac{(z_k-a)^2}{2\sigma_n^2} \right]}{\exp \left[-\frac{z_k^2}{2\sigma_n^2} \right]} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \eta, \quad (3.288)$$

ill. a logaritmálás után a log-likelihood arány:

$$\begin{aligned} \ln \Lambda(z) &= \sum_{k=1}^N \frac{z_k^2}{2\sigma_n^2} - \sum_{k=1}^N \frac{(z_k-a)^2}{2\sigma_n^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \ln \eta = \\ &= \frac{a}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^N z_k - \frac{Na^2}{2\sigma_n^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \ln \eta. \end{aligned} \quad (3.289)$$

Átrendezve látható, hogy a döntést a megfigyelések átlaga alapján hozhatjuk meg:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \frac{\sigma_n^2}{Na} \ln \eta + \frac{a}{2}. \quad (3.290)$$

A megfigyelések átlaga egyben elégséges statisztikát is képez, tehát a döntés meghozatalához szükséges és a megfigyelésekből származó összes információt tartalmazza.

Határozzuk meg a hibás döntések valószínűségeit

$$P_M = \int_{\mathcal{Z}_0} f_{z|H_1}(z | H_1) dz, \quad (3.291)$$

$$P_F = \int_{\mathcal{Z}_1} f_{z|H_0}(z | H_0) dz. \quad (3.292)$$

A hibavalószínűségek meghatározása többdimenziós sűrűségfüggvény integrálását igényli, amely általános esetben meglehetősen nehéz feladat.

A többdimenziós sűrűségfüggvény integrálása helyett dolgozhatunk az egydimenziós elégséges statisztika sűrűségfüggvényével is.

A $\bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z_k$ átlag olyan Gauss-eloszlású valószínűségi változó, amelynek varianciája $\frac{\sigma_n^2}{N}$, várható értéke pedig attól függ, hogy melyik hipotézis igaz.

$$E\{\bar{z} | H_0\} = 0; \quad E\{\bar{z} | H_1\} = a.$$

Az egységnyi varianciára normalizált elégséges statisztikát $l(z)$ -vel jelölve a likelihoodarány

$$l(z) = \frac{1}{\sqrt{N}\sigma_n} \sum_{k=1}^N z_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{\sigma_n}{\sqrt{N}a} \ln \eta + \frac{\sqrt{N}a}{2\sigma_n}. \quad (3.293)$$

A hibavalószínűségek az elégséges statisztika $f_{l|H_0}(l|H_0)$, ill. $f_{l|H_1}(l|H_1)$, feltételes sűrűségfüggvényeinek megfelelő tartományra vett integráljaként határozhatók meg.

Bevezetve a $d = \frac{\sqrt{N}a}{\sigma_n}$ jelölést

$$P_M = \int_{-\infty}^{\frac{\ln \eta + \frac{d}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(l-d)^2}{2} \right] dl$$

és

$$(3.294)$$

$$P_F = \int_{\frac{\ln \eta + \frac{d}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{l^2}{2} \right] dl.$$

$$(3.295)$$

A hibavalószínűségek adott paraméterek mellett táblázatból meghatározhatók.

Megjegyzések:

1. A (3.290) összefüggést vizsgálva látható, hogy a megfigyelések átlagát az a priori valószínűségektől és a költségértékektől is függő küszöbértékkel kell összehasonlítani.

Amennyiben $P_0 = P_1 = 0,5$, valamint $C_{00} = C_{11}$ és $C_{10} = C_{01}$, $\eta = 1$, tehát a döntési küszöb csak a konstans jel értékétől függ. Ha a megfigyelések átlaga kisebb $a/2$ -nél a H_0 hipotézist (nincs jel), ha ennél nagyobb a H_1 hipotézist (van jel) tekintjük igaznak, amely nyilvánvalóan összhangban van várakozásunkkal. Az a priori valószínűségek megváltozása a küszöbértéket módosítja. Ha $P_1 > 0,5$, vagyis ha a konstans jel előfordulása gyakoribb, mint a hiánya a döntési küszöb csökken, ellenkező esetben nő.

A küszöbmódosítás $\frac{a}{2}$ -hoz viszonyított mértéke a $\frac{\sigma_n^2}{a^2}$ aránytól függ, ami a zajvariancia

és a jelamplitúdó négyzetének aránya. Minél kisebb a zaj varianciája a jelhez képest, annál kisebb a módosítás mértéke.

2. A hibavalószínűségeket vizsgálva P_M és P_F egy d , ill. egy nulla várható értékű Gauss-sűrűségfüggvény megfelelő intervallumra vett integráljaként határozható meg.

A kis hibavalószínűségek biztosításához d értéke nagy kell legyen, amit $Na^2 > \sigma_n^2$ biztosíthat. Ez tehát azt a szintén várható tényt fejezi ki, hogy minél kisebb a jel a zajhoz viszonyítva, annál több megfigyelés átlaga alapján lehet a megfelelően kis hibavalószínűségű döntést meghozni.

3. A megfigyelések átlaga csak Gauss-zaj esetén képezi az optimális Bayes-döntés alapját. Eltérő zajstatisztika mellett az átlag alapján történő döntés nem egyezik meg a Bayes-döntéssel.

3.13. példa: Változó amplitúdójú jel detektálása

Az előzőekhez hasonlóan legyen a két hipotézis a következő:

$$\begin{aligned} H_0: z_k &= n_k, \\ H_1: z_k &= a_k + n_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.296)$$

ahol a_k a változó, de ismert jel, n_k pedig a megfigyelési zaj értékeit jelenti. Feltételezzük, hogy $\{n_k\}$ most is diszkrét Gauss fehérzaj folyamat.

Várható, hogy az előző, egyszerű átlagolás alapján hozott döntés nem lesz megfelelő, mivel a jel/zaj viszony megfigyelésenként változik.

Határozzuk meg a likelihoodarányt. Néhány egyszerű lépés után az előzőekhez hasonlóan kapjuk:

$$\begin{aligned} \ln A(z) &= \sum_{k=1}^N \frac{(z_k - a_k)^2}{2\sigma_n^2} + \sum_{k=1}^N \frac{z_k^2}{2\sigma_n^2}, \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{z_k a_k}{\sigma_n^2} - \sum_{k=1}^N \frac{a_k^2}{2\sigma_n^2}. \end{aligned} \quad (3.297)$$

A likelihoodarány-teszt tehát:

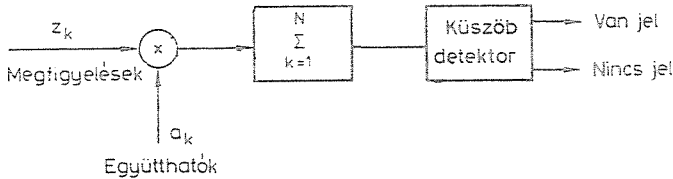
$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z_k a_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N a_k^2 + \frac{\sigma_n^2}{N} \ln \eta. \quad (3.298)$$

Megjegyzések:

1. A döntés a megfigyelések súlyozott átlaga alapján hozható meg, ahol a súlytényezők a detektálandó jel értékei. A súlyozott átlag elégséges statisztikát képez. Az elégséges statisztika úgy is felfogható mint egy olyan nemrekurzív szűrő kimenete, amelynek bemenetére a megfigyelések kerülnek, együtthatóit pedig az ismert, detektálandó jel értékeihez illeszkedve kell megválasztani. E jeldetektálási feladat tehát illesztett szűrő (matched filter) alkalmazására vezetett. Az illesztett szűrő alkalmazása intuitíven is igazolható, ugyanis azt jelenti, hogy azon megfigyeléseket, melyek jelkomponense nagyobb, a súlyozott átlagképzésben nagyobb súllyal vesszük figyelembe, míg a kisebb jelkomponenst tartalmazó megfigyelések súlya is kisebb lesz. A döntést eredményező detektor felépítése a 3.25. ábrán látható.

2. A döntés hibavalószínűségeit most is a skalár elégséges statisztika felhasználásával célszerű meghatározni. A meghatározás menete megegyezik az előző esettel.

3. A jeldetektálási feladat könnyen kiterjeszthető arra az esetre, ha két jel közötti választás a feladat. A döntést megvalósító jeldetektor ebben az esetben két illesztett szűrőt tartalmaz, melyeket a két detektálandó jelhez kell illeszteni. A döntés a két szűrő kimenetének összehasonlítása alapján történhet.



3.25. ábra. A döntést eredményező detektor blokkvázlata

3.14. példa: Véletlen jel detektálása zajban

A következő jeldetektálási feladatban mind a hasznos jel, mind a megfigyelési zaj sztochasztikus folyamat, melyek statisztikai jellemzői adottak. A két sztochasztikus folyamat közötti megkülönböztetés (jel, ill. zaj) azt jelenti, hogy az egyik számunkra információt hordoz, míg a másik jelenléte nem kívánatos.

Tételezzük fel, hogy mind a jel, mind a zaj *Gauss*-eloszlású diszkrét stacionárius fehérzaj folyamat, nulla várható értékkel és σ_n^2 , ill. σ_a^2 varianciával.

A likelihoodarány meghatározásához szükséges feltehető sűrűségfüggvények ezért a következők:

$$f_{z|H_0}(z_k | H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp \left[-\frac{z_k^2}{2\sigma_n^2} \right]. \quad (3.299)$$

$$f_{z|H_1}(z_n | H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_n^2 + \sigma_a^2}} \exp \left[-\frac{z_l^2}{2(\sigma_n^2 + \sigma_a^2)} \right]. \quad (3.300)$$

A döntési szabálynak tehát két eltérő varianciájú *Gauss*-eloszlású valószínűségi változó között kell választani.

A log-likelihoodarány a következőre adódik:

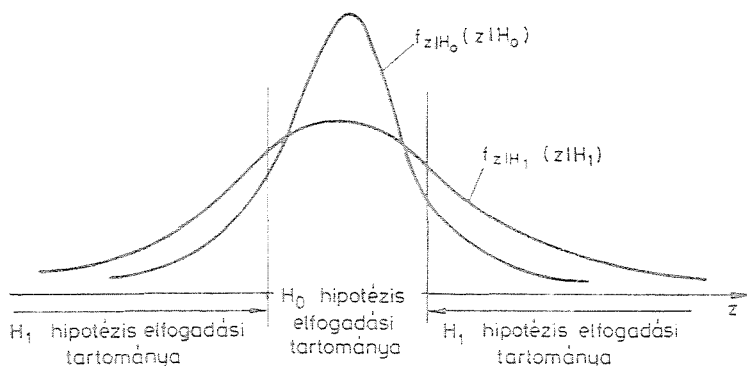
$$\ln \Lambda(z) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{z_k^2}{2\sigma_n^2} - \frac{z_k^2}{2(\sigma_a^2 + \sigma_n^2)} \right) + \frac{N}{2} \ln \frac{\sigma_n^2}{\sigma_a^2 + \sigma_n^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \ln \eta. \quad (3.301)$$

Átrendezve kapjuk a döntési szabályt:

$$\sum_{k=1}^N \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \frac{2\sigma_n^2(\sigma_n^2 + \sigma_a^2)}{\sigma_a^2} \left(\frac{N}{2} \ln \frac{\sigma_a^2 + \sigma_n^2}{\sigma_n^2} + \ln \eta \right). \quad (3.302)$$

Megjegyzések:

1. Mivel mind a zajminták, mind a jelminták nulla várható értékű, *Gauss*-valószínűségi változók, a megfigyelések azonos valószínűséggel vehetnek fel pozitív és negatív értékeket, a döntésnél a megfigyelések előjelét figyelmen kívül kell hagyni. Ezt tükrözi a döntési szabályban a megfigyelések négyzetösszege.



3.26. ábra. A döntési tartományok alakulása

2. A hasznos jel jelenléte mellett a megfigyelések varianciája nagyobb, így ha a megfigyelések az origó körüli a (3.302)-ből adódó méretű intervallumon kívül esnek, a H_1 hipotézist (van jel) kell elfogadni (3.26. ábra).

Az itt közölt feladatok a *Bayes*-döntésre mutatnak példát. Mindhárom esetben a megoldást a likelihoodarány-teszt szolgáltatja. Mint a következőkben látni fogjuk, nem csupán a *Bayes*-döntés vezet likelihoodarány-tesztre, más döntési eljárásoknál azonban a döntési küszöbértékek különböznek a *Bayes*-döntés küszöbértékétől. Az előző feladatok tehát a küszöbérték megfelelő megválasztásával *Bayes*-tól eltérő döntésekre is vezethetnek.

Többhipotézises *Bayes*-döntések

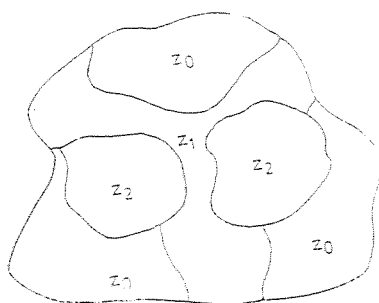
A bináris *Bayes*-döntés kiterjeszthető több hipotézis esetére. Tételezzük fel, hogy M hipotézis közül kell választani, vagyis a $\mathcal{Z}$ megfigyelési teret M diszjunkt tartományra kell felosztani (3.27. ábra).

A megfigyelési tér ilyen felosztása azt jelenti, hogy ha a z megfigyelés a $\mathcal{Z}_i$ tartományba esik a H_i hipotézist fogadjuk el.

A döntés átlagos költsége többhipotézises esetben:

$$R = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} C_{ij} P_j \int_{\mathcal{Z}_i} f_{z|H_j}(z|H_j) dz, \quad (3.303)$$

ahol P_j a j -edik hipotézis, H_j a priori valószínűsége.



3.27. ábra. A megfigyelési tér felosztása M hipotézis esetén

Felhasználva, hogy

$$\int_{\mathcal{Q}_i} f_{z|H_i}(z | H_i) dz = 1 - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} \int_{\mathcal{Q}_j} f_{z|H_j}(z | H_j) dz \quad (3.304)$$

az átlagos költség a következő formába írható

$$R = \sum_{i=0}^{M-1} C_{ii} P_i + \sum_{i=0}^{M-1} \int_{\mathcal{Q}_i} \sum_{j=0}^{M-1} (C_{ij} - C_{jj}) P_j f_{z|H_j}(z | H_j) dz. \quad (3.305)$$

Itt az első tag a döntés állandó költsége, a tartományok megválasztásától független. A második tagot vizsgálva minimumot akkor érünk el, ha minden olyan z megfigyelést $\mathcal{Q}_i$ tartományba sorolunk ha a

$$\sum_{j=0}^{M-1} (C_{ij} - C_{jj}) P_j f_{z|H_j}(z | H_j) < \sum_{j=0}^{M-1} (C_{kj} - C_{jj}) P_j f_{z|H_j}(z | H_j) \quad (3.306)$$

teljesül minden $k \neq i$ -re.

Ettől eltérő döntésnél ugyanis az integrál értéke és így az átlagos költség is növekedne. (3.306)-ot egyszerűsítve a döntési szabály a következőre adódik: fogadjuk el a H_i hipotézist amennyiben

$$\sum_{j=0}^{M-1} C_{ij} P_j f_{z|H_j}(z | H_j) < \sum_{j=0}^{M-1} C_{kj} P_j f_{z|H_j}(z | H_j) \quad (3.307)$$

teljesül minden $k \neq i$ -re.

Ha $C_{ij} = 1$ ($i \neq j$) és $C_{ii} = 0$, ismét a MAP döntést kapjuk, vagyis a H_j hipotézist fogadjuk el, ha

$$P_j f_{z|H_j}(z | H_j) > P_k f_{z|H_k}(z | H_k) \quad (3.308)$$

minden $k \neq j$ -re.

A MAP döntés likelihood-arány-tesztként megfogalmazva a következő: ha

$$A_j(z) = \frac{f_{z|H_j}(z | H_j)}{f_{z|H_k}(z | H_k)} > \frac{P_k}{P_j} \quad (3.309)$$

minden $k \neq j$ -re, úgy a H_j hipotézist tekintjük igaznak.

3.15. példa

Határozzuk meg egy feszültség értékét, ha a feszültség N különböző értéket vehet fel. Tételezzük fel, hogy a kimenetet most is Gauss, zérus várható értékű σ_n^2 varianciájú zaj terheli. A helyes döntéshez zérus, a hibához egységnyi költséget rendelve a megfigyelés alapján MAP döntés hozható.

Az egyes hipotézisek

$$H_k: z = a_k + n \quad (3.310)$$

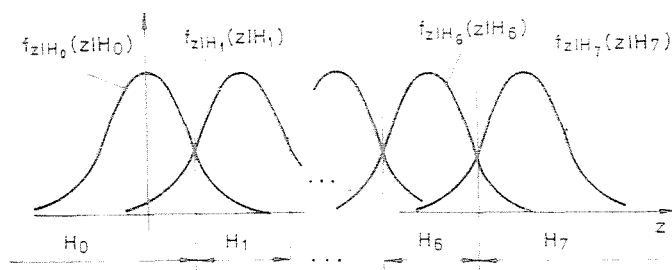
ahol $k = 0, 1, \dots, N$, a_k pedig a k -adik feszültségérték.

A megfigyelések feltételes sűrűségfüggvényei

$$f_{z|H_k}(z | H_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{(z - a_k)^2}{2\sigma_n^2}\right). \quad (3.311)$$

Ha az a priori valószínűségek mind megegyeznek, a MAP döntést úgy is megkapjuk, ha adott megfigyelésnél a feltételes sűrűségfüggvények maximumát keressük H_k szerint.

A döntési küszöbértékek nyilvánvalóan a feltételes sűrűségfüggvények metszéspontjainál lesznek (3.28. ábra).



3.28. ábra. Döntési tartományok

Ha az egyes feszültségértékek különbsége állandó, vagyis $a_k = k\Delta$, a döntési tartományok:

$$\begin{aligned} H_0: & -\infty < z < \frac{\Delta}{2}, \\ H_i: & \left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta \leq z < \left(i + \frac{1}{2}\right)\Delta, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \\ H_N: & \left(N - \frac{1}{2}\right)\Delta \leq z < \infty. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Szekvenciális Bayes-döntések

Az eddigi döntéseket rögzített számú megfigyelés felhasználásával nyertük. Szekvenciális döntéseknél a megfigyeléseket lépésenként használjuk fel, a megfigyelések számát addig növeljük, amíg a megfelelő pontosságú eredményre nem jutunk.

Sok alkalmazásban a megfigyelések számának növelése komoly nehézséget jelent, nagy költséggel járhat, ezért természetes igény, hogy az adott pontosságú döntést minél kevesebb megfigyelés felhasználásával nyerjük. A megfelelő pontosság elérését minimális számú megfigyelés felhasználásával biztosítja a szekvenciális eljárás. A Bayes-döntés minimális átlagos költségre törekszik. Szekvenciális Bayes-döntéseknél az átlagos költség meghatározásakor a megfigyelések költségét is figyelembe kell venni. Újabb megfigyelés végzése csak akkor indokolt, ha az ebből származó többletköltség kisebb, mint a döntés pontosságának növekedéséből adódó költségcsökkenés.

A szekvenciális megfigyelések felhasználásával a Bayes-döntések sorozata hozható meg, minden egyes lépésben meghatározható a döntés hibaválósínúsége, ill. a döntéshez rendelt költség. Ezek alapján adott lépésben vagy leállítható a szekvenciális eljárás (meghozható a döntés), vagy az eljárást tovább kell folytatni.

Megjegyzések:

1. A szekvenciális Bayes-döntések gyakorlati alkalmazása komoly nehézségekbe ütközik. Ennek oka elsősorban, hogy a feladatok nagy részében a megfigyelések költségének meghatározása nehéz. Azonban még a megfigyelés költségeinek ismeretében is

a likelihood függvények kiszámításánál jelentkező matematikai problémák miatt csak speciális esetekben — pl. független megfigyelések mellett, vagy *Gauss—Markov* esetben — kapunk jól kiértékelhető analitikus megoldást.

2. A szekvenciális eljárások nem javítják a döntést — nem eredményeznek kisebb hibavalószínűséget —, csupán a megfelelő döntés meghozatalához szükséges megfigyelések számának csökkentéséhez nyújtanak segítséget. Tehát alkalmazásuk általában ott igazolható, ahol a megfigyelés költsége jelentős.

3.7.2. Minimax döntés

A *Bayes*-döntések származtatásához az a priori valószínűségeket ismerni kellett, hiszen ezek a küszöbértéket befolyásolták. Megváltozásuk azt eredményezi, hogy a döntési tartományok is megváltoznak, s így mindig a minimális átlagos költséget eredményező felosztást biztosítják.

Ha a rögzített döntési szabály mellett az a priori valószínűségek megváltoznak, a döntés hibavalószínűsége és költsége is változni fog, az átlagos költség a *Bayes*-költséghez képest növekszik. Hogy az így kapott döntés tulajdonságait összevethessük a *Bayes*-döntés tulajdonságaival, határozzuk meg a *Bayes*-költséget az a priori valószínűségek függvényében.

Vizsgáljuk ehhez a (3.273) összefüggést.

Használjuk fel a (3.291) és (3.292)-ben definiált hibavalószínűségeket:

$$P_F = \int_{\mathcal{Z}_1} f_{z|H_0}(z | H_0) dz, \quad (3.313)$$

$$P_M = \int_{\mathcal{Z}_0} f_{z|H_1}(z | H_1) dz. \quad (3.314)$$

P_1 mint láttuk annak a hibás döntésnek a valószínűségét adja, amikor a H_1 hipotézist választjuk és a H_0 igaz, míg P_M az ellenkező téves döntés valószínűsége.

Figyelembe véve, hogy az előző integrandusok sűrűségfüggvények, tehát a teljes $\mathcal{Z}$ tartományra vett integráljuk egységnyi, valamint hogy bináris döntésnél $P_0 + P_1 = 1$ a *Bayes*-költség a következő formába írható:

$$R_B = C_{00}(1 - P_F) + C_{10}P_F + P_1[(C_{11} - C_{00}) + (C_{01} - C_{11})P_M - (C_{10} - C_{00})P_F]. \quad (3.315)$$

A *Bayes*-költség tipikus alakulását az a priori valószínűségek függvényében a 3.29. ábra mutatja. P_1 megváltozása a döntési tartományokat is megváltoztatja, így a hibás döntések valószínűségei, P_F és P_M is változnak.

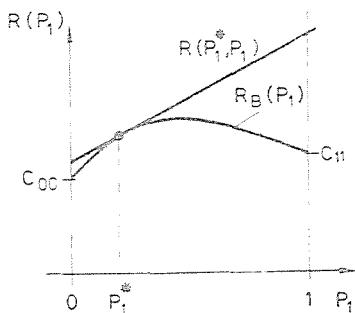
Abban az esetben azonban, ha a döntési szabályt adott $P_1 = P_1^*$ állapotnak megfelelően rögzítjük, P_F és P_M az a priori valószínűségektől függetlenül állandó lesz, s az átlagos költséget P_1 lineáris függvényeként kapjuk meg. Az így kapott döntési szabály csak $P_1 = P_1^*$ mellett adja a *Bayes*-döntést, minden egyéb esetben attól eltérő eredményt szolgáltat. A rögzített felosztáshoz tartozó költséget $R(P_1^*, P_1)$ -gyel jelölve nyilvánvaló, hogy

$$R(P_1^*, P_1) \equiv R_B(P_1). \quad (3.316)$$

hiszen a *Bayes*-döntést úgy definiáltuk, mint a minimális átlagos költségű döntést.

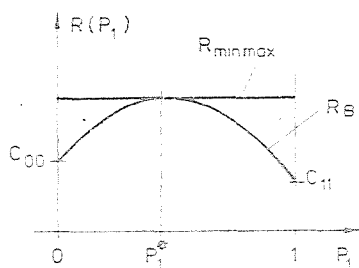
A rögzített felosztású döntés átlagos költségét ábrázolva, egy olyan egyenest kapunk, amely $P_1 = P_1^*$ pontban érinti $R_B(P_1)$ -et (3.29. ábra).

Az ábrázolt két költség alakulásából jól érzékelhető, hogy milyen hatása van, ha pontatlan a priori valószínűségekből indulunk ki.



3.29. ábra. A költség alakulása P_1 függvényében

Amennyiben nem adottak a P_0, P_1 valószínűségek, célszerűnek tűnik olyan értékeket feltételezni, melyek mellett meghatározott döntés tulajdonságai kézben tarthatók: tehát bármilyen tényleges szituációban meg lehessen határozni a döntés hibaválószerűségét. Olyan P_1^* értéket tételezzünk fel, melynél a Bayes-költség a legnagyobb, bármilyen tényleges P_1 érték következik is be (3.30. ábra).



3.30. ábra. A minimax döntési költség

Az ábrából látható, hogy ez a költségfüggvény vízszintes érintőjének pontjában van, vagyis (3.315)-ben P_1 együtthatója zérus kell legyen. Az így kapott minimax döntés feltétele tehát:

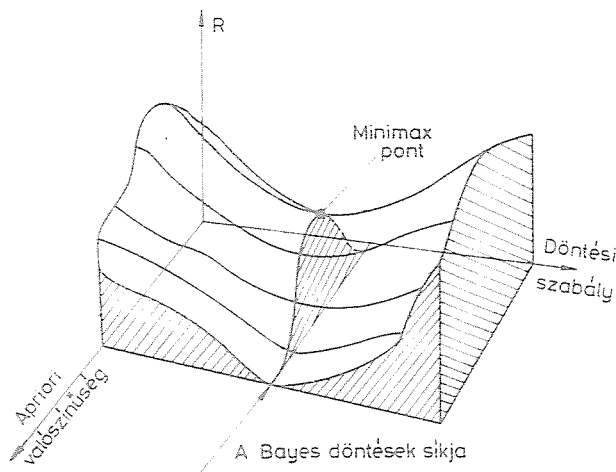
$$C_{11} - C_{00} + (C_{01} - C_{11})P_M - (C_{10} - C_{00})P_F = 0. \quad (3.317)$$

A kapott minimax egyenlet származtatásánál feltételeztük, hogy a maximális Bayes-költség nem valamelyik helyes döntéshez tartozik, hanem P_1 függvényében vizsgálva a $[0, 1]$ intervallum belsejében található.

E döntési eljárás tehát a minimális (Bayes) költség maximumát keresi meg, és az ehhez tartozó P_{1M} valószínűségnek megfelelően szabja meg a teszt küszöbértékét. A minimax és a Bayes-döntés kapcsolatát érzékelteti a 3.31. ábra.

A Bayes-döntés még egy speciális esetét meg kell említenünk. Feltételezve, hogy $C_{ij} = 1$, ha $i \neq j$ és $C_{ij} = 0$, ha $i = j$, valamint, hogy a hipotézisek bekövetkezési valószínűségei azonosak a maximum likelihood döntést nyerjük. A maximum likelihood döntést a megfelelő becslési eljárásához hasonlóan akkor alkalmazhatjuk, ha csak a megfigyelési zaj statisztikai tulajdonságait ismerjük. A ML döntésnél a likelihoodarány-

teszt küszöbértéke egységnyi. Addig azonban, amíg a ML becslést — kedvező tulajdonságai miatt — gyakran alkalmazzák, a ML döntésnek nincs komoly gyakorlati értéke. Helyette, amennyiben csak a megfigyelések feltételes sűrűségfüggvényei adóttak, a *Neyman—Pearson*-döntés alkalmazható.



3.31. ábra. A Bayes- és a minimax döntés kapcsolata

3.7.3. Neyman—Pearson-döntés

Az alkalmazások jelentős részében nehéz reális költséget és a priori valószínűségeket meghatározni. Ezek hiányában *Bayes*-döntés nem hozható. Amennyiben csak a megfigyelések feltételes sűrűségfüggvényei ismertek, optimumkritériumként a hibás döntések valószínűségének — bináris döntésnél P_F -nek és P_M -nek — minél kisebb értéken tartása a cél.

A következőkben csak a bináris esetet vizsgáljuk. Bár a *Neyman—Pearson*-döntés többhipotézises esetre is kiterjeszthető, az ilyen alkalmazások viszonylag ritkák. A bináris *Neyman—Pearson*-döntés az elsőfajú hibavalószínűség (P_F) rögzített értéke mellett minimálja P_M -et, tehát egy feltételes szélső érték problémára vezet.

A feltételes szélső érték feladat a matematikából jól ismert *Lagrange*-multiplikátor alkalmazásával oldható meg. Ennek megfelelően definiáljuk a minimálandó kritériumfüggvényt:

$$C_{NP} = P_M + \lambda[P_F - \gamma], \quad (3.318)$$

ahol λ a *Lagrange*-multiplikátor, γ pedig P_F hibavalószínűség rögzített értéke. Amennyiben $P_F = \gamma$, a kritériumfüggvény minimálása P_M -et minimálja. P_F és P_M kifejezéseit figyelembe véve:

$$C_{NP} = \lambda(1 - \gamma) + \int_{\mathcal{Z}_0} [f_{z|H_1}(z | H_1) - \lambda f_{z|H_0}(z | H_0)] dz. \quad (3.319)$$

Az összefüggést vizsgálva látható, hogy bármilyen $\lambda > 0$ mellett C_{NP} egy likelihoodarány-teszt alapján minimálható. Ugyanis minden olyan megfigyelést, amely

mellett az integrandus negatív, $\mathcal{Q}_0$ tartományba kell sorolni, hiszen ekkor C_{NP} csökken. Ez pedig megfelel a következő likelihoodarány-tesztnek

$$A(z) = \frac{f_{z|H_1}(z|H_1)}{f_{z|H_0}(z|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \lambda, \quad (3.320)$$

ahol a küszöbértéket úgy kell megválasztani, hogy P_F az előírt értéket vegye fel.

P_F (3.292) szerinti meghatározása különösen többdimenziós esetben nehéz. Meghatározása azonban egyszerűbben is lehetséges, ha a likelihoodarány segítségével végezzük. $A(z)$ ugyanis olyan skalár valószínűségi változó, melynek valószínűség-sűrűségfüggvénye attól függ, hogy melyik hipotézis igaz. A 3.32. ábra tipikus $f_{A|H_1}(A|H_1)$ és $f_{A|H_0}(A|H_0)$ sűrűségfüggvényeket mutat.

Amennyiben e két sűrűségfüggvényt ismerjük, a hibavalószínűség meghatározását egydimenziós esetre vezettük vissza.

Természetesen a likelihoodarány helyett itt is dolgozhatunk a likelihoodarány logaritmusával.

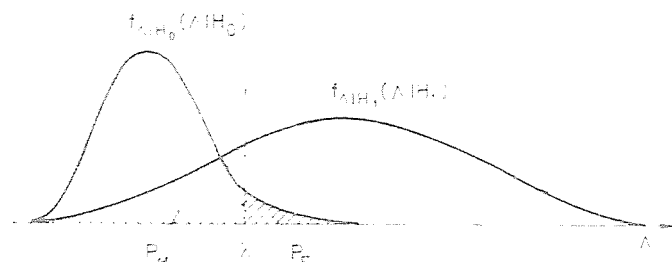
Ezt felhasználva a N—P döntés rögzített hibavalószínűsége felírható (3.32. ábra vonalkázott területe):

$$P_F = \int_{\lambda}^{\infty} f_{A|H_0}(A|H_0) dA = \gamma'. \quad (3.321)$$

(3.321) megoldása megadja a λ küszöbértéket.

A 3.32. ábrából az is jól látható, hogy P_M annál kisebb lesz, minél kisebb λ értéket, λ -t tehát addig csökkenthetjük, amíg $P_F \cong \gamma'$.

4

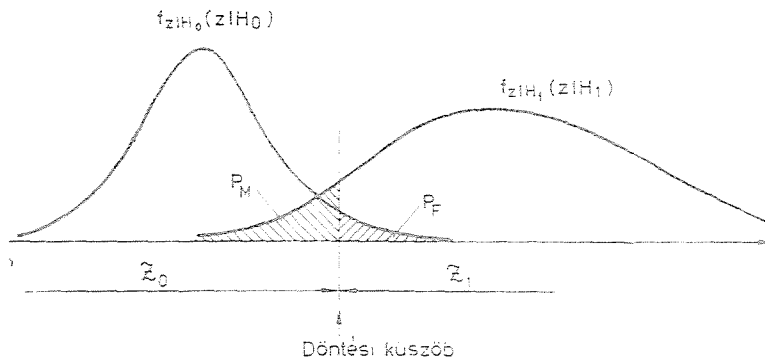


3.32. ábra. A döntési hibavalószínűségek meghatározása

Megjegyzések:

1. A Neyman—Pearson-döntést a feltételes sűrűségfüggvényekkel mutatja a 3.33. ábra. Az ábrázolt esetben a megoldás triviális. Rögzítve ugyanis P_F értékét a döntési küszöböt is rögzítjük, így P_M valójában nem minimálható.

Bonyolultabb esetekben azonban az egyik hibavalószínűség rögzítése nem szabja meg egyértelműen a megfigyelési tér felosztását. Erre mutat példát a 3.34. ábra, ahol P_F értéke különböző döntési tartományok, és így eltérő P_M hibavalószínűségek mellett veheti fel az előre megszabott értéket. Az ábra két lehetséges felosztást jelöl meg:



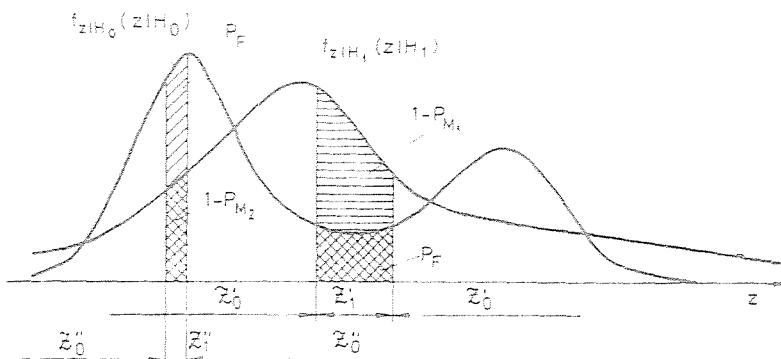
3.33. ábra. A Neyman—Pearson-döntés triviális esetben

($\mathcal{Q}'_1$, $\mathcal{Q}'_0$ és $\mathcal{Q}''_1$; $\mathcal{Q}''_0$) mindkettő biztosítja, hogy P_F az előírt érték legyen, a másik hibavalószínűség azonban a két esetben jelentősen eltér $P_{M_1} < P_{M_2}$, vagyis a megfelelő helyes döntések valószínűsége $1 - P_{M_1} > 1 - P_{M_2}$. A Neyman—Pearson-döntés a megfigyelési tér azon felosztását adja meg, amely minimális P_M -et biztosít a rögzített P_F mellett.

Ez, mint a (3.320) összefüggésből látható azt jelenti, hogy mindazon z megfigyelési értékek, melyeknél a két feltételes sűrűségfüggvény aránya nagyobb mint $\lambda = \lambda(P_F)$ a $\mathcal{Q}_1$ tartomány részét kell képezzék, míg a többi $\mathcal{Q}_0$ -hoz kell tartozzon.

2. A Neyman—Pearson-döntés kapcsán meg kell említeni a Wald szekvenciális döntést is, amely a Neyman—Pearson-döntés módosításának tekinthető. A Wald-döntés szintén csak a hibavalószínűségek értékét figyeli. Rögzítve a kétfajta hibavalószínűséget (P_F -et és P_M -et), ezekről függő két érték definiálható, melyek a likelihood-arány-teszt küszöbértékei lesznek. A Wald szekvenciális döntés lépésenként e küszöbértékekkel hasonlítja össze a likelihoodarányt. Valamelyik érték elérésekor a döntés meghozható, míg ha a likelihoodarány értéke a két küszöb között van, az eljárást újabb megfigyeléssel és a likelihoodarány ismételt meghatározásával folytatni kell.

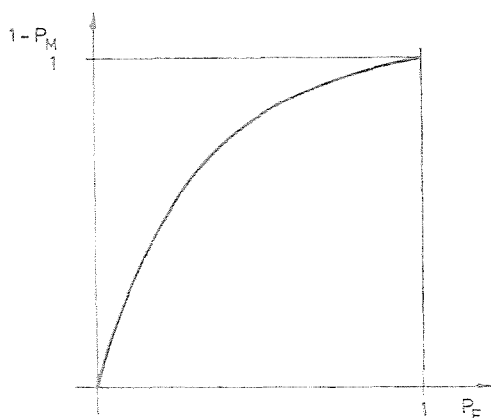
Kimutatható, hogy a Wald szekvenciális döntési eljárás optimális abban az értelemben, hogy adott hibavalószínűség mellett nem létezik más döntési eljárás, amely átlagosan kevesebb megfigyelést igényel. Ugyancsak bizonyítható, hogy a Wald-döntés 1 valószínűséggel befejeződik.



3.34. ábra. A Neyman—Pearson-döntés nemtriviális esetben

3.7.4. A döntések minősítése

A döntési eljárások minősítésére, teljesítőképességük jellemzésére a hibás döntések valószínűségei szolgálnak. Bináris döntéseknél ez a P_M és P_F valószínűségek meghatározását igényli. A likelihoodarány-tesztre vezető döntések teljes jellemzésére szokás a két hibavalószínűség kapcsolatát megadni. A döntést jellemző karakterisztika (receiver operating characteristic, ROC) $(1 - P_M)$ maximumát ábrázolja P_F függvényében (3.35. ábra). E karakterisztika alkalmas arra, hogy a döntés jellemzőinek alakulását a feladat paramétereinek (költségértékek, a priori valószínűségek), ill. az egyes likelihoodarány-tesztre vezető eljárások függvényében mutassa be. A hibavalószínűségek meghatározása rendszerint egy többdimenziós sűrűségfüggvény megfelelő tartományra vett integráljának kiszámítását jelenti, amely még Gauss-eloszlások mellett is nehézségeket jelent. Többhipotézises döntéseknél a hibavalószínűségek meghatározásánál további nehézségek jelentkeznek. Adott döntési eljárás vizsgálatánál (analízis feladat) a hibavalószínűségek numerikusan meghatározhatók. A döntési eljárások tervezésénél



3.35. ábra. A döntési karakterisztika (ROC)

(szintézis feladat) viszont a numerikus megoldás helyett a hibavalószínűségek zárt, analitikus formában történő megadására lenne szükség. Ha a zárt formájú kifejezés nem létezik, a hibavalószínűség közelítő kifejezése vagy felső korlátja jellemezheti a döntést.

A döntések jellemzésére szolgáló felső korlátokkal azonban jelen körülmények között nem foglalkozhatunk, csupán a megfelelő irodalomra utalunk.

4. Lineáris mérési eljárások

Az eredmények gyakorlati alkalmazhatósága, a módszerek elterjedtsége tekintetében kiemelkedő jelentősége van a lineáris mérési eljárásoknak. Bár a lineáris mérési eljárások származtathatók a 3. fejezetben megismert becslési módszerek speciális eseteként, a témakörnek létezik a lineáris terek elméletére épülő koherens megközelítése is.

Ez a témakör tekinthető a becsléselmélet talán leggazdagabb, legismertebb eredményeket magában foglaló területének, ami *Gauss* alapozó munkáitól kiindulva tartalmazza a *Wiener*- és *Kalman*-szűrők elméletét, továbbá a paraméteridentifikáció legjelentősebb módszereit. A fejezet célja a lineáris mérési eljárásokkal kapcsolatos alapvető eredmények áttekintése és a különböző módszerek közötti kapcsolat bemutatása.

A 4.1. szakaszban bevezetőként összefoglaljuk a tárgyalt lineáris mérési eljárások típusait, és megadjuk a vektorterekre épülő tárgyalásmód szemléleti alapját.

A 4.2. szakasz a legkisebb átlagos négyzetes hibájú, lineáris becslő nemrekurzív alakjának származtatásával, és ehhez kapcsolódóan a *Wiener*-szűrő átviteli karakterisztikájának tervezésével foglalkozik.

A legkisebb átlagos négyzetes hibájú, lineáris becslő rekurzív alakjának származtatása, továbbá erre építve a diszkrét idejű *Kalman*-prediktor és szűrő algoritmus leírása található a 4.3. szakaszban.

A 4.4. szakasz a *Gauss*—*Markov*-becslő származtatását mutatja be a vektorteres leírásmód segítségével.

A 4.5. szakaszban a legkisebb négyzetes hibájú lineáris becslő geometriai interpretációja található.

4.1. Bevezetés

A mérési eljárások a mérendő objektumon végzett z_t megfigyelések feldolgozásával állítják elő a mérési eredményt, valamilyen

$$\hat{x} = g(z_t) \quad (4.1)$$

összefüggés szerint. Abban az esetben, ha a $g(\cdot)$ függvény egy lineáris funkcionál vagy operátor, a mérési eljárás lineáris.

Ebben a fejezetben vizsgálatainkat a lineáris mérési eljárásokra korlátozzuk és ezeken belül is a hangsúlyt a diszkrét idejű módszerekre helyezzük. A linearitás kikötésének oka a széles körű alkalmazhatóságban és a módszerek szemléletformáló hatásában rejlik. A paraméter- és állapotbecslési, valamint szűrési feladatok többsége ugyanis lineáris rendszer-modellekhez és *Gauss*-folyamatokhoz kapcsolódik, amik a négyzetes hibakritérium mellett lineáris optimális mérési eljárásokhoz vezetnek. Természetesen számos alkalmazásnál nemlineáris modellel és általános sztochasztikus folyamattal kell számolnunk, amik mellett az optimális mérési eljárás is nemlineáris lesz. Sajnos azonban az optimális nemlineáris mérési eljárások tervezése és implementációja igen körülményes, gyakran lehetetlen, ezért közelítő megoldásként lineáris rendszert vagy annak valamilyen módosított formáját választjuk.

A diszkrét idejű megoldások előtérbe helyezésének oka kettős. Egyrészt jól ismert tendencia a digitális jelanalízis módszereinek növekvő alkalmazása a műszertechnikában, aminek közvetlen mérésméleti hátterét a diszkrét idejű optimális mérési eljárások származtatása jelenti. Másrészt a diszkrét idejű módszerek tárgyalása jelentősen egyszerűbb matematikai apparátus használatát igényli, ami ugyancsak nem elhanyagolható szempont.

4.1.1. A lineáris becslések típusai

Az optimális mérési eljárások származtatásának többféle módszere létezik, amik az alkalmazott modell általános tulajdonságai, a szükséges a priori ismeret mértéke szerint különböznek egymástól. Amennyiben elegendő a priori ismeret áll rendelkezésünkre, a hibakritérium kiértékelésével a mérési eljárást analitikusan definiáló összefüggésekhez juthatunk. Ilyen módszerek a 3. fejezetben tárgyalt

- *Bayes*-
 - maximum likelihood és
 - legkisebb négyzetes hibájú
- becslések.

A felsorolt becslési módszerek bizonyos esetekben lineáris becslőkhöz vezetnek a következők szerint:

1. Ha az a priori valószínűségeloszlások *Gauss*-eloszlások, a *Bayes*-becslők több hibakritérium mellett (maximális a posteriori becslő, átlagos négyzetes hiba, átlagos abszolút hiba stb.) lineáris becslési eljárást eredményeznek (lásd 3.2.2. pont).

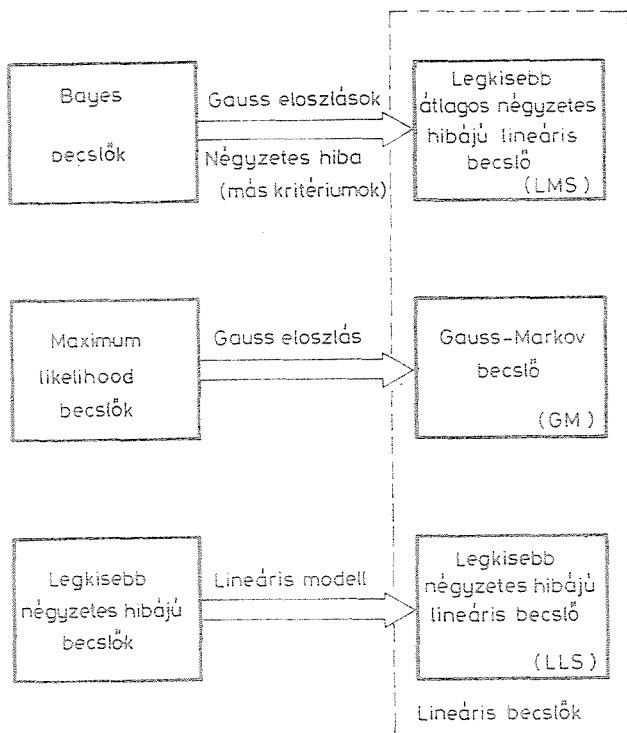
2. Ha az a priori valószínűségeloszlás *Gauss*-eloszlás, a maximum likelihood becslő a lineáris alakú *Gauss*—*Markov*-becslő (lásd 3.3.2. pont).

3. Paramétereiben lineáris modell esetén a legkisebb négyzetes hibájú becslő lineáris (lásd 3.4.1. pont).

A felsorolt lineáris eljárásoknak a becslési alapszerekkel való kapcsolatát szemlélteti a 4.1. ábra. Ha tekintetbe vesszük, hogy a *Gauss*—*Markov*-becslő minimális varianciájú és torzítatlan, az ábra jobb oldalán szereplő becslési eljárások általános tulajdonságaként a következőket jelölhetjük meg:

- linearitás;
- valamilyen négyzetes hibakritérium minimálása a becslő származtatásánál, rögzített feltételek mellett.

Ilyen megfogalmazásban a „rögzített feltételek” kitétel arra vonatkozik, hogy mind az LMS, mind a GM becslőhöz *Gauss*-statisztikák mellett jutottunk, optimalitá-



4.1. ábra. A lineáris becslők típusai

suk tehát csak ebben az esetben bizonyított. A lineáris mérési eljárások ismert előnyei azonban felvetik a kérdést, hogy milyen módon lehet az adott négyzetes hibakritériumok mellett optimális lineáris becslési eljárásokat származtatni? Ez a kérdésfeltevés természetesen lényegesen különbözik az előzőektől, hiszen most a linearitást tervezési peremfeltételként fogalmazzuk meg, és nem valamilyen más problémakörre származtatott megoldások speciális eseteként érzük el. A lineáris mérési eljárások származtatása ennek megfelelően mind célkitűzésében, mind felhasznált apparátusában a méréscél eléréséért önálló területét jelenti. A 4.1. ábra tehát nem a lineáris becslések származtatását, hanem a becslési alapszereket való egyik kapcsolatát reprezentálja.

4.1.2. Lineáris becslések és vektorterek

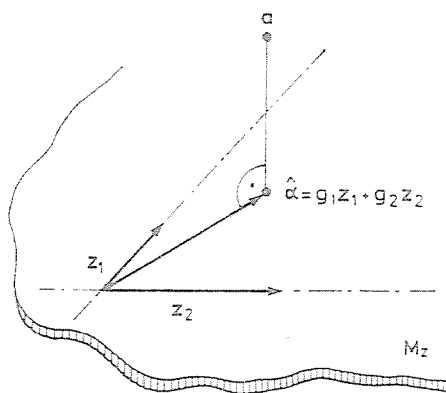
A vektorterek tulajdonságaival, a normált lineáris terekkel és a belső szorzat terekkel már foglalkoztunk a jeltérvek kiépítése kapcsán a 2.3. szakaszban. Mint láttuk, a funkcionálanalízisre épülő leírás alapot nyújt a jel- és rendszerelmélet számos ágának egységes tárgyalására, mint pl. a jelek, funkcionálok és operátorok approximációja, ortogonális transzformációk, optimális adatredukció vagy a folytonos és diszkrét jel-feldolgozás kapcsolatának megadása. E tárgyalásmód lényeges sajátossága geometriai jellege, aminek köszönhetően a legfontosabb eredmények kifejezhetők a közönséges háromdimenziós tér intuitív geometriai tulajdonságainak absztrakcióiként.

A lineáris becslések általános tulajdonságai is lehetővé teszik a vektorteres leírás alkalmazását, mivel a becslési problémák az approximációs problémák speciális eseté-

nek tekinthetők. Láttuk ugyanis, hogy a becslés nem más, mint egy közvetlenül meg nem figyelhető mennyiségnek megfigyelhető adatok alkalmas transzformációjával történő kifejezése. Lineáris mérési eljárásoknál ez a transzformáció a megfigyelések lineáris kombinációja. Ha tehát a becslés elvégzéséhez rendelkezésre álló megfigyelések a $\{z_i\} i = 1, \dots, n$ halmaz elemei, akkor a becslés kifejezhető a következő összefüggéssel:

$$\hat{\alpha} = g_1 z_1 + g_2 z_2 + \dots + g_n z_n. \quad (4.2)$$

A 2.3. szakaszban leírtak értelmében, ha a megfigyelések lineárisan függetlenek, akkor összes lehetséges lineáris kombinációjuk egy M_z alteret feszít ki, aminek a (4.2) összefüggés értelmében $\hat{\alpha}$ eleme: $\hat{\alpha} \in M_z$. Könnyen észrevehetjük, hogy a becslési feladat úgy tekinthető, mint az M_z altéren kívüli „a” pont — tehát a mérendő mennyiség — M_z -beli approximációja, azaz annak az $\hat{\alpha} \in M_z$ pontnak a megkeresése, amely a legközelebb van a-hoz (lásd 4.2. ábra).



4.2. ábra. A lineáris becslés geometriai ábrázolása

E megfontolásból következik, hogy a lineáris becslési eljárások származtatása a vetítési tétel (2.3.2. pont) megfelelő alkalmazására épül, hiszen a négyzetes hibakritériumok miatt az optimalizációs feladat visszavezethető a jeltereknél már megismert optimalizációs problémára.

4.2. A legkisebb átlagos négyzetes hibájú nemrekurzív becslők

A becslési eljárások tervezésénél mindig a rendelkezésre álló a priori ismeretből indulunk ki, hiszen annak jellege határozza meg, hogy melyik alpmódszert alkalmazzuk. A 3.1. szakaszban tárgyalt Bayes-becsléseknél feltételeztük, hogy a mérendő mennyiség valószínűségi változó és ismert a megfigyelés, valamint a mérendő mennyiség együttes valószínűség-eloszlásfüggvénye.

A legkisebb átlagos négyzetes hibájú lineáris becslők (LMS) származtatásánál a Bayes-becslésekhez hasonlóan abból indulunk ki, hogy a mérendő mennyiség valószínűségi változó, továbbá a megfigyelések és a mérendő mennyiség közötti kapcsolat tartalmaz sztochasztikus komponenst. A feladat tehát a legkisebb átlagos négyzetes hibát biztosító lineáris becslő meghatározása.

E szakasz célja a becslő nemrekurzív alakjának származtatása és főbb tulajdonságainak összefoglalása, majd erre építve a lineáris szűréselmélet egyik fontos eredményének, a *Wiener*-szűrésnek tárgyalása.

4.2.1. A becslő származtatása

Mivel mind a megfigyelések, mind a mérendő mennyiség valószínűségi változók, a sztochasztikus jelekre felépített jelteret kell alkalmaznunk. Mint a 2.3.5. pontban láttuk, a jeltér pontjait különféleképpen értelmezhetjük (valószínűségi változó, valószínűségi vektorváltozó, stb.), és természetesen ennek megfelelően kell megválasztani az alkalmas belső szorzat és norma definícióit is. A továbbiakban az egyszerű valószínűségi változókra felépített jelteret használjuk, azaz vektor jellegű mennyiségeknél az összefüggéseket komponensekre bontva írjuk fel. A választás oka, hogy így nyerjük a legmélyebb bepillantást az optimális becslők származtatási módszerébe, és a kapott eredmények könnyen általánosíthatók.

Legyen tehát X a véges második momentummal rendelkező valószínűségi változók tere, ahol tetszőleges $x, y \in X$ -re a belső szorzat és norma definíciója:

$$\begin{aligned}(x, y) &= E\{xy\}, \\ \|x\|^2 &= E\{x^2\}; \quad \|y\|^2 = E\{y^2\}.\end{aligned}\quad (4.3)$$

A mérendő mennyiség az $a^T = [a_1, a_2, \dots, a_m]$ vektort alkotó valószínűségi változó m -es, a megfigyelések a $z^T = [z_1, z_2, \dots, z_n]$ vektor komponensei, amik ugyancsak valószínűségi változók.

A feladat az $\tilde{a} = (\alpha - a)$ hibavektorból származtatott

$$\epsilon_2 = E\{\tilde{a}^T \tilde{a}\} = \sum_{i=1}^m E\{(z_i - a_i)^2\} = \sum_{i=1}^m \|\tilde{a}_i\|^2 \quad (4.4)$$

átlagos négyzetes hibának α szerinti minimálása, ahol az optimális $\alpha = \hat{\alpha}_{\text{LMS}}$ érték kielégíti az

$$\hat{\alpha}_{\text{LMS}} = Gz \quad (4.5)$$

összefüggést, tehát z lineáris transzformációja.

További kikötésünk még, hogy

$$E\{a\} = 0 \quad \text{és} \quad E\{z\} = 0, \quad (4.6)$$

azaz a mérendő mennyiség és a megfigyelések nulla várható értékűek. Ez utóbbi feltétel lényeges megkötést nem jelent, hiszen ha a és z várható értéke valamilyen ismert μ_a és μ_z vektor, akkor az

$$\begin{aligned}a - \mu_a &\quad \text{és} \\ z - \mu_z\end{aligned}$$

transzformációkkal ismét a nulla várható értékű esethez jutunk vissza.

Az átlagos négyzetes hiba (4.4) szerinti definíciója alapján az optimálást a komponenseire bontva is elvégezhetjük. Felhasználva a 4.1.2. pontban elmondottakat, az i -edik komponensre vonatkozó optimálási probléma úgy fogalmazható meg, hogy keressük a_i legjobb approximációját a z vektor komponensei által generált M_z térben, tehát

$$\hat{a}_{i\text{LMS}} = \sum_{j=1}^n g_{ij} z_j. \quad (4.7)$$

Látható, hogy az i -edik optimálási probléma megoldása során kapott $g_i^T = [g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{in}]$ vektor a keresett G mátrix i -edik sora lesz. A vektor komponenseit a vetítési tétel (2.3.2. pont) felhasználásával, a normálegyenlet felírása útján nyerhetjük. Az i -edik komponensre vonatkozó normálegyenlet a (4.3) szerinti belső szorzat definíciókat felhasználva:

$$\begin{aligned} E\{(a_i - g_{i1}z_1 - \dots - g_{in}z_n)z_1\} &= 0, \\ E\{(a_i - g_{i1}z_1 - \dots - g_{in}z_n)z_2\} &= 0, \\ &\vdots \\ E\{(a_i - g_{i1}z_1 - \dots - g_{in}z_n)z_n\} &= 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Felírva a normálegyenletet valamennyi komponensre, és az összefüggéseket mátrixos alakra hozva kapjuk, hogy

$$E\{za^T\} = E\{zz^T\}G^T, \quad (4.9)$$

amiből G már közvetlenül meghatározható:

$$G = E\{az^T\}[E\{zz^T\}]^{-1}. \quad (4.10)$$

Az eredményt visszahelyettesítve (4.5) és (4.4)-be, a legkisebb átlagos négyzetes hibájú, nemrekurzív becslő alapösszefüggései:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\text{LMS}} &= E\{az^T\}[E\{zz^T\}]^{-1}z \\ E\{(\hat{a}_{\text{LMS}} - a)(\hat{a}_{\text{LMS}} - a)^T\} &= E\{aa^T\} - E\{az^T\}[E\{zz^T\}]^{-1}E\{za^T\}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Felhasználva, hogy esetünkben z és a várható értéke nulla, továbbá azt, $E\{\hat{a}_{\text{LMS}}\} = 0$, a (4.11) összefüggések átírhatók a következő formába:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\text{LMS}} &= \text{cov}[a, z][\text{cov}[z, z]]^{-1}z, \\ \text{cov}[\hat{a}_{\text{LMS}}, \hat{a}_{\text{LMS}}] &= \text{cov}[a, a] - \text{cov}[a, z][\text{cov}[z, z]]^{-1}\text{cov}[z, a]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Látható, hogy a (4.11) szerinti becslő alakja teljesen ekvivalens a determinisztikus jelek közelítő, diszkrét reprezentációjára kapott (2.140) összefüggéssel, aminek oka a két approximációs probléma ekvivalenciája a megfelelő Hilbert-terekben.

Megjegyzések:

1. A (4.11) és (4.12) összefüggések szerint a becslő származtatásához a modellben szereplő valószínűségi változók auto- és keresztkovariancia mátrixának, valamint várható érték vektorainak ismerete szükséges. Ez lényegesen enyhébb követelmény, mint a Bayes-becslőknél, ahol a valószínűség-eloszlásfüggvények szükségesek a becslési eljárás meghatározásához.

2. A becslési hiba (4.12) szerinti kovariancia mátrixa és az átlagos négyzetes hiba közötti kapcsolat:

$$E\{\hat{a}_{\text{LMS}}^T \hat{a}_{\text{LMS}}\} = \text{tr}[\text{cov}[\hat{a}_{\text{LMS}}, \hat{a}_{\text{LMS}}]] = \text{tr}[E\{(\hat{a}_{\text{LMS}} - a)(\hat{a}_{\text{LMS}} - a)^T\}],$$

ami a mátrixok nyomának definíciójából azonnal következik.

3. A vizsgált esetben, mikor a és z várható értéke nulla, a becslő torzítatlan, hiszen $E\{\hat{\alpha}_{\text{LMS}}\} = 0$. Ezek szerint a (4.11) összefüggés szerinti becslő egyben a minimális varianciájú lineáris becslő is, az adott feltételek mellett.

4. Mint korábban említettük, ha az a és z vektorok várható értéke nem nulla, az eredmények továbbra is használhatók, csak az ismert μ_a és μ_z várható értékeket le kell vonnunk a és z -ből. Ennek megfelelően:

$$\hat{\alpha}_{\text{LMS}} = \mu_a + E\{(a - \mu_a)(z - \mu_z)^T\} [E\{(z - \mu_z)(z - \mu_z)^T\}]^{-1} [z - \mu_z]. \quad (4.13)$$

A becslési hiba kovariancia mátrixa pedig a (4.12) összefüggés hasonló átalakítása után:

$$\text{cov} [\tilde{a}_{\text{LMS}}, \tilde{a}_{\text{LMS}}] = \text{cov} [a, a] - \text{cov} [a, z] [\text{cov} [z, z]]^{-1} \text{cov} [z, a].$$

5. Az LMS becslő tulajdonsága, hogy lineáris az alábbi értelemben:

Ha $a' = Ma + c$, akkor

$$\hat{\alpha}'_{\text{LMS}} = M \hat{\alpha}_{\text{LMS}} + c,$$

és a hiba kovariancia mátrixa:

$$\text{cov} [\tilde{a}'_{\text{LMS}}, \tilde{a}'_{\text{LMS}}] = M \text{cov} [\tilde{a}_{\text{LMS}}, \tilde{a}_{\text{LMS}}] M^T. \quad (4.14)$$

Ezt az eredményt könnyen igazolhatjuk a normálegyenlet alkalmas felírása és a becslő származtatása útján, de megfelel az intuitív geometriai képének is, hiszen azt tartalmazza, hogy az a pont lineáris transzformáltjának vetülete az M_z téren megegyezik a vetület lineáris transzformáltjával.

Ugyancsak egyszerűen belátható a becslő linearitásának egy másik vonatkozása is, ami szerint ha

$$a' = a_1 + a_2,$$

ahol a_1 és a_2 azonos dimenziójú vektorok, akkor

$$\hat{\alpha}'_{\text{LMS}} = \hat{\alpha}_{1\text{LMS}} + \hat{\alpha}_{2\text{LMS}}. \quad (4.15)$$

6. Ha $\hat{\alpha}_{\text{LMS}}$ a legkisebb átlagos négyzetes hibájú lineáris becslése a -nak, akkor $\hat{\alpha}_{\text{LMS}}$ ugyancsak minimálja a súlyozott négyzetes hibát is:

$$\varepsilon_Q = E\{[\hat{\alpha}_{\text{LMS}} - a]^T Q [\hat{\alpha}_{\text{LMS}} - a]\}, \quad (4.16)$$

ahol Q tetszőlegesen pozitív szemidefinit $n \times m$ -es mátrix.

Az állítás úgy látható be, hogy vesszük a lineáris transzformáltját Q pozitív szemidefinit négyzetgyökével $Q^{1/2}$ -el, és felírjuk a transzformált becslőjét a (4.14) összefüggés felhasználásával:

$$a' = Q^{1/2} a, \quad \text{ekkor } \hat{\alpha}'_{\text{LMS}} = Q^{1/2} \hat{\alpha}_{\text{LMS}}. \quad (4.17)$$

Mivel $\hat{\alpha}'_{\text{LMS}}$ minimálja az átlagos négyzetes hibát, írhatjuk, hogy

$$E\{\|Q^{1/2} \hat{\alpha}_{\text{LMS}} - Q^{1/2} a\|^2\} = E\{[\hat{\alpha}_{\text{LMS}} - a]^T Q [\hat{\alpha}_{\text{LMS}} - a]\},$$

tehát $\hat{\alpha}_{\text{LMS}}$ valóban minimálja a súlyozott négyzetes hibát is.

A becslő általános alakjának származtatása és tulajdonságainak összefoglalása után, áttérünk egy konkrét eset vizsgálatára.

Legyen a vizsgált modell

$$z = Ua + n, \quad (4.18)$$

ahol z az n dimenziós megfigyelési vektor, a az m dimenziós mérendő vektor, n az n dimenziós megfigyelési zaj és U egy ismert $n \times m$ -es konstans mátrix. Legyen továbbá :

$$\begin{aligned} E\{nn^T\} &= \Sigma_{nn}; & E\{aa^T\} &= \Sigma_{aa}; & E\{na^T\} &= 0 \\ E\{n\} &= 0; & E\{a\} &= 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

A (4.18) összefüggés és a (4.19) szerinti elemek behelyettesítésével kapjuk, hogy

$$E\{az^T\} = \Sigma_{aa}U^T; \quad E\{zz^T\} = [U\Sigma_{aa}U^T + \Sigma_{nn}]. \quad (4.20)$$

Ennek felhasználásával a legkisebb átlagos négyzetes hibájú, lineáris becslője és a becslési hiba a (4.11) és (4.12) eredmények alapján :

$$\hat{a}_{LMS} = \Sigma_{aa}U^T[U\Sigma_{aa}U^T + \Sigma_{nn}]^{-1}z, \quad (4.21)$$

$$\text{cov}[\hat{a}_{LMS}, \hat{a}_{LMS}] = \Sigma_{aa} - \Sigma_{aa}U^T[U\Sigma_{aa}U^T + \Sigma_{nn}]^{-1}U\Sigma_{aa}. \quad (4.22)$$

Látható, hogy a becslő létezésének feltétele az $[U\Sigma_{aa}U^T + \Sigma_{nn}]^{-1}$ mátrix létezése és nincs kikötés az m és n dimenziók viszonyára. Ez azt jelenti, hogy $n < m$ esetén is használható eredményt kapunk, sőt, $n=0$ mellett is értelmezhetjük a becslést (esetünkben 0). További érdekes tulajdonsága a becslőnek, hogy $n < m$ mellett használható eredményt nyújt akkor is, ha nincs megfigyelési hiba ($\Sigma_{nn}=0$), mivel amíg $U\Sigma_{aa}U^T$ pozitív definit marad, a becslés létezik.

A (4.21) és (4.22) összefüggéseknek származtathatjuk egy alternatív formáját is, az ún. mátrix-inverziós lemmára (l. F2.2. függelék) épülő

$$\Sigma_{aa}U^T[U\Sigma_{aa}U^T + \Sigma_{nn}]^{-1} = [U^T\Sigma_{nn}^{-1}U + \Sigma_{aa}^{-1}]^{-1}U^T\Sigma_{nn}^{-1} \quad (4.23)$$

azonosság felhasználásával. Behelyettesítés után a következő eredményeket kapjuk :

$$\hat{a}_{LMS} = [U^T\Sigma_{nn}^{-1}U + \Sigma_{aa}^{-1}]^{-1}U^T\Sigma_{nn}^{-1}z, \quad (4.24)$$

$$\text{cov}[\hat{a}_{LMS}, \hat{a}_{LMS}] = [U^T\Sigma_{nn}^{-1}U + \Sigma_{aa}^{-1}]^{-1}. \quad (4.25)$$

Az átírás érdekes tulajdonsága, hogy megmutatja a becslő viselkedését abban a határesetben, mikor a mérendő mennyiség a priori varianciája tart a végtelenhez, azaz $\Sigma_{aa}^{-1} \rightarrow 0$. (Ez a határeset úgy is értelmezhető, hogy a mérendő mennyiségről nincs a priori ismeretünk.) Ekkor a becslő a következő alakú lesz :

$$\hat{a}_{LMS} \rightarrow [U^T\Sigma_{nn}^{-1}U]^{-1}U^T\Sigma_{nn}^{-1}z, \quad (4.26)$$

$$\text{cov}[\hat{a}_{LMS}, \hat{a}_{LMS}] \rightarrow [U^T\Sigma_{nn}^{-1}U]^{-1}. \quad (4.27)$$

Utolsó lépésként meghatározzuk a becslő alakját arra az esetre is, mikor a mérendő mennyiség várható értéke nem nulla, tehát $E\{a\} = \mu_a$. A vizsgált modellből közvetlenül megállapítható, hogy ekkor z várható értéke is nullától eltérő : $E\{z\} = U\mu_a$. A becslőt a (4.13) összefüggésbe való behelyettesítéssel származtathatjuk :

$$\hat{a}_{LMS} = \mu_a + [U^T\Sigma_{nn}^{-1}U + \Sigma_{aa}^{-1}]^{-1}U^T\Sigma_{nn}^{-1}(z - U\mu_a). \quad (4.28)$$

A becslési hiba kovariancia mátrixát a μ_a középpértékvektorral való eltolás nem változtatja meg, tehát

$$\text{cov}[\hat{a}_{LMS}, \hat{a}_{LMS}] = [U^T\Sigma_{nn}^{-1}U + \Sigma_{aa}^{-1}]^{-1}. \quad (4.29)$$

Az imént vizsgált modellre a 3.2.3. pontban már meghatároztuk a legkisebb átlagos négyzetes hibájú *Bayes*-becslőt, *Gauss*-eloszlások mellett. Az ott kapott eredmé-

nyek [lásd (3.54) és (3.55) összefüggések] megegyeznek a (4.28) és (4.29) összefüggésekkel, amiből a következő következtetéseket vonhatjuk le:

1. Ha a mérendő mennyiség és a megfigyelések *Gauss*-eloszlásúak, akkor a legkisebb átlagos négyzetes hibájú *Bayes*-becslő megegyezik a legkisebb átlagos négyzetes hibájú lineáris becslővel, azaz:

$$\hat{\alpha}_{MS} = \hat{\alpha}_{LMS} \quad (4.30)$$

ha a és z *Gauss*-eloszlású.

2. A legkisebb átlagos négyzetes hibájú lineáris becslő a legkisebb négyzetes hibát adja az összes lehetséges becslő közül, ha a és z *Gauss*-eloszlásúak, azaz ebben az esetben az LMS becslő hatásos.

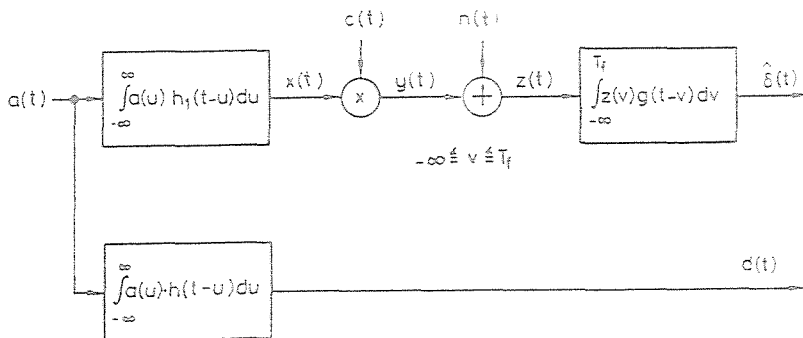
Összefoglalva az eddigi eredményeket megállapíthatjuk, hogy az LMS becslőket az a és z valószínűségi változók várható értéke és kovarianciája határozzák meg. A származtatott nemrekurzív alak gyakorlati alkalmazhatóságát korlátozza, hogy nagyobb dimenzióknál (nagy megfigyelési időnél) a mátrixok kezelhetetlenül nagy méretűek lesznek, ezért a becslőt realizáló nemrekurzív digitális szűrő együtthatóinak kiszámítása nehézkessé, esetleg lehetetlenné válik.

4.2.2. Wiener-szűrés

A becsléselemélet egyik kiindulási pontja és egyúttal az egyik legfontosabb alkalmazási területe a szűréselemélet. A szűréselemélet első alapvető eredményei egy tipikus átviteltechnikai probléma, a zajos csatornán átvitt jel optimális visszaállításának (szűrésének) megoldása kapcsán alakultak ki, elsősorban *Wiener* és *Kolmogorov* munkásságának eredményeként. A későbbiekben a zajjal fedett jelek optimális mérésének problémája a méréselemélet egyik legintenzívebben művelt területe lett az eredmények széles körű alkalmazási lehetősége miatt.

A következőkben a szűréselemélet egyik klasszikus fejezetének, a *Wiener*-szűrésnek néhány alapvető eredményét ismertetjük, felhasználva a közvetlen kapcsolatokat az előző pontban tárgyaltakkal.

A probléma szokásos megfogalmazása a 4.3. ábrán látható. A mérendő jel az $a(t)$ stacionárius sztochasztikus folyamatnak, a $h(t)$ súlyfüggvényű lineáris rendszerrel megvalósított transzformáltja a t időpillanatban: $d(t)$. A méréshez felhasználható $z(t)$ megfigyelés az ábra szerinti



4.3. ábra. A *Wiener*-szűrés probléma

$$z(t) = c(t) \int_{-\infty}^{+\infty} a(t-u) h_1(u) du + n(t) \quad -\infty < t \leq T_f \quad (4.31)$$

kapcsolatban van az $a(t)$ folyamattal, ahol $c(t)$ egy ismert moduláló jel és $n(t)$ az $a(t)$ -től független, stacionárius zaj-folyamat. A feladat a mérési eljárást realizáló lineáris szűrő $g(t)$ súlyfüggvényének származtatása úgy, hogy a becslés átlagos négyzetes hibája

$$\varepsilon_2(t) = E\{[d(t) - \hat{d}(t)]^2\} \quad (4.32)$$

minimális legyen.

A méréshez a megfigyelések a $(-\infty, T_f)$ intervallumban állnak rendelkezésre. Attól függően, hogy a $\hat{d}(t)$ mérési eredmény t időpontja a megfigyelési intervallumhoz képest hogyan helyezkedik el, a következő eseteket különböztetjük meg:

1. Ha $t > T_f$, akkor $d(t)$ értékét egy jövőbeni időpontra akarjuk megbecsülni, ennek megfelelően ezt az esetet a jóslási problémának nevezzük.
2. Ha $t = T_f$, akkor a t időpillanathoz tartozó becsléshez minden addigi megfigyelést felhasználunk, ez a szűrési probléma.
3. Ha $t < T_f$, akkor az ún. simítási problémához jutunk. A (4.32) szerinti optimálási feladat megoldása a folytonos Wiener-szűrő specifikálásához vezet, ami $d(t)$ optimális pont becslőjét realizálja.

A szűrő származtatási lépéseinek és az LMS becslőkkel való kapcsolatának minél egyszerűbb bemutatása érdekében, a továbbiakban a fenti általános modellt egyszerűsítjük, és áttérünk az időben diszkrét eset vizsgálatára.

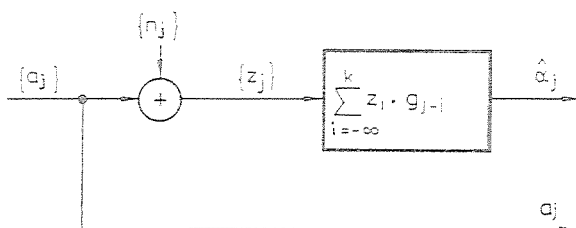
A vizsgált modell

Legyen a mérendő jel az $\{a_k\}$ diszkrét, stacionárius sztochasztikus folyamat a j -edik helyen vett értéke. A becsléshez a zajos $\{z_k\}$ megfigyelések állnak rendelkezésre, a $\{z_k\}$ és $\{a_k\}$ közötti kapcsolat a 4.4. ábra szerint: $\{z_k\} = \{a_k\} + \{n_k\}$, ahol n_k additív stacionárius zaj. (Látható, hogy az egyszerűsített modell és a 4.3. ábra szerinti általános modell között a különbség mindössze annyi, hogy utóbbinál a mérendő jel egy lineáris transzformációnak is alá van vetve.) Ennek megfelelően, az LMS becslők lineáritási tulajdonsága miatt [lásd (4.14) összefüggés], az egyszerűsítésnek elvi jelentősége nincs.

A feladat az optimális becslő $\{g_i\}$ súlyfüggvényének származtatása úgy, hogy az átlagos négyzetes becslési hiba

$$\varepsilon_2(j) = E\{[a_j - \hat{a}_j]^2\} = E\{\hat{a}_j^2\} \quad (4.33)$$

minimális legyen. A folytonos esethez hasonlóan értelmezhető a jóslási ($j > k$), szűrési ($j = k$) és simítási ($j < k$) probléma.



4.4. ábra. A diszkrét Wiener-szűrési probléma

Kapcsolat az LMS becsléssel

Mivel a megfogalmazott feladat a_j legkisebb átlagos négyzetes hibájú lineáris becslése, nyilván lehetőség nyílik az előző pont eredményeinek alkalmazására. Tételezzük fel, hogy az $\{a_k\}$ és az $\{n_k\}$ diszkrét sztochasztikus folyamatok nulla középtértékűek, ismert $C_{aa}(k)$, $C_{nn}(k)$ és $C_{zz}(k)$ diszkrét autokovariancia és $C_{az}(k)$ keresztkovariancia függvényekkel.

a_j becslését a $\{z_k, z_{k-1}, \dots, z_{k-n}\}$, $(n+1)$ számú megfigyelés felhasználásával végezzük el.

A feladat megoldására a (4.10), (4.11) és (4.12) összefüggések értelemszerűen alkalmazhatók, tehát:

$$\mathbf{g}^T = \mathbf{c}_{az}^T [\Sigma_{zz}]^{-1}, \quad (4.34)$$

ahol

$$\mathbf{c}_{az} = \begin{bmatrix} E\{a_j z_k\} \\ E\{a_j z_{k-1}\} \\ \vdots \\ E\{a_j z_{k-n}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{az}(j-k) \\ C_{az}(j-k+1) \\ \vdots \\ C_{az}(j-k+n) \end{bmatrix}$$

A Σ_{zz} kovariancia mátrix (i, j) -edik eleme pedig:

$$c_{i,j} = C_{zz}(i-j) \quad 1 \leq i, j \leq n+1.$$

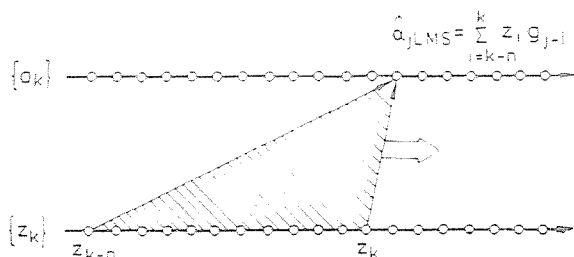
A $\mathbf{g}$ vektor komponensei a keresett $\{g_i\}$ súlyfüggvény diszkrét értékei, ennek megfelelően:

$$\hat{a}_{j \text{ LMS}} = \sum_{i=k-n}^k z_i g_{j-i}. \quad (4.35)$$

A becslés átlagos négyzetes hibája:

$$\varepsilon_2 = C_{aa}(0) - \mathbf{c}_{az}^T [\Sigma_{zz}]^{-1} \mathbf{c}_{az}. \quad (4.36)$$

Ezek az eredmények természetesen csak akkor alkalmazhatók, ha a megfigyelések száma n véges, és rögzített, hiszen különben a (4.34) szerinti mátrix-invertálás nem lenne elvégezhető, továbbá a megfigyelések számának növelésével a $\{g_i\}$ sorozat elemeit állandóan újra kellene számolni. A 4.2.1. pontban leírt módszer tehát csak a véges memóriájú, diszkrét, nemrekurzív típusú (MA) Wiener-szűrő származtatására alkalmas (lásd 4.5. ábra), a folytonos eset nem kezelhető a segítségével. (Természetesen



4.5. ábra. Véges memóriájú diszkrét Wiener-szűrő

folytonos esetre is létezik a leírthoz elvileg hasonló származtatási módszer. A legfontosabb különbség, hogy a normálegyenlet (4.9) szerinti alakja helyett egy integrálegyenlethez jutunk, aminek megoldása szükséges a folytonos *Wiener*-szűrő súlyfüggvényének származtatásához).

4.2.3. A nemkauzális Wiener-szűrő

Az előbb vázolt problémák elkerülése érdekében, a szűrő származtatását más módszerrel végezzük el. Tételezzük fel, hogy becsülni kell az $\{a_k\}$ diszkrét, stacionárius sztochasztikus folyamat j -edik elemét a $\{z_k\}$ zajos megfigyelések segítségével és a becsléshez rendelkezésre áll a teljes $\{z_k\}$ folyamat, tehát: $-\infty < k < +\infty$.

A normálegyenlet a vetítési tétel (lásd 2.3.2. pont) felhasználásával:

$$E \left\{ \left(a_j - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} z_{j-l} g_l \right) z_{j-m} \right\} = 0, \quad \forall m. \quad (4.37)$$

Elvégezve a várható érték képzését, a stacionaritást felhasználva kapjuk, hogy:

$$C_{az}(m) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} C_{zz}(m-l) g_l; \quad \forall m. \quad (4.38)$$

Látható, hogy a szűrő súlyfüggvényét a $C_{az}(m)$ és $C_{zz}(m)$ diszkrét kovarianciafüggvények határozzák meg. A folytonos esethez hasonlóan, a diszkrét kovarianciafüggvények z -transzformáltja (lásd 2.2.2. pont) a diszkrét teljesítményspektrumot eredményezi, tehát:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \{C_{az}(m)\} &= S_{az}(z), \\ \mathcal{Z} \{C_{zz}(m)\} &= S_{zz}(z). \end{aligned} \quad (4.39)$$

(A diszkrét teljesítményspektrumoknak az egységsugarú körön vett kiértékelésével, formálisan a $z = e^{j2\pi f T_s}$ behelyettesítésével kapjuk a spektrum frekvencia-tartománybeli képét, lásd (2.54) összefüggés.)

Ennek megfelelően, a (4.38) egyenlet mindkét oldalát z -transzformálva az:

$$S_{az}(z) = S_{zz}(z) G(z) \quad (4.40)$$

összefüggéshez jutunk, amiből:

$$G(z) = \frac{S_{az}(z)}{S_{zz}(z)}. \quad (4.41)$$

A diszkrét idejű *Wiener*-szűrő súlyfüggvényének z -transzformáltját tehát az $S_{az}(z)$ és $S_{zz}(z)$ diszkrét spektrumok segítségével tudjuk meghatározni.

A becslési hiba, felhasználva hogy $(a_i - \hat{a}_j)$ ortogonális minden z_k megfigyelésre:

$$\varepsilon_2 = E \left\{ \left(a_j - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} z_{j-l} g_l \right) a_j \right\} = C_{aa}(0) - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} C_{az}(l) g_l. \quad (4.42)$$

4.1. példa

Legyen $C_{aa}(m) = 0$; $\forall m$, tehát az $\{a_k\}$ és az $\{n_k\}$ folyamatok korrelálatlanok. Ekkor

$$S_{az}(z) = S_{aa}(z) \quad \text{és} \quad S_{zz}(z) = S_{aa}(z) + S_{nn}(z), \quad (4.43)$$

amit behelyettesítve (4.41)-be kapjuk, hogy

$$G(z) = \frac{S_{aa}(z)}{S_{aa}(z) + S_{nn}(z)}. \quad (4.44)$$

4.2. példa

Rögzítsük a 4.1. példában szereplő spektrumokat a következők szerint :
 $S_{aa}(z)$ legyen egy elsőrendű folyamat spektruma :

$$S_{aa}(z) = \frac{-0,45z}{z^2 - 2,05z + 1}.$$

$S_{nn}(z)$ legyen egy diszkrét fehérzaj spektruma : $S_{nn}(z) = 1$.

Behelyettesítve (4.44)-be, a szűrő karakterisztikája :

$$G(z) = \frac{-0,45z}{z^2 - 2,5z + 1}.$$

Ebből inverz z -transzformálással kapjuk, hogy $g_i = 0,3 \cdot 0,5^{|i|}$.

4.2.4. A kauzális Wiener-szűrő

Mint az előzőekben látható volt, a végtelen megfigyelési hossz problémáját úgy oldottuk meg, hogy a szűrő átviteli karakterisztikáját a diszkrét frekvenciatartományban származtattuk. A (4.41) összefüggés szerinti megoldás alapvető hátránya azonban, hogy semmi garanciát nem nyújt arra nézve, hogy az eredményül kapott szűrő kauzális, ezáltal realizálható lesz. Ez annak következménye, hogy a (4.37) és (4.38) összefüggésekbe a kauzalitási feltételt nem építettük be.

Mint tudjuk, a kauzalitás azt jelenti, hogy a szűrő k -adik időpontban vett kimenőjele csak az $i \leq k$ időpontbeli bemenőjeltől függhet, tehát :

$$\hat{a}_k = \sum_{i=-\infty}^k z_i g_{k-i} = \sum_{i=0}^{\infty} z_{k-i} g_i. \quad (4.45)$$

Láttuk azonban, hogy a Wiener-szűrőnél megkülönböztetjük a jóslási, a szűrési és a simítási esetet, aszerint, hogy a kimenet a k -adik aktuális időponthoz képest az $\{a_i\}$ sorozat melyik elemére szolgáltat becslést. Egy tetszőleges $j = k + r$ időponthoz tartozó becslés alakja kauzális szűrőt feltételezve :

$$\hat{a}_{k+r} = \sum_{i=-\infty}^k z_i g_{k-i} = \sum_{i=0}^{\infty} z_{k-i} g_i, \quad (4.46)$$

ahol a jóslásnak az $r > 0$, szűrésnek az $r = 0$ és a simításnak az $r < 0$ késleltetési index felel meg. A kauzális szűrő származtatásánál is a normálegyenlet felírásából indulunk ki, ami szerint :

$$E \left\{ \left(a_{k+r} - \sum_{i=0}^{\infty} z_{k-i} g_i \right) z_{k-m} \right\} = 0; \quad m \geq 0. \quad (4.47)$$

A várható érték képzése után megkapjuk a szűrő súlyfüggvényét meghatározó ún. diszkrét idejű Wiener—Hopf egyenletet :

$$C_{az}(m+r) = \sum_{i=0}^{\infty} C_{za}(m-i) g_i; \quad m \geq 0. \quad (4.48)$$

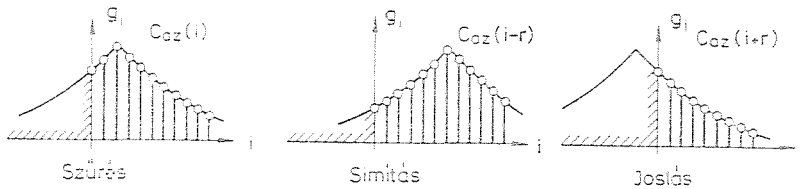
Abban az esetben, ha a $\{z_k\}$ folyamat fehér spektrumú, a kauzális szűrő származtatása nehézség nélkül elvégezhető, hiszen ekkor:

$$C_{zz}(i) = \delta(i),$$

amit behelyettesítve (4.48)-ba kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} g_i &= C_{az}(i+r) & \text{ha} & \quad i \geq 0, \\ g_i &= 0 & \text{ha} & \quad i < 0. \end{aligned} \quad (4.49)$$

A szűrő súlyfüggvénye és a $C_{az}(i)$ kovariancia függvény közötti kapcsolatot illusztrálja a 4.6. ábra. Természetesen a $\{z_k\}$ folyamat általában nem fehér spektrumú, ezért az előbbi módszer közvetlenül nem alkalmazható. Lehetőség van viszont arra, hogy a szűrő származtatását a 4.7. ábra szerinti két lépésben végezzük el.



4.6. ábra. A Wiener-szűrő súlyfüggvénye fehér spektrumok esetén

1. A $\{z_k\}$ folyamatot egy $W(z)$ átviteli karakterisztikájú szűrővel fehér folyamattá transzformáljuk.

2. Az így nyert $\{v_k\}$ fehér folyamathoz az előzőekben leírt módszerrel származtatjuk a $G_v(z)$ átviteli karakterisztikájú kauzális Wiener-szűrőt.

A módszer alkalmazásának feltétele, hogy a $\{z_k\}$ folyamathoz létezzen olyan $W(z)$ fehéritő szűrő, ami kauzális és létezik a $W^{-1}(z)$ ugyancsak kauzális inverze. Ekkor ugyanis a

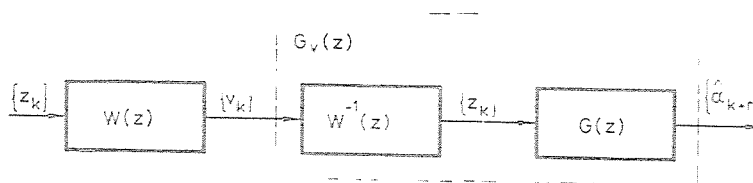
$$W(z)G_v(z) \quad (4.50)$$

szűrő is kauzális lesz, továbbá a kauzális inverz létezése miatt az így kapott szűrő az optimális kauzális szűrő $G(z)$ karakterisztikáját adja:

$$W(z)G_v(z) = W(z)W^{-1}(z)G(z) = G(z) \quad (4.51)$$

Első lépésként a fehéritő szűrő karakterisztikáját határozzuk meg. A szűrő bemenő-jelének diszkrét teljesítményspektruma $S_{zz}(z)$, kimenő-jelének diszkrét teljesítményspektruma $S_{vv}(z) = 1$, a két spektrum közötti kapcsolat pedig a (2.265) összefüggés diszkrét esetre való felírásával

$$|W(z)|^2 S_{zz}(z) = 1. \quad (4.52)$$



4.7. ábra. A kauzális Wiener-szűrő származtatásának elve

A feladat tehát a (4.52) összefüggést kielégítő kauzális szűrő $W(z)$ átviteli karakterisztikájának meghatározása. A továbbiakban tételezzük fel, hogy $S_{zz}(z)$ racionális törtfüggvény, tehát pólusainak és zérusainak száma véges. Ez a kikötés összhangban van azzal a gyakorlattal, hogy a $\{z_i\}$ folyamatot egy fehérzajjal gerjesztett, valamilyen $H(z)$ racionális törtfüggvénnyel leírható átviteli karakterisztikájú rendszer kimenő-jelével modellezzük. Ebben az esetben ugyanis a folyamat spektruma, ismét a (2.265) összefüggés alapján:

$$S_{zz}(z) = |H(z)|^2 \cdot 1 = H(z)\overline{H(z)} = H(z)H\left(\frac{1}{z}\right). \quad (4.53)$$

Az $S_{zz}(z)$ racionális spektrum fenti alakjából közvetlenül látszik, hogy pólusai és zérusai az egységsugarú körre szimmetrikusan helyezkednek el. Ennek megfelelően a spektrum faktorizálható két tag szorzatára:

$$S_{zz}(z) = S_{zz}^+(z)S_{zz}^-(z) \quad (4.54)$$

oly módon, hogy $S_{zz}^+(z)$ tartalmazza az összes pólust és zérust, ami az egységsugarú körön belül található, $S_{zz}^-(z)$ pedig az egységsugarú körön kívülieket. A faktoriizáció eredményét felhasználva legyen:

$$W(z) = \frac{1}{S_{zz}^+(z)}. \quad (4.55)$$

Az $S_{zz}^+(z)$ definíciója értelmében $W(z)$ és $W^{-1}(z)$ minden pólusa és zérusa az egységsugarú körön belül helyezkedik el, ezért a szűrő kauzális lesz, hiszen a kauzalitás feltétele, hogy a pólusok az egységsugarú kör belsejében legyenek. Mivel $S_{zz}^+(z)$ és $S_{zz}^-(z)$ egymás konjugáltjai, teljesül a (4.52) feltétel is:

$$|W(z)|^2 S_{zz}(z) = \frac{1}{S_{zz}^+(z)} \frac{1}{S_{zz}^-(z)} S_{zz}(z) = 1,$$

tehát a (4.55) összefüggéssel definiált szűrő a (4.50) és (4.51) feltételeket kielégítő fehérítő szűrő.

A módszer következő lépése, a $\{v_k\}$ fehér spektrumú, transzformált megfigyeléseket feldolgozó kauzális Wiener-szűrő $G_v(z)$ átviteli karakterisztikájának meghatározása (lásd 4.7. ábra). A (4.49) összefüggés szerint ehhez a $C_{av}(k)$ kovarianciafüggvény meghatározására van szükség. Ha $\{w_k\}$ a (4.55) összefüggés szerinti fehérítő szűrő súlyfüggvénye, akkor a kauzalitást figyelembe véve:

$$C_{av}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} C_{az}(k-i)w_i$$

amit átírva diszkrét frekvencia tartományba azt kapjuk, hogy

$$S_{av}(z) = S_{az}(z)\overline{W(z)} = \frac{S_{az}(z)}{S_{zz}^-(z)}. \quad (4.56)$$

Miután meghatároztuk a transzformált megfigyelések és a mérendő folyamat közötti $C_{av}(k)$ keresztkovariancia függvényt, ugyancsak a (4.49) összefüggés alapján már közvetlenül felírható a fehér spektrumú megfigyeléseket feldolgozó, kauzális Wiener-szűrő súlyfüggvénye:

$$\begin{aligned} g_{vi} &= C_{av}(i+r) & \text{ha} & \quad i \geq 0, \\ g_{vi} &= 0 & \text{ha} & \quad i < 0. \end{aligned}$$

Ahhoz, hogy a szűrő karakterisztikáját a diszkrét frekvenciatartományban tudjuk definiálni, bontsuk szét szimbolikusan a (4.56) szerinti $S_{av}(z)$ spektrumot két tag összegére:

$$S_{av}(z) = [S_{av}(z)]_+ + [S_{av}(z)]_-,$$

amikre a következő teljesül:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{-1}\{[S_{av}(z)]_+\} &= C_{av}(i+r) & \text{ha } i \geq 0, \\ &= 0 & \text{ha } i < 0, \\ \mathcal{Z}^{-1}\{[S_{av}(z)]_-\} &= C_{av}(i+r) & \text{ha } i < 0, \\ &= 0 & \text{ha } i \geq 0. \end{aligned} \quad (4.57)$$

A szűrő diszkrét $G_v(z)$ frekvenciakarakterisztikája tehát:

$$G_v(z) = \left[\frac{S_{az}(z)}{S_{zz}^-(z)} \right]_+. \quad (4.58)$$

A kauzális *Wiener*-szűrő a 4.7. ábra szerint az első és a második lépésben származtatott szűrők kaszkádja, tehát az átviteli karakterisztika:

$$G(z) = \frac{1}{S_{zz}^-(z)} \left[\frac{S_{az}(z)}{S_{zz}^-(z)} \right]_+. \quad (4.59)$$

4.3. példa

A következőkben meghatározzuk a 4.2. példa szerinti esetre a kauzális *Wiener*-szűrőt.

$$S_{zz}(z) = S_{aa}(z) + S_{nn}(z) = \frac{z^2 - 2,5z + 1}{z^2 - 2,05z + 1}.$$

Meghatározva a pólusokat és a zérusokat, a faktorizálás eredménye:

$$S_{zz}^+(z) = \frac{z - 0,5}{z - 0,8}, \quad S_{zz}^-(z) = \frac{z - 2}{z - 1,25},$$

amiből kapjuk, hogy a fehérítő szűrő átviteli karakterisztikája:

$$H(z) = \frac{z - 0,8}{z - 0,5}.$$

A (4.56) összefüggés felhasználásával:

$$S_{av}(z) = \frac{0,375z}{z - 0,8} - \frac{0,375z}{z - 2},$$

amiből:

$$G_v(z) = \frac{0,375z}{z - 0,8}.$$

Behelyettesítve a (4.59) összefüggésbe

$$G(z) = \frac{0,375z}{z - 0,5}; \quad g_k = 0,375 \cdot 0,5^k; \quad k \geq 0.$$

4.2.5. A becslés hibája

A következőkben meghatározzuk a kauzális *Wiener*-szűrő becslési hibáját, majd az eredményt összevetjük a nemkauzális szűrő hibájával.

Felhasználva a becslési hiba és a megfigyelések ortogonalitását, az átlagos négyzetes hiba tetszőleges r késleltetési indexnél:

$$\varepsilon_2(r) = E \left\{ \left(a_{k+r} - \sum_{i=0}^{\infty} z_{k-i} g_i \right) a_{k+r} \right\} = C_{aa}(0) - \sum_{i=0}^{\infty} C_{az}(i+r) g_i. \quad (4.60)$$

A feladat az optimális szűrő súlyfüggvényének behelyettesítése a (4.60) összefüggésbe. A (4.57) szerinti definíciókkal $G(z)$ az alábbi formába írható:

$$G(z) = \frac{1}{S_{zz}^+(z)} \sum_{j=0}^{\infty} C_{az}(j+r) z^{-j}. \quad (4.61)$$

A súlyfüggvényt $G(z)$ inverz z -transzformálásával kaphatjuk meg, ami szerint:

$$g_i = \frac{1}{2\pi j} \oint \left[\frac{1}{S_{zz}^+(z)} \sum_{j=0}^{\infty} C_{az}(j+r) z^{-j} \right] z^{i-1} dz.$$

Ezen összefüggést behelyettesítve (4.60)-ba, az összegzések sorrendjének felcserélése és az átalakítások elvégzése után a hibára a következő egyszerű formulát kapjuk:

$$\varepsilon_2(r) = C_{aa}(0) - \sum_{i=r}^{\infty} C_{aa}^2(i). \quad (4.62)$$

Az összefüggésből több érdekes következtetés levonására nyílik lehetőség.

1. A becslési hiba monoton növekszik, ha a késleltetési index nő. A késleltetési index értelmezése szerint az $r > 0$ eset a jóslási problémának felel meg, tehát minél távolabbi jövőre vonatkozik a becslés, annál nagyobb a becslési hiba. Az $r = \infty$ határesetben a becslési hiba megegyezik az $\{a_i\}$ folyamat varianciájával, tehát a szűrő nem nyújt hasznos információt.

2. Simítás esetén amikor $r < 0$, minél régebbi időpontra vonatkozik a becslés, annál kisebb lesz a becslési hiba. Ez nyilván azzal magyarázható, hogy a korábbi időpontokra származtatott becsléseknél egyre több a felhasználható megfigyelés.

3. Intuitíven is belátható, hogy a nemkauzális szűrők, amik a becslés előállításához végtelen sok múltbeli és végtelen sok jövőbeli megfigyelést használnak fel, megfelelnek a végtelen késleltetésű kauzális szűrőknek ($r = -\infty$), hiszen egy múltbeli pillanatra vonatkozó becslés a múltból nézve jövőbeni megfigyeléseket használ fel a becslés elvégzéséhez. A (4.62) összefüggés tehát $r = -\infty$ mellett megadja a nemkauzális szűrő becslési hibáját is, ami egyben alsó korlátot is jelent a becslési hibára.

Megjegyzés: A *Wiener*-szűrést először időben folytonos jelekre dolgozták ki és ennek megfelelően az így származtatott szűrők is analóg jellegűek. Mivel az időben folytonos eset tárgyalása semmilyen elvi újdonságot nem jelent az előzőekhez képest, annak részletezésétől eltekintünk.

4.3. A legkisebb átlagos négyzetes hibájú rekurzív becslők

Eddigiekben az LMS becslések származtatásánál mindig abból indultunk ki, hogy a megfigyelések adott Z halmaza (a z vektor komponensei) mellett keressük a négyzetes értelemben optimális mérési eredményt. Ennek a kiindulásnak természetes következményeként, a megfigyelések halmazának bővítésével mindig újra kell származtatni a teljes mérési eljárást, ami számos esetben a módszer gyakorlati alkalmazását lehetetlenné teszi.

Bizonyos feltételek teljesülése esetén azonban, az LMS becslések rekurzív alakra hozhatók, amik az aktuális mérési eredményt az aktuális megfigyelés és a korábbi mérési eredmény lineáris kombinációjaként állítják elő. A rekurzív mérési eljárásoknak ez a kedvező struktúrája az iménti problémát megoldja, ezért igen nagy gyakorlati jelentőségük van.

E szakasz célja az LMS becslések rekurzív alakjának származtatása. Első lépésként meghatározzuk a rekurzív becslések általános alakját, majd áttérünk a *Kalman*-szűrőkkel kapcsolatos legfontosabb eredmények ismertetésére.

4.3.1. A rekurzív becslő általános alakjának származtatása

A nemrekurzív LMS becslésnél abból indultunk ki, hogy az $a^T = [a_1, \dots, a_m]$ vektor komponenseit a $z^T = [z_1, \dots, z_n]$ megfigyelések lineáris transzformációjával akarjuk becsülni, tehát a megfigyelések halmaza n elemű. Az általánosság érdekében tételezzük fel, hogy a megfigyelési halmaz ilyen vektor n -esekkel bővíthető, tehát a megfigyelési szekvencia a

$$\{z_1, z_2, \dots, z_k, \dots\}$$

egyenként n dimenziós vektorok sorozata.

A nemrekurzív és rekurzív becsléseknél használt megfigyelési halmazok szerkezete közötti kapcsolat a következő:

1. A nemrekurzív becsléseknél definiált $z^T = [z_1, \dots, z_n]$ megfigyelési vektort úgy írhatjuk fel megfigyelési szekvenciaként, hogy veszünk n , egyenként egydimenziós megfigyelést:

$$\{z_1, z_2, \dots, z_n\}.$$

2. A rekurzív becsléseknél definiált k elemű, egyenként n dimenziós megfigyelési szekvenciának, a nemrekurzív becsléseknél a

$$z^T = [z_1^T : z_2^T : \dots : z_k^T] \quad (4.63)$$

$k \times n$ dimenziós megfigyelési vektor felel meg.

Jelöljük a továbbiakban $\hat{a}_{|k}$ -val a -nak azt a becslését, amit a

$$\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$$

megfigyelési szekvenciával hoztunk létre, tehát a k index arra utal, hogy a becsléshez a szekvencia $i \leq k$ indexű elemeit használtuk fel.

A becslő rekurzív alakját két lépésben származtatjuk. Először meghatározzuk a rekurzív összefüggést arra az esetre, mikor a megfigyelési szekvencia elemei ortogo-

nálisak, majd a második lépésben elhagyjuk az ortogonalitási feltételt, mindössze azt köitjük ki, hogy a megfigyelési szekvencia lineárisan független vektorokat tartalmazzon.

Az összefüggések áttekinthető és minél tömörebb felírása érdekében a továbbiakban a következő új jelöléseket vezetjük be:

- $\hat{\alpha}(z_j)$ jelenti az a vektor LMS becslését a megfigyelési szekvencia j -edik elemének felhasználásával. (A becslés típusát jelző LMS indexet a tömörség érdekében nem írjuk ki.)
- $\tilde{a}(z_j)$ jelenti a fenti becsléshez tartozó becslési hibát, azaz $\tilde{a}(z_j) = \hat{\alpha}(z_j) - a$.
- $\hat{\alpha}_{1k}$ jelenti az a vektor LMS becslését a megfigyelési szekvencia első k elemének $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ felhasználásával.
- $\tilde{a}_{1k}$ jelenti az $\hat{\alpha}_{1k}$ becslés hibáját.

A rekurzív alak ortogonális megfigyelési szekvenciánál

A 4.2.1. pontban láttuk, hogy az általánosság szűkítése nélkül feltételezhető, hogy a z_i megfigyelések és az a vektor várható értéke nulla, amit jelen esetben is kihasználunk.

A megfigyelési szekvencia ortogonalitása azt jelenti, hogy minden új megfigyelés a teljes megfigyelési teret egy ortogonális altérrel bővíti, másként, az új megfigyelés komponensei által kifeszített altér merőleges a korábbi megfigyelési térre. A belső szorzat (4.3) szerinti definícióját felhasználva ez a feltétel úgy is megfogalmazható, hogy az új megfigyelés komponensei korrelálatlanok a korábbi megfigyelési komponensekkel, de korreláltak lehetnek egymással.

$$\text{cov}[z_i, z_j] = 0, \quad \forall i \neq j. \quad (4.64)$$

A szekvencia első eleméhez tartozó becslés, a $z = z_1$ behelyettesítéssel közvetlenül meghatározható a (4.11) és (4.12) összefüggésből:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(z_1) &= \hat{\alpha}_{11} = E\{az_1^T\}[E\{z_1 z_1^T\}]^{-1} z_1 = \text{cov}[a, z_1] [\text{cov}[z_1, z_1]]^{-1} z_1, \\ \text{cov}[\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{11}] &= \text{cov}[a, a] - \text{cov}[a, z_1] [\text{cov}[z_1, z_1]]^{-1} \text{cov}[z_1, a]. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Következő lépésként bővítsük a megfigyelést a szekvencia második elemével z_2 -vel, és határozzuk meg a becslést és a becslési hiba kovariancia mátrixát! A z együttes megfigyelési vektor a z_2 -vel való bővítés után:

$$z^T = [z_1^T, z_2^T]. \quad (4.66)$$

Behelyettesítve a (4.11) összefüggésbe:

$$\hat{\alpha}_{12} = E\{a[z_1^T, z_2^T]\}[E\{[z_1, z_2]^T[z_1, z_2]\}]^{-1}[z_1, z_2]^T.$$

A várható érték képzés és a megfelelő mátrixműveletek elvégzése után a becslés alakja:

$$\hat{\alpha}_{12} = [\text{cov}[a, z_1] \text{cov}[a, z_2]] \begin{bmatrix} \text{cov}[z_1, z_1] & 0 \\ 0 & \text{cov}[z_2, z_2] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \quad (4.67)$$

$$= \text{cov}[a, z_1] [\text{cov}[z_1, z_1]]^{-1} z_1 + \text{cov}[a, z_2] [\text{cov}[z_2, z_2]]^{-1} z_2.$$

Látható, hogy az eredmény első tagja a becslése a z_1 , második tagja pedig a becslése a z_2 megfigyelés alapján, tehát:

$$\hat{\alpha}_{12} = \hat{\alpha}_{11} + \hat{\alpha}(z_2). \quad (4.68)$$

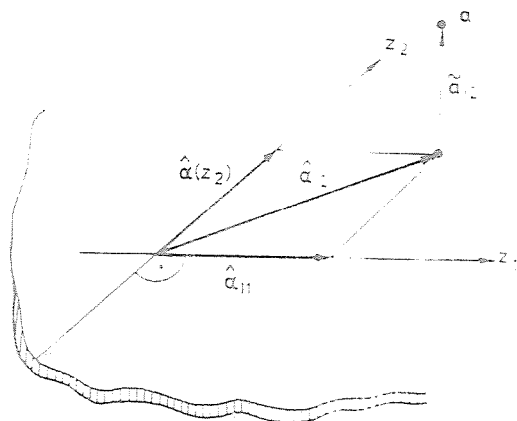
Ezt a módszert alkalmazva a becslés kovariancia mátrixára, a következő eredményhez jutunk:

$$\begin{aligned}\text{cov} [\tilde{a}_{|2}, \tilde{a}_{|2}] &= \text{cov} [a, a] - \text{cov} [a, z_1][\text{cov} [z_1, z_1]]^{-1} \text{cov} [z_1, a] - \\ &\quad - \text{cov} [a, z_2][\text{cov} [z_2, z_2]]^{-1} \text{cov} [z_2, a] = \\ &= \text{cov} [\tilde{a}_{|1}, \tilde{a}_{|1}] - \text{cov} [\tilde{a}(z_2), \tilde{a}(z_2)].\end{aligned}\quad (4.69)$$

Természetesen nincs akadálya annak, hogy következő lépésként már a (4.66) szerinti együttes megfigyelési vektort bővítsük a z_3 vektorral, és ismételten elvégezzük az új becslés jellemzőinek származtatását. Ennek megfelelően a kapott eredményt közvetlenül általánosíthatjuk a megfigyelési szekvencia tetszőleges k elemére, tehát az általános rekurzív alak ortogonális megfigyelésekénél:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{|k} &= \hat{\alpha}_{|(k-1)} + \hat{\alpha}(z_k) \\ \text{cov} [\tilde{a}_{|k}, \tilde{a}_{|k}] &= \text{cov} [\tilde{a}_{|(k-1)}, \tilde{a}_{|(k-1)}] - \text{cov} [\tilde{a}(z_k), \tilde{a}(z_k)].\end{aligned}\quad (4.70)$$

A kapott eredmények megfelelnek az intuitív geometriai képnek, hiszen az összefüggések értelmében, ha a megfigyelési teret egy újabb, a korábbiakra merőleges komponenssel bővítjük, akkor az új becslés a régi becslés és a mérendő mennyiségnek az új megfigyelésre vonatkozó vetületének összege (lásd 4.8. ábra).



4.8. ábra. Rekurzív becslés ortogonális megfigyelésekkel

4.3.2. A rekurzív becslés általános alakja

A (4.68) és (4.69) összefüggések gyakorlati alkalmazhatóságát természetesen lényegesen gátolja, hogy azok feltételezik a megfigyelési sorozat elemeinek korrelálatlanságát. Korrelált megfigyelések mellett az elemek nem ortogonálisak, tehát a rekurzív eljárás származtatására az előző módszer nem használható. A megoldást az jelenti, hogy a $\{z_1, \dots, z_k, \dots\}$ lineárisan független vektorok felhasználásával generálunk egy ortogonális sorozatot, amire már a kapott eredményeket alkalmazni tudjuk.

Lineárisan független vektorokhoz a *Gram–Schmidt*-ortogonalizálási eljárással (l. F.2.3. függelék 6. pont) generálhatunk ortogonális vektor sorozat. A *Gram–Schmidt*-eljárás egy szekvenciális algoritmus, ami szerint a generálandó ortogonális sorozat i -edik elemét úgy kapjuk meg, hogy a lineárisan független vektor sorozat i -edik eleméből kivonjuk az előző $(i-1)$ elem által kifeszített altérre eső vetületet. Mivel az i -edik elem vetülete a megelőző $(i-1)$ elem által kifeszített altérre nem más, mint an-

nak négyzetes értelemben legjobb becslése az előtte beérkező $(i-1)$ megfigyelés alapján, így az ortogonális sorozat i -edik generált eleme a becslés hibavektora. Ennek megfelelően az ortogonalizálási eljárás a következő formában írható fel:

$$\begin{aligned}\tilde{z}_1 &= z_1, \\ \tilde{z}_2 &= z_2 - \hat{z}_{2|1}, \\ \tilde{z}_3 &= z_3 - \hat{z}_{3|2}, \\ &\vdots \\ \tilde{z}_k &= z_k - \hat{z}_{k|k-1}, \\ &\vdots\end{aligned}\tag{4.71}$$

ahol $\tilde{z}_k$ jelöli a generált ortogonális sorozat k -adik elemét, $\hat{z}_{k|k-1}$ pedig a z_k vektor LMS becslését a $\{z_1, z_2, \dots, z_{k-1}\}$ megfigyelések alapján.

A generált $\{\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_k, \dots\}$ sorozatot innovációs sorozatnak nevezzük. A név arra utal, hogy a sorozat egy tetszőleges $\tilde{z}_k$ eleme úgy tekinthető, mint a z_k megfigyelésben rejlő új információ, ami nem volt megjósolható a $\{z_1, \dots, z_{k-1}\}$ megfigyelések-ből. Ez következik $\tilde{z}_k$ generálási módjából, ami szerint első lépésként az addig beérkezett $(k-1)$ megfigyelés alapján megjósoljuk a k -adik megfigyelést ($\hat{z}_{k|k-1}$), majd a beérkező z_k -ből kivonjuk a megjósolható, tehát az előző megfigyelések által tartalmazott komponenst. Az innovációs sorozat az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

1. $\tilde{z}_k$ lineáris függvénye a $\{z_1, \dots, z_k\}$ sorozat elemeinek, hiszen $\hat{z}_{k|k-1}$ definíció szerint a $\{z_1, \dots, z_{k-1}\}$ elemeinek lineáris kombinációja.

2. A vetítési tétel következtében $\tilde{z}_k$ ortogonális a $\{z_1, \dots, z_{k-1}\}$ vektorokra és az általuk kifeszített altérre.

3. A $\{\tilde{z}_k\}$ innovációs sorozat kauzális lineáris operációval származtatható a $\{z_k\}$ sorozatból, mint ahogy az a (4.71) algoritmus alakjából világosan kitűnik.

4. $\{\tilde{z}_k\}$ sorozatot előállító operációnak létezik a kauzális inverze, amit a (4.71) algoritmusnak a $\{z_k\}$ sorozat elemeire való átrendezésével azonnal beláthatunk. Ez természetesen következménye egyébként a geometriai képnek is, hiszen a $\{\tilde{z}_k\}$ és $\{z_k\}$ sorozatok adott k indexig ugyanazt a teret feszítik ki, tehát elemeik egymással kölcsönösen kifejezhetők.

5. A fentiek miatt, egy tetszőleges a vektor becslését mind a $\{\tilde{z}_k\}$, mind a $\{z_k\}$ sorozat elemeivel ekvivalens módon meghatározhatjuk, hiszen az általuk kifeszített tér, amire a-t vetíteni kell, ugyanaz.

Visszatérve a kiindulási problémára, tehát a rekurzív becslés általános alakjának származtatására, az előbbi megfontolások alapján a következőket mondhatjuk. A becslés ekvivalens módon felírható a (4.71) szerinti szekvenciális algoritmussal származtatott innovációs sorozatra is, ennek megfelelően alkalmazhatók az ortogonális megfigyelési sorozatra származtatott eredményeink [lásd (4.70)].

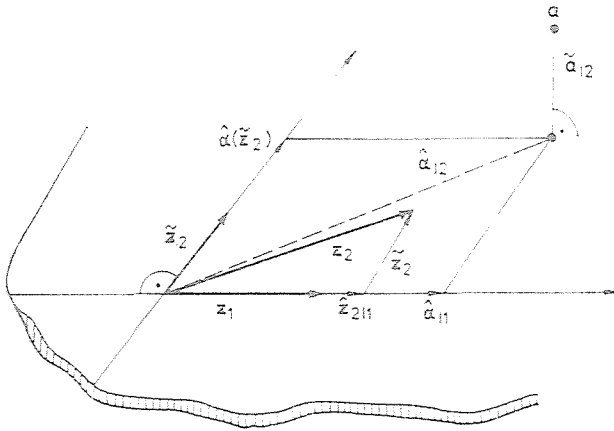
A becslés általános alakja tehát:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_k &= \hat{\alpha}_{|(k-1)} + \hat{\alpha}(\tilde{z}_k), \\ \tilde{z}_k &= z_k - \hat{z}_{k|k-1}, \\ \text{cov}[\tilde{a}_{|k}, \tilde{a}_{|k}] &= \text{cov}[\tilde{a}_{|(k-1)}, \tilde{a}_{|(k-1)}] - \text{cov}[\tilde{a}(\tilde{z}_k), \tilde{a}(\tilde{z}_k)], \\ \text{cov}[\tilde{a}(\tilde{z}_k), \tilde{a}(\tilde{z}_k)] &= \text{cov}[a, \tilde{z}_k] [\text{cov}[\tilde{z}_k, \tilde{z}_k]]^{-1} \text{cov}[\tilde{z}_k, a].\end{aligned}\tag{4.72}$$

Megjegyzés: Látható, hogy a fenti alak egy szekvenciális algoritmust rögzít, hiszen a megfigyelési szekvenciához egy becslési szekvenciát rendel. Ahhoz azonban, hogy az

algoritmus rekurzív legyen, még további feltételek teljesülésére van szükség. Az egyik feltétel, hogy a $\hat{z}_{k|(k-1)}$ becslés előállítását is be tudjuk vonni a rekurzióba, másrészt rögzíteni kell a kezdeti feltételeket is. A továbbiakban konkrét esetekre fogunk rekurzív becslőket származtatni.

A becslés geometriai szemléltetése a 4.9. ábrán látható. Az eredmények gyakorlati alkalmazását egy példa segítségével mutatjuk be.



4.9. ábra. A rekurzív becslés általános alakja

4.4. példa

A nemrekurzív becslésnél tárgyalt példához hasonlóan (4.1. példa) legyen a vizsgált modell

$$\{z_i\} = \{U_i a + n_i\}, \quad (4.73)$$

ahol a $\{z_i\}$ megfigyelési szekvencia elemei n -dimenziós vektorok, a az m -dimenziós mérővektor, az $\{n_i\}$ sorozat elemei az i -edik megfigyeléshez tartozó n -dimenziós megfigyelési zaj, és U_i az i -edik megfigyeléshez rendelt, ismert elemeket tartalmazó $n \times m$ -es mátrix. A statisztikai jellemzőket az alábbiak szerint rögzítjük:

$$\begin{aligned} E\{n_i n_i^T\} &= \Sigma_{nn(i)}; & E\{a a^T\} &= \Sigma_{aa}; \\ E\{n_i n_j^T\} &= 0 \quad \forall i \neq j\text{-re}; & E\{a\} &= 0; \\ E\{n_i\} &= 0; & E\{n a^T\} &= 0. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Annak ellenére, hogy az $\{n_i\}$ sorozat elemei ortogonálisak, a megfigyelési szekvenciára ez nem teljesül, hiszen

$$E\{z_i z_j^T\} = E\{[U_i a + n_i][U_j a + n_j]^T\} = U_i \Sigma_{aa} U_j^T, \quad \forall i \neq j\text{-re}. \quad (4.75)$$

Ennek megfelelően a rekurzív becslés származtatására a (4.72) összefüggéseket kell használnunk. Első lépésként határozzuk meg a $\hat{z}_{k|k-1}$ vektort, mivel ennek segítségével írhatjuk fel a k -edik megfigyelés innovációját $\tilde{z}_k$ -t.

A (4.73) összefüggés szerint a k -edik megfigyelés

$$z_k = U_k a + n_k,$$

tehát az $\mathbf{a}$ vektor és az $\mathbf{n}_k$ zaj lineáris kombinációja. Az LMS becslések linearitása miatt [lásd (4.14) és (4.15) összefüggések] $\mathbf{z}_k$ becslését a és $\mathbf{n}_k$ becslésének fenti lineáris kombinációjaként nyerjük, tehát esetünkben :

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|(k-1)} = \mathbf{U}_k \hat{\mathbf{a}}_{|(k-1)} + \hat{\mathbf{n}}_{k|(k-1)}.$$

Az $\{\mathbf{n}_k\}$ sorozat ortogonalitása és nulla várható értéke miatt $\hat{\mathbf{n}}_{k|(k-1)} = \mathbf{0}$, tehát

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \mathbf{U}_k \hat{\mathbf{a}}_{|(k-1)}. \quad (4.76)$$

Ezzel az innovációs szekvencia k -adik eleme :

$$\tilde{\mathbf{z}}_k = \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|(k-1)} = \mathbf{z}_k - \mathbf{U}_k \hat{\mathbf{a}}_{|(k-1)} = \mathbf{U}_k \tilde{\mathbf{a}}_{|(k-1)} + \mathbf{n}_k. \quad (4.77)$$

A rekurzív összefüggések felírásához szükség van még az alábbi auto- és kereszt-kovariancia mátrixok meghatározására :

$$\begin{aligned} \text{cov} [\tilde{\mathbf{z}}_k, \tilde{\mathbf{z}}_k] &= E\{(\mathbf{U}_k \tilde{\mathbf{a}}_{|(k-1)} + \mathbf{n}_k)(\mathbf{U}_k \tilde{\mathbf{a}}_{|(k-1)} + \mathbf{n}_k)^T\} = \\ &= \mathbf{U}_k \Sigma_{\tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{a}}(k-1)} \mathbf{U}_k^T + \Sigma_{\mathbf{n}\mathbf{n}(k)}, \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\text{cov} [\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{z}}_k] = E\{\mathbf{a}(\mathbf{U}_k \tilde{\mathbf{a}}_{|(k-1)} + \mathbf{n}_k)^T\} = \Sigma_{\tilde{\mathbf{a}} \mathbf{a}(k-1)} \mathbf{U}_k^T. \quad (4.79)$$

Felhasználva, hogy a (4.12) összefüggés szerint

$$\hat{\mathbf{a}}(\tilde{\mathbf{z}}_k) = \text{cov} [\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{z}}_k] [\text{cov} [\tilde{\mathbf{z}}_k, \tilde{\mathbf{z}}_k]]^{-1} \tilde{\mathbf{z}}_k$$

és behelyettesítve a (4.78), (4.79) összefüggéseket, a becslő rekurzív alakjára a következő eredményt kapjuk :

$$\hat{\mathbf{a}}_k = \hat{\mathbf{a}}_{|(k-1)} + \Sigma_{\tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{a}}(k-1)} \mathbf{U}_k^T [\mathbf{U}_k \Sigma_{\tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{a}}(k-1)} \mathbf{U}_k^T + \Sigma_{\mathbf{n}\mathbf{n}(k)}]^{-1} [\mathbf{z}_k - \mathbf{U}_k \hat{\mathbf{a}}_{|(k-1)}]. \quad (4.80)$$

Ugyanúgy elvégezve a hiba kovariancia mátrixára kapott (4.72) szerinti összefüggésbe a behelyettesítést, a kovariancia mátrixokat generáló rekurzió :

$$\Sigma_{\tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{a}}(k)} = \Sigma_{\tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{a}}(k-1)} - \Sigma_{\tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{a}}(k-1)} \mathbf{U}_k^T [\mathbf{U}_k \Sigma_{\tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{a}}(k-1)} \mathbf{U}_k^T + \Sigma_{\mathbf{n}\mathbf{n}(k)}]^{-1} \mathbf{U}_k \Sigma_{\tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{a}}(k-1)}. \quad (4.81)$$

Az előbbi rekurzív formuláknál szükség van még a kezdeti feltételek értelmezésére. A vizsgált modellhez megadott a priori ismeretekből következik, hogy a $k=0$ időponthoz tartozó legjobb becslése $\mathbf{a}$ -nak saját várható értéke, tehát (4.80) kezdeti feltétele :

$$\hat{\mathbf{a}}_{|0} = E\{\mathbf{a}\} = \mathbf{0}. \quad (4.82)$$

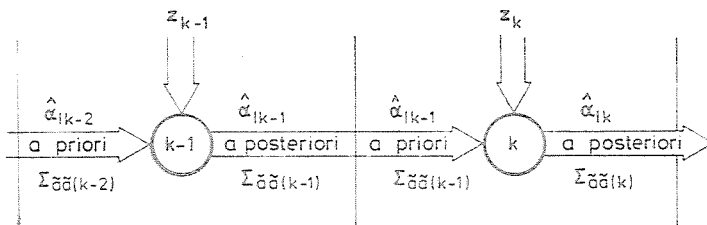
Ugyanakkor a becslési hiba kovariancia mátrixa az a priori kovariancia mátrix, ennek megfelelően (4.81) kezdeti feltétele :

$$\Sigma_{\tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{a}}(0)} = E\{(\mathbf{a} - E\{\mathbf{a}\})(\mathbf{a} - E\{\mathbf{a}\})^T\} = \Sigma_{\mathbf{a}\mathbf{a}}. \quad (4.83)$$

A kapott formulák értékelése alapján a következő észrevételeket tehetjük meg :

1. A rekurzív becslésnél jól nyomonkövethető az a priori — a posteriori ismeretlanc alakulása. A k -adik megfigyelés időpontjában a priori ismeretnek számít a $(k-1)$ megfigyeléssel nyert becslés és a becslési hiba kovariancia mátrixa, ami ugyanakkor a $(k-1)$ -edik megfigyelés szempontjából már a posteriori ismeret (lásd 4.10. ábra).

2. A kapott rekurzív összefüggés szerkezete a megfigyelési szekvencia hosszának növelésével nem változik, tehát valóban nincs olyan korlát a megfigyelések számának növelésével, mint amit a nemrekurzív becslésnél tapasztaltunk.



4.10. ábra. Az a priori — a posteriori ismeretlánc

3. A rekurzív eljárás nemstacionárius megfigyelési szekvencia mellett is alkalmazható, hiszen, mint ahogy a példában is feltételeztük, a $\Sigma_{nn(k)}$ kovariancia mátrix idővariáns lehet.

4. A (4.80) és (4.81) összefüggések kiszámíthatóságának feltétele, hogy az $[U_k \Sigma_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}(k-1)} U_k^T + \Sigma_{nn(k)}]$ mátrix inverze létezzen. Ez a feltétel megengedi, hogy $\Sigma_{nn(k)}$ nulla legyen.

5. Ugyanúgy, mint a 4.1. példánál, a mátrix inverziós lemma [lásd (4.23) összefüggés] alkalmazásával a becslőnek egy másik, ekvivalens formáját tudjuk származtatni:

$$\hat{\alpha}_{|k} = \hat{\alpha}_{|k-1} + [U_k^T \Sigma_{nn(k)}^{-1} U_k + \Sigma_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}(k-1)}^{-1}]^{-1} U_k^T \Sigma_{nn(k)}^{-1} (z_k - U_k \hat{\alpha}_{|k-1}). \quad (4.84)$$

A becslési hiba kovariancia mátrixa:

$$\Sigma_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}(k)} = [U_k^T \Sigma_{nn(k)}^{-1} U_k + \Sigma_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}(k-1)}^{-1}]^{-1}. \quad (4.85)$$

A kezdeti feltételek változatlanul a (4.82) és (4.83) összefüggések szerintiek.

Ezen formulák érdekes tulajdonsága, hogy alkalmazhatók abban az esetben is, mikor nincs információnk a mérendő mennyiségről a kezdeti állapotban. Ezt ugyanis így fejezhetjük ki, hogy a kezdeti feltételeket

$$\hat{\alpha}_{|0} = 0; \quad \Sigma_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}(0)} = 0 \quad (4.86)$$

értékre állítjuk be, amikkel a becslési szekvencia minden nehézség nélkül megindítható.

6. A nemrekurzív esethez hasonlóan a kapott eredmények megegyeznek a legkisebb átlagos négyzetes hibájú Bayes-becslő rekurzív alakjára Gauss-eloszlások esetén kapott eredményekkel.

Mint láttuk, a rekurzív becslések általános alakjának jelentősége az, hogy lehetővé teszi a különböző gyakorlati esetekre konkrét, rekurzív becslők származtatását.

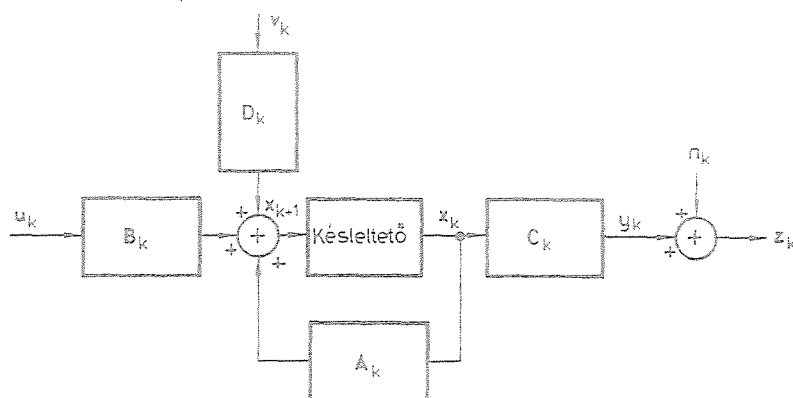
4.3.3. A Kalman-szűrési probléma

A Kalman-szűrés a szűrélmélet másik alapvető jelentőségű területe a Wiener—Kolmogorov-elmélet mellett. Az 50-es évek végén, a 60-as évek elején olyan becslési eljárások kidolgozására merült fel igény, amik a Wiener-szűrőkkel ellentétben alkalmasak erősen nemstacionárius jelek és zajok mellett is optimális működésre. Ugyanabban az időben alakult ki a technikai lehetőség, időinvariáns rendszerek elsősorban digitális úton történő, viszonylag egyszerű realizálására is. A követelményeket ki-

elégítő és az új technikai lehetőségeket kihasználó elmélet kidolgozása alapvetően R. Kalman (a magyar származású Kálmán Rudolf) nevéhez fűződik, akinek a témával foglalkozó első eredményei 1960-ban jelentek meg. Az azóta eltelt időben a Kalman-szűrés a méréselmélet egyik legáltalánosabban ismert, igen gyakran alkalmazott eredményévé vált. A Kalman-szűrés különböző vonatkozásával igen kiterjedt irodalom foglalkozik. A továbbiakban csak a legalapvetőbb eredményeket tekintjük át azzal a céllal, hogy a módszer lényegének megértését elősegítsük.

A vizsgált modell

A Kalman-szűrők elméletében a mérendő objektum modellje egy lineáris, dinamikus rendszer állapotegyenletes alakja (lásd 4.11. ábra). A mérési feladat a rendszer állapotváltozó vektorának becslése a zajjal fedett kimenőjelek felhasználásával, mikor a rendszer bemenőjele egy determinisztikus gerjesztés mellett sztochasztikus komponens (esetleg csak azt) is tartalmaz, továbbá a rendszer kezdeti állapota egy valószí-



4.11. ábra. A mérendő objektum modellje

nűségi vektorváltozó. (A Kalman-szűrő származtatását csak diszkrét idejű rendszerre végezzük el, összhangban az elsődlegesen digitális jellegű realizálások követelményeivel.)

A vizsgált diszkrét idejű, m -dimenziós dinamikus rendszer állapotegyenlete:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{D}_k \mathbf{v}_k, \quad (4.87)$$

az n -dimenziós kimeneti egyenlet pedig, ami a $\{z_k\}$ megfigyelési szekvencia elemeit generálja:

$$z_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + n_k. \quad (4.88)$$

A mérési probléma az $\mathbf{x}$ állapotváltozó legkisebb átlagos négyzetes hibájú becslése a $(k+r)$ időpillanatban, a megfigyelési szekvencia $\{z_j; j \leq k\}$ elemeinek felhasználásával. A Wiener-szűréshez hasonlóan most is megkülönböztetjük a szűrés ($r=0$), jóslási ($r>0$) és simítási ($r<0$) eseteket. Az előző pontban bevezetett jelölési konvenció szerint az állapotváltozó becslése a $(k+r)$ -edik időpillanatban a $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ szekvencia felhasználásával: $\hat{\mathbf{x}}_{(k+r)|k}$.

A priori ismeretek

A modell teljes definiálásához szükség van még a benne szereplő elemek statisztikai jellemzőinek, tehát a szükséges a priori ismereteknek a rögzítésére.

1. A rendszer kezdeti állapota $\mathbf{x}_0$ valószínűségi vektor változó, aminek várható értéke és kovariancia mátrixa:

$$E\{\mathbf{x}_0\} = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}_0}; \quad \text{cov} [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0] = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}\mathbf{x}(0)}. \quad (4.89)$$

2. Az $\{\mathbf{u}_k\}$ bemeneti gerjesztés d -dimenziós, minden k -ra ismert determinisztikus sorozat.

3. A $\mathbf{v}_k$ q -dimenziós bemeneti gerjesztés, nulla várható értékű fehérzaj sorozat ismert kovariancia mátrixszal:

$$E\{\mathbf{v}_k\} = \mathbf{0}; \quad \text{cov} [\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k] = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{v}\mathbf{v}(k)}, \\ \text{cov} [\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j] = \mathbf{0} \quad \forall k \neq j\text{-re.} \quad (4.90)$$

4. Az $\{\mathbf{n}_k\}$ megfigyelési zaj n -dimenziós, nulla várható értékű fehérzaj sorozat ismert kovariancia mátrixszal:

$$E\{\mathbf{n}_k\} = \mathbf{0}; \quad \text{cov} [\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_k] = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}\mathbf{n}(k)}, \\ \text{cov} [\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_j] = \mathbf{0} \quad \forall k \neq j\text{-re.} \quad (4.91)$$

5. Az imént rögzített valószínűségi változók egymással korrelálatlanok, azaz:

$$\text{cov} [\mathbf{v}_k, \mathbf{n}_j] = \mathbf{0}, \quad \forall j, k\text{-ra,} \\ \text{cov} [\mathbf{v}_k, \mathbf{x}_0] = \mathbf{0}, \quad \forall k\text{-ra,} \\ \text{cov} [\mathbf{n}_k, \mathbf{x}_0] = \mathbf{0}, \quad \forall k\text{-ra.} \quad (4.92)$$

A definiált modellnek két alapvető értelmezése van a mérési feladat szempontjából.

a) A modell, egy állapotegyenletével adott, részben sztochasztikus gerjesztésű diszkrét lineáris rendszer állapotváltozóinak becslésére szolgál zajos megfigyelések mellett.

b) A modell az $\{\mathbf{x}_k\}$ diszkrét sztochasztikus folyamat rendszer típusú modellje (lásd 2.5.6. pont), így a mérési feladat lényegében az $\{\mathbf{x}_k\}$ folyamat lineáris szűrése (esetleg jóslása vagy simítása) a zajos megfigyelések felhasználásával.

Az előbbieken rögzített két alapvető értelmezés, ezzel a *Kalman*-szűrők alkalmazási köre még jelentősen kiterjeszthető. Egyrészt alkalmas felírással a *Kalman*-szűrőt nemcsak állapot, hanem paraméter becslésre is használhatjuk, másrészt az előzőekben felsorolt feltételek jelentősen tágíthatók a zajok korreláltságának megengedése és nemlineáris tulajdonságok bevonása irányába. Mivel ezek az általánosítások jelentősen meghaladják a jelen kereteket, itt csak utalunk a téma irodalomjegyzékében felsorolt igen bőséges irodalomra.

4.3.4. Az egy lépéses Kalman-prediktor származtatása

Az r lépéses jóslás és az $r=0$ -nak megfelelő szűrés alapösszefüggéseihez a legcélravezetőbben az $r=1$ lépéses jóslási probléma megoldásán át juthatunk el.

Az egy lépéses *Kalman*-prediktor (másként jósló szűrő) rekurzívan generálja az $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ értéket $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ -ből és az aktuálisan érkező $\mathbf{z}_k$ megfigyelésből. A levezetés során tehát meg kell keresnünk ezt a rekurzív összefüggést, majd igazolnunk kell,

hogy a kezdeti feltételek alkalmas megválasztásával a származtatott formula korrekt becslést ad $k=0$ esetre is.

Induljunk ki abból, hogy $\hat{x}_{(k+1)}$ -et akarjuk a $\{z_k\}$ megfigyelési szekvencia elemeivel rekurzíven meghatározni. Mivel a megfigyelési szekvencia elemei korreláltak, a rekurzív becslésnek a (4.72) összefüggések szerinti általános alakját kell alkalmaznunk. Értelemszerű behelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\hat{x}_{(k+1)|k} &= \hat{x}_{(k+1)|(k-1)} + \hat{x}_{(k+1)}(\tilde{z}_k), \\ \tilde{z}_k &= z_k - \hat{z}_{k|(k-1)}.\end{aligned}\quad (4.93)$$

Mivel $\hat{x}_{(k+1)}$ legjobb becslése a $\tilde{z}_k$ innováció alapján nem más, mint a vetülete az innovációs vektor komponensei által kifeszített altérre, a (4.12) összefüggés felhasználásával:

$$\hat{x}_{(k+1)}(\tilde{z}_k) = \text{cov}[x_{k+1}, \tilde{z}_k] [\text{cov}[\tilde{z}_k, \tilde{z}_k]]^{-1} \tilde{z}_k. \quad (4.94)$$

Következő lépésként meghatározzuk a (4.94)-ben szereplő auto- és keresztkovariancia mátrixokat. A (4.88) szerinti kimeneti egyenlet és az LMS becslések linearitási tulajdonságának felhasználásával:

$$\tilde{z}_k = z_k - C_k \hat{x}_{k|(k-1)} = C_k \tilde{x}_{k|(k-1)} + n_k. \quad (4.95)$$

Mivel n_k korrelálatlan mind x_k -val, mind $\hat{x}_{k|(k-1)}$ -gyel,

$$\text{cov}[\tilde{z}_k, \tilde{z}_k] = C_k \Sigma_{\tilde{x}(k)} C_k^T + \Sigma_{nn(k)}. \quad (4.96)$$

Az előző összefüggésben

$$\Sigma_{\tilde{x}(k)} = \text{cov}[\tilde{x}_{k|(k-1)}, \tilde{x}_{k|(k-1)}], \quad (4.97)$$

tehát a $(k-1)$ megfigyeléshez tartozó becslési hiba kovariancia mátrixa.

A (4.94) összefüggésben szereplő keresztkovariancia mátrix meghatározását a későbbi igények miatt kissé általánosítva, a $\text{cov}[x_k, \tilde{z}_j]$; $k > j$ esetre végezzük el. Behelyettesítve $\tilde{z}_j$ helyére (4.95)-öt és felhasználva n_j és x_k korrelálatlanságát:

$$\text{cov}[x_k, \tilde{z}_j] = \text{cov}[x_k, C_j \tilde{x}_{j|(j-1)} + n_j] = \text{cov}[x_k, \tilde{x}_{j|(j-1)}] C_j^T. \quad (4.98)$$

A diszkrét rendszerek állapotváltozós modelljének vizsgálatánál (2.5.2. pont) láttuk, hogy a tetszőleges k -adik időpillanatbeli állapot a j -edik időpillanattól kiindulva az alábbi formában írható fel [lásd (2.294) és (2.295) összefüggések]:

$$x_k = \Phi_{k,j} x_j + \sum_{i=j}^{k-1} \Phi_{k,(i+1)} [B_i u_i + D_i v_i], \quad (4.99)$$

ahol az állapotátmenet mátrix:

$$\Phi_{k,j} = A_{k-1} A_{k-2} \dots A_j.$$

Behelyettesítve a (4.98) összefüggésbe x_n helyére (4.99)-et, elemi átalakítások elvégzése után a következő eredményt kapjuk:

$$\text{cov}[x_k, \tilde{z}_j] = \Phi_{k,j} \Sigma_{\tilde{x}(j)} C_j^T, \quad (4.100)$$

amiből:

$$\text{cov}[x_{k+1}, \tilde{z}_k] = A_k \Sigma_{\tilde{x}(k)} C_k^T. \quad (4.101)$$

Ahhoz, hogy felírassuk a keresett rekurzív alakot, hátra van még a (4.93) összefüggésben szereplő $\hat{x}_{(k+1)|(k-1)}$ tag átalakítása. Felhasználva az LMS becslők linearitását és azt, hogy v_k független a $(k-1)$ -edik időpillanatig nyert megfigyelésektől, a (4.87) szerinti állapotegyenlet alapján:

$$\hat{x}_{(k+1)|(k-1)} = A_k \hat{x}_{k|(k-1)} + B_k u_k. \quad (4.102)$$

Behelyettesítve ezek után a (4.96), (4.101) és (4.102) összefüggéseket a (4.94) és (4.93)-ba, az egylépéses Kalman-prediktorra a következő formulát kapjuk:

$$\hat{x}_{(k+1)|k} = A_k \hat{x}_{k|(k-1)} + B_k u_k + G_k [z_k - C_k \hat{x}_{k|(k-1)}], \quad (4.103)$$

$$G_k = A_k \Sigma_{\tilde{x}\tilde{x}(k)} C_k^T [C_k \Sigma_{\tilde{x}\tilde{x}(k)} C_k^T + \Sigma_{nn(k)}]^{-1}. \quad (4.104)$$

Ezen összefüggésekben a G_k mátrix az úgynevezett Kalman-erősítés.

Utolsó lépésként meg kell határoznunk a hiba kovariancia mátrixát generáló rekurzív összefüggést. Most is a rekurzív becslőkre kapott általános formulából [lásd (4.72)] indulunk ki, ahonnan értelemszerű behelyettesítéssel kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \text{cov} [\tilde{x}_{(k+1)|k}, \tilde{x}_{(k+1)|k}] &= \text{cov} [\tilde{x}_{(k+1)|(k-1)}, \tilde{x}_{(k+1)|(k-1)}] - \\ &- \text{cov} [x_{k+1}, \tilde{z}_k] [\text{cov} [\tilde{z}_k, \tilde{z}_k]]^{-1} \text{cov} [\tilde{z}_k, x_{k+1}]. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Ezen összefüggésben mindössze az első tag ismeretlen, tehát a $\text{cov} [\tilde{x}_{(k+1)|(k-1)}, \tilde{x}_{(k+1)|(k-1)}]$ meghatározását kell elvégeznünk. Ismét a (4.87) szerinti állapotegyenletbe való behelyettesítéssel, és annak felhasználásával, hogy $\tilde{x}_{k|(k-1)}$ független v_k -től azt kapjuk, hogy:

$$\text{cov} [\tilde{x}_{(k+1)|(k-1)}, \tilde{x}_{(k+1)|(k-1)}] = A_k \Sigma_{\tilde{x}\tilde{x}(k)} A_k^T + D_k \Sigma_{vv(k)} D_k^T. \quad (4.106)$$

A (4.96), (4.101), (4.106) összefüggéseket behelyettesítve (4.105)-be, a hiba kovariancia mátrixára nyert eredmény:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\tilde{x}\tilde{x}(k+1)} &= A_k [\Sigma_{\tilde{x}\tilde{x}(k)} - \Sigma_{\tilde{x}\tilde{x}(k)} C_k^T [C_k \Sigma_{\tilde{x}\tilde{x}(k)} C_k^T + \Sigma_{nn(k)}]^{-1} C_k \Sigma_{\tilde{x}\tilde{x}(k)}] A_k^T + \\ &+ D_k \Sigma_{vv(k)} D_k^T. \end{aligned} \quad (4.107)$$

A (4.103), (4.104) és (4.107) rekurzív formuláknak még meg kell határozni a kezdeti feltételét. Könnyen belátható, hogy az

$$\hat{x}_{0|-1} = \mu_{x0} \quad (4.108)$$

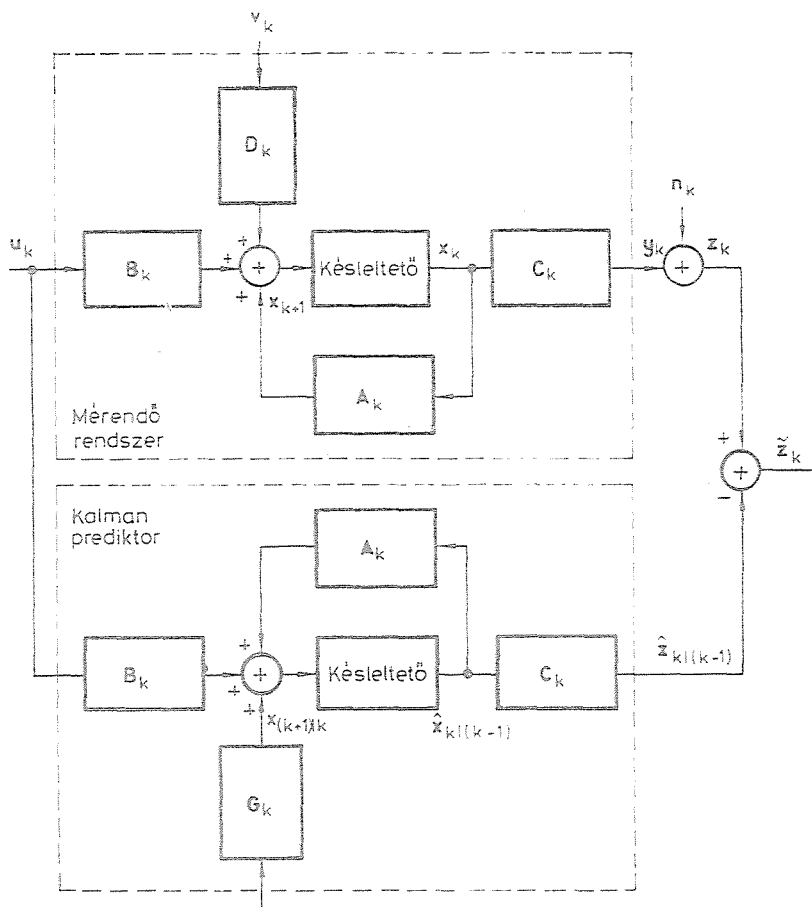
és

$$\Sigma_{\tilde{x}\tilde{x}(0)} = \Sigma_{xx(0)} \quad (4.109)$$

választásokkal a megfigyelés nélküli becslés négyzetes értelemben optimális, hiszen $\mu_{x0} = E\{x_0\}$ és a becslési hibát a (4.109) szerinti kovariancia mátrix adja. Ezzel meghatároztuk az egylépéses Kalman-prediktort definiáló összefüggéseket [(4.103), (4.104), (4.107), (4.108) és (4.109)]. A prediktornak, a (4.103) összefüggés alapján felrajzolt blokkvázlata, és a mérendő rendszer blokkvázlata látható a 4.12. ábrán.

A kapott eredményekből a következő általános tulajdonságokat szűrhetjük ki.

1. A Kalman-prediktor struktúrája tipikusan rekurzív mérési eljárás struktúra. Magában foglalja a mérendő rendszer modelljét, ami a mérendő rendszerrel azonos determinisztikus bemeneti gerjesztés mellett generálja a z_k megfigyelés optimális becslését $\hat{z}_{k|(k-1)}$ -et. Tartalmaz ezen kívül egy idővariáns korrekciós tagot G_k -t, ami a mérendő rendszer és a mérési eljárásba beépített modellje kimenőjeleinek különbségével, az innovációval korrigálja a modell állapotát.



4.12. ábra. A Kalman-prediktor blokkvázlata

2. A Kalman-prediktor tehát egy lineáris, diszkrét, idővariáns, véges dimenziós rendszer. Ezek a tulajdonságok rendkívül kedvezőek a realizálás szempontjából, ami a prediktor gyakorlati alkalmazhatóságának egyik alapja.

3. A (4.104) és (4.107) összefüggésekből láthatóan a becslési hiba kovariancia mátrixa és a G_k Kalman-erősítés nem függenek az aktuális megfigyelésektől, tehát előre kiszámíthatók. (Ezzel a tulajdonsággal nem rendelkezik a Kalman-szűrők minden típusa.)

4. A hiba kovariancia mátrixa és a Kalman-erősítés még akkor is idővariánsak, ha a modell időinvariáns, tehát az A_k , B_k , C_k , D_k mátrixok konstansok, továbbá a $\{v_k\}$ és $\{n_k\}$ zajok stacionáriusak.

A következőkben az egylépéses prediktor összefüggéseit terjesztjük ki két irányban. Első lépésként meghatározzuk az r lépéses predikció algoritmusát, majd korrelált $\{v_k\}$ és $\{n_k\}$ zajok mellett felírjuk a módosított összefüggéseket.

Az r lépéses predikció

A (4.99) összefüggés szerint, a vizsgált modell $(k+r)$ -edik időpillanatbeli állapota a $(k+1)$ -edik időpillanatbeli állapot és a bemeneti gerjesztések ismeretében a következő formában írható fel:

$$\mathbf{x}_{k+r} = \Phi_{(k+r), (k+1)} \mathbf{x}_{k+1} + \sum_{i=k+1}^{k+r-1} \Phi_{(k+r), (i+1)} [\mathbf{B}_i \mathbf{u}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{v}_i]. \quad (4.110)$$

Felhasználva az LMS becslők linearitási tulajdonságát [lásd (4.14) és (4.15) összefüggések], az előzőekben származtatott $\hat{\mathbf{x}}_{(k+1)|k}$ becslés birtokában $\hat{\mathbf{x}}_{(k+r)|k}$ a következőképpen határozható meg:

$$\hat{\mathbf{x}}_{(k+r)|k} = \Phi_{(k+r), (k+1)} \hat{\mathbf{x}}_{(k+1)|k} + \sum_{i=k+1}^{k+r-1} \Phi_{(k+r), (i+1)} [\mathbf{B}_i \mathbf{u}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{v}_i] \quad (4.111)$$

mivel, mint már korábban említettük, a $\{\mathbf{v}_k\}$ sorozat elemei korrelálatlanok a j -edik időpillanatig beérkező megfigyelésekkel minden $k > j$ -re. A becslési hiba pedig:

$$\Sigma_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\mathbf{x}}_{(k+r)} = \Phi_{(k+r), (k+1)} \Sigma_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\mathbf{x}}_{(k+1)} \Phi_{(k+r), (k+1)}^T + \sum_{i=k+1}^{k+r-1} \Phi_{(k+r), (i+1)} \mathbf{D}_i \Sigma_{\mathbf{v}\mathbf{v}} \mathbf{D}_i^T \Phi_{(k+r), (i+1)}^T \quad (4.112)$$

Az egy lépéses prediktorra nyert összefüggéseket kiegészítve a (4.111) és (4.112) összefüggésekkel, megkapjuk az r lépéses prediktor algoritmusát.

Predikció korrelált zajok mellett

A prediktor származtatásához szükséges a priori ismeretek között kikötöttük, hogy a $\{\mathbf{v}_k\}$ és $\{\mathbf{n}_k\}$ zaj szekvenciák egymással korrelálatlanok [lásd (4.92)]. Gyakran előfordul azonban, hogy a $\{\mathbf{v}_k\}$ bemeneti zaj és az $\{\mathbf{n}_k\}$ megfigyelési zaj közös fizikai okra vezethetők vissza, ami miatt korreláltakká válnak. Ebben az esetben az a priori ismeretek a következők szerint módosulnak:

$$\begin{aligned} \text{cov} [\mathbf{v}_k, \mathbf{n}_j] &= 0 \quad \forall k \neq j, \\ \text{cov} [\mathbf{v}_k, \mathbf{n}_k] &= \Sigma_{\mathbf{v}\mathbf{n}(k)}. \end{aligned} \quad (4.113)$$

Az egy lépéses prediktor származtatásánál $\{\mathbf{v}_k\}$ és $\{\mathbf{n}_k\}$ korrelálatlanságát egy helyen a $\text{cov} [\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{\mathbf{z}}_k]$ keresztkovariancia meghatározásánál [lásd (4.98)] használtuk ki. Felírva ismételtlen a keresett keresztkovarianciát, az alábbi eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned} \text{cov} [\mathbf{x}_{k+1}, \tilde{\mathbf{z}}_k] &= \text{cov} [\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{C}_k \tilde{\mathbf{x}}_{k|(k-1)} + \mathbf{n}_k] = \\ &= \text{cov} [\mathbf{x}_{k+1}, \tilde{\mathbf{x}}_{k|(k-1)}] \mathbf{C}_k^T + \mathbf{D}_k \text{cov} [\mathbf{v}_k, \mathbf{n}_k] = \\ &= \mathbf{A}_k \Sigma_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}(k)} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{D}_k \Sigma_{\mathbf{v}\mathbf{n}(k)}. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Ezt behelyettesítve a fenti keresztkovarianciát tartalmazó összefüggésekbe, az egy lépéses prediktor módosított alakja:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{(k+1)|k} &= \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|(k-1)} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{G}_k [\mathbf{z}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|(k-1)}], \\ \mathbf{G}_k &= [\mathbf{A}_k \Sigma_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}(k)} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{D}_k \Sigma_{\mathbf{v}\mathbf{n}(k)}] [\mathbf{C}_k \Sigma_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}(k)} \mathbf{C}_k^T + \Sigma_{\mathbf{n}\mathbf{n}(k)}]^{-1}, \\ \Sigma_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}(k+1)} &= \mathbf{A}_k \Sigma_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}(k)} \mathbf{A}_k^T - [\mathbf{A}_k \Sigma_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}(k)} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{D}_k \Sigma_{\mathbf{v}\mathbf{n}(k)}] [\mathbf{C}_k \Sigma_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}(k)} \mathbf{C}_k^T + \Sigma_{\mathbf{n}\mathbf{n}(k)}]^{-1} \times \\ &\times [\mathbf{A}_k \Sigma_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}(k)} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{D}_k \Sigma_{\mathbf{v}\mathbf{n}(k)}]^T + \mathbf{D}_k \Sigma_{\mathbf{v}\mathbf{v}(k)} \mathbf{D}_k^T, \\ \hat{\mathbf{x}}_{0|-1} &= \mu_{\mathbf{x}(0)}, \\ \Sigma_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}(0)} &= \Sigma_{\mathbf{x}\mathbf{x}(0)}. \end{aligned} \quad (4.115)$$

Az r lépéses predikció algoritmus a változatlanul a fenti összefüggéseknek a (4.111) és (4.112) formulákkal való kiegészítésével nyerhető.

Megjegyzések :

1. Az $\hat{x}_{(k+1)|k}$ becslésre nyert rekurzív összefüggés kis átalakítással a következőképpen írható fel:

$$\hat{x}_{(k+1)|k} = (A_k - G_k C_k) \hat{x}_{k|(k-1)} + B_k u_k + G_k z_k. \quad (4.116)$$

Látható, hogy ez nem más, mint az $\hat{x}_{(k+1)|k}$ szekvenciát generáló differencia egyenlet, vagy másként, a Kalman-prediktornak, mint lineáris, idővariáns, dinamikus rendszernek az állapotváltozós alakja. [Ebből az alakból következik, hogy a Kalman-prediktor aszimptotikus tulajdonságainak, stabilitásának vizsgálatánál az $(A_k - G_k C_k)$ egy lépéses állapotátmenet mátrixnak van alapvető jelentősége.]

2. A becslési hiba kovariancia mátrixára is származtatható egy másik forma:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\tilde{x}} \tilde{x}_{(k+1)} &= (A_k - G_k C_k) \Sigma_{\tilde{x}} \tilde{x}_{(k)} (A_k - G_k C_k)^T + D_k \Sigma_{vv(k)} D_k^T + \\ &+ G_k \Sigma_{nn(k)} G_k^T - D_k \Sigma_{vn(k)} G_k^T - G_k \Sigma_{vn(k)}^T D_k^T. \end{aligned} \quad (4.117)$$

Igazolható, hogy a fenti alak a számítási hibákra kevésbé érzékeny, ezért olyan esetekben, ahol a kerekítési hibák jelentősek lehetnek, ezt a formát célszerű alkalmazni.

4.3.5. A szűrési probléma

Ha a $\{z_k\}$ megfigyelési szekvencia alapján az aktuális időpillanathoz tartozó x_k állapotváltozó vektort akarjuk becsülni, a szűrési problémához jutunk. A szűrő alapösszefüggéseit közvetlenül a korrelált zajok esetére származtatjuk, tehát a $\{v_k\}$ és $\{n_k\}$ zajokra a (4.113) összefüggés teljesül.

A rekurzív becslések általános alakját [lásd (4.72)] felhasználva:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{(k+1)|(k+1)} &= \hat{x}_{(k+1)|k} + \hat{x}_{(k+1)}(\tilde{z}_{k+1}), \\ \tilde{z}_{k+1} &= z_{k+1} - \hat{z}_{(k+1)|k}. \end{aligned} \quad (4.118)$$

Ugyanúgy, mint ahogy az egy lépéses prediktor származtatásánál tettük, a következőkben meg kell határozni a (4.118) összefüggés jobb oldalán szereplő mennyiségeket $\hat{x}_{k|k}$ és az a priori statisztikai jellemzők felhasználásával. Az eddigiekben a becslési hiba kovariancia mátrixát csak az aktuális esetre, az egy lépéses, vagy r lépéses jóslásra vonatkoztatva kellett meghatároznunk. A továbbiakban egymás mellett kell használnunk a különböző megfigyelési szekvenciák mellett értelmezett becslési hibák kovariancia mátrixát, ezért bevezetjük a következő jelölést:

$$\text{cov} [\tilde{x}_{k|j}, \tilde{x}_{k|j}] = \Sigma_{\tilde{x}} \tilde{x}_{(k|j)}$$

ami jelenti a k -edik időpillanatra vonatkozó becslési hiba kovariancia mátrixát a $\{z_i\}$ $i \leq j$ megfigyelési szekvencia felhasználásával.

Első lépésként meghatározzuk az $\hat{x}_{(k+1)|k}$ becslést, ismertnek feltételezve $\hat{x}_{k|k-1}$. A rendszer állapotegyenlete és kimeneti egyenlete:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k + D_k v_k, \\ z_k &= C_k x_k + n_k. \end{aligned}$$

Felhasználva az LMS becslők linearitását:

$$\hat{x}_{(k+1)|k} = A_k \hat{x}_{k|k} + B_k u_k + D_k \hat{v}_{k|k}. \quad (4.119)$$

A zaj szekvenciák korreláltsága miatt v_k nem korrelálatlan z_k -val, ezért $\hat{v}_{k|k}$ nem nulla. Meghatározásához ismét a (4.72) összefüggés megfelelő alakját használjuk, ami szerint

$$\hat{v}_{k|k} = \hat{v}_{k|(k-1)} + \hat{v}_k(\tilde{z}_k) = \Sigma_{vn(k)} \Sigma_{nn}^{-1}(k) [z_k - C_k \hat{x}_{k|k}]. \quad (4.120)$$

Ezt behelyettesítve (4.119)-be kapjuk, hogy

$$\hat{x}_{(k+1)|k} = [A_k - D_k \Sigma_{vn(k)} \Sigma_{nn}^{-1}(k) C_k] \hat{x}_{k|k} + B_k u_k + D_k \Sigma_{vn(k)} \Sigma_{nn}^{-1}(k) z_k. \quad (4.121)$$

A következő lépés $\hat{x}_{(k+1)}(\tilde{z}_{k+1})$ meghatározása. A (4.94) összefüggés analógiájára:

$$\hat{x}_{(k+1)}(\tilde{z}_{k+1}) = \text{cov} [x_{k+1}, \tilde{z}_{k+1}] [\text{cov} [\tilde{z}_{k+1}, \tilde{z}_{k+1}]]^{-1} \tilde{z}_{k+1}.$$

Az egylépéses prediktor származtatásánál közölt gondolatmenet és az eredmények értelemszerű alkalmazásával:

$$\text{cov} [x_{k+1}, \tilde{z}_{k+1}] = \Sigma_{\tilde{x}\tilde{z}}(k+1|k) C_{k+1}^T$$

és

$$\text{cov} [\tilde{z}_{k+1}, \tilde{z}_{k+1}] = C_{k+1} \Sigma_{\tilde{x}\tilde{x}}(k+1|k) C_{k+1}^T + \Sigma_{nn}(k+1),$$

amikkel:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{(k+1)}(\tilde{z}_{k+1}) &= \Sigma_{\tilde{x}\tilde{z}}(k+1|k) C_{k+1}^T [C_{k+1} \Sigma_{\tilde{x}\tilde{x}}(k+1|k) C_{k+1}^T + \Sigma_{nn}(k+1)]^{-1} \times \\ &\times [z_{k+1} - C_{k+1} \hat{x}_{(k+1)|k}]. \end{aligned} \quad (4.122)$$

Behelyettesítve (4.121)-et és (4.122)-t a (4.118) szerinti kiinduló összefüggésbe, megkapjuk a szűrési egyenletet. Az egyszerűség kedvéért a formulát csak arra az esetre írjuk fel, mikor $\Sigma_{vn(k)} = 0$, tehát a zajok korrelálatlanok. A behelyettesítések után az eredmény:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{(k+1)|(k+1)} &= A_k \hat{x}_{k|k} + B_k u_k + G_{k+1} [z_{k+1} - C_{k+1} A_k \hat{x}_{k|k} - C_{k+1} B_k u_k], \\ G_{k+1} &= \Sigma_{\tilde{x}\tilde{z}}(k+1|k) C_{k+1}^T [C_{k+1} \Sigma_{\tilde{x}\tilde{x}}(k+1|k) C_{k+1}^T + \Sigma_{nn}(k+1)]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.123)$$

A kezdeti feltétel pedig:

$$\hat{x}_{0|0} = \mu_{x0} + \Sigma_{xx(0)} C_0^T [C_0 \Sigma_{xx(0)} C_0^T + \Sigma_{nn(0)}]^{-1} (z_0 - C_0 \mu_{x0}). \quad (4.124)$$

A következő lépés a hiba kovariancia mátrixának származtatása. Ismét a (4.72) összefüggésből indulunk ki, ami szerint:

$$\begin{aligned} \text{cov} [\tilde{x}_{(k+1)|(k+1)}, \tilde{x}_{(k+1)|(k+1)}] &= \text{cov} [\tilde{x}_{(k+1)|k}, \tilde{x}_{(k+1)|k}] - \\ &- \text{cov} [x_{k+1}, \tilde{z}_{k+1}] [\text{cov} [\tilde{z}_{k+1}, \tilde{z}_{k+1}]]^{-1} \text{cov} [\tilde{z}_{k+1}, x_{k+1}]. \end{aligned} \quad (4.125)$$

Elvégezve a behelyettesítéseket:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\tilde{x}\tilde{x}}(k+1|k+1) &= \Sigma_{\tilde{x}\tilde{x}}(k+1|k) - \Sigma_{\tilde{x}\tilde{z}}(k+1|k) C_{k+1}^T \times \\ &\times [C_{k+1} \Sigma_{\tilde{x}\tilde{x}}(k+1|k) C_{k+1}^T + \Sigma_{nn}(k+1)]^{-1} C_{k+1} \Sigma_{\tilde{x}\tilde{x}}(k+1|k). \end{aligned} \quad (4.126)$$

Az összefüggésben szereplő egylépéses predikció hibájának kovariancia mátrixa pedig:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\tilde{x}\tilde{x}}(k+1|k) &= [A_k - D_k \Sigma_{vn(k)} \Sigma_{nn}^{-1}(k) C_k] \Sigma_{\tilde{x}\tilde{x}}(k|k) [A_k - D_k \Sigma_{vn(k)} \Sigma_{nn}^{-1}(k) C_k]^T + \\ &+ D_k [\Sigma_{vv(k)} - \Sigma_{vn(k)} \Sigma_{nn}^{-1}(k) \Sigma_{vn(k)}^T] D_k^T. \end{aligned} \quad (4.127)$$

Ha a zajok korrelálatlanok, a (4.126) összefüggés változatlan marad, míg (4.127) a következő alakra egyszerűsödik:

$$\Sigma_{\tilde{x}\tilde{x}}(k+1|k) = A_k \Sigma_{\tilde{x}\tilde{x}}(k|k) A_k^T + D_k \Sigma_{vv(k)} D_k^T. \quad (4.128)$$

Összefoglalás

Ahogy a bevezetőben is említettük, a jelen áttekintés célja a *Kalman*-szűréssel kapcsolatos néhány alapvető eredmény bemutatása a módszer lényegének, tulajdonságainak ismertetése érdekében. Terjedelmi korlátok miatt nem foglalkoztunk számos olyan kérdéssel, ami jelentőségében nem marad el az ismertetettektől (pl. a simítási problémák), csak a nagyobb algebrai bonyolultság miatt nem volt mód a részletes tárgyalásra. Befejezésül összefoglaljuk a *Kalman*-szűrők elméletének néhány további jelentős eredményét, amik az irodalomban részletes formában megtalálhatók.

1. *Kalman*-szűrő származtatható a simítási problémára is, mikor az x_k állapot becslését a $\{z_j\}$, $j > k$ megfigyelési szekvenciával akarjuk meghatározni. A simító szűrőnek több formája létezik. Az egyik a rögzített időpillanatra származtatott szűrő, ami x_k becslését a növekvő $\{z_j\}$, $j > k$ sorozat elemeiből állítja elő. A másik változat a rögzített késleltetésű szűrő, ami az aktuális megfigyelés időpillanatától rögzített r lépéses késleltetésre levő állapotváltozó becslését szolgáltatja. A harmadik változat a rögzített intervallum simítás, ami egy $[0, N]$ intervallum belsejére származtatja az állapotváltozó optimális becslését, az ugyanebbe az intervallumba eső megfigyelések felhasználásával.

2. Időinvariáns modellre és stacionárius zajokra meghatározhatók a *Kalman*-szűrők aszimptotikus stabilitásának feltételei, és származtatható az állandósult állapothoz tartozó *Kalman*-erősítés valamint hiba kovariancia mátrix.

3. A *Wiener*- és *Kalman*-szűrők közötti alapvető különbségek, hogy míg az előbbi csak stacionárius zajok mellett értelmezhető és származtatása a frekvencia tartományban történik, addig az utóbbi nemstacionárius esetben is alkalmazható és származtatása az időtartományra vonatkozik. Ezen különbségek ellenére a két szűrőtípus között jól meghatározott kapcsolat található. Bebizonyítható, hogy az időinvariáns modellre és stacionárius zajokra származtatott *Kalman*-szűrő, amennyiben aszimptotikusan stabil, állandósult állapotában ekvivalens a megfelelő kauzális *Wiener*-szűrővel.

4. A *Kalman*-szűrők alkalmazása kiterjeszthető nemlineáris modellre is úgy, hogy a nemlinearitásokat *Taylor*-soruk segítségével adott fokszámig közelítjük.

5. Az ismeretlen paraméterekkel rendelkező állapotteres jel-modellek széles osztályára szimultán állapot és paraméter becslés építhető fel, ahol a paramétereket a rögzített állapotok melletti legkisebb négyzetes hibájú (LS) becslővel, az állapotokat a rögzített paraméterek melletti *Kalman*-szűrővel becsüljük.

4.4. A Gauss—Markov-becslő

A 4.2. és 4.3. szakaszban tárgyalt legkisebb átlagos négyzetes hibájú becslőknél a mérendő mennyiséget valószínűségi vektorváltozónak tekintettük, ismert középértékkel és kovariancia mátrixszal. A *Gauss—Markov* (GM) becslésnél ezzel szemben abból indulunk ki, hogy a mérendő mennyiség egy ismeretlen a vektor, amiről semmilyen a priori ismeretünk nincs. A 3.3.2. pontban a GM becslőt mint a *Gauss*-eloszlásokra felírt maximum likelihood becslőt származtattuk, és igazoltuk, hogy az így nyert becslő lineáris, minimális varianciájú és torzítatlan. Most, a fejezet célkitűzésének megfelelően, kiindulópontunk ettől lényegesen eltér. A következőkben, vektor-algebrai tárgyalásmóddal, származtatni fogjuk a lineáris, minimális varianciájú torzítatlan becslőt mint egy norma minimalizálási probléma megoldását és megmutatjuk,

hogy a kapott alak megegyezik a 3.3.2. pontban származtatott GM becslővel. Ezzel igazoljuk, hogy a GM becslő optimalitása a lineáris becslők között nincs korlátozva a Gauss-statisztikára, azaz egyike a négyzetes értelemben optimális lineáris mérési eljárásoknak.

4.4.1. A vizsgált modell

Legyen a vizsgált modell

$$z = Ua + n \quad (4.129)$$

alakú, ahol z az n -dimenziós megfigyelési vektor, a az m -dimenziós mérendő vektor, n az n -dimenziós megfigyelési zaj és U egy $m \times n$ -es, ismert elemeket tartalmazó mátrix. A priori ismeretnek tételezzük fel az n valószínűségi vektorváltozó várható értékét és kovariancia mátrixát:

$$E\{n\} = 0; \quad E\{nn^T\} = \Sigma_n. \quad (4.130)$$

Ezen modell egy lehetséges interpretációja, hogy n -szer megmérünk egy m ismeretlen paramétertől lineárisan függő mennyiséget, és az egyes mérések egymással korrelált zajjal terhelték.

A feladat a négyzetes értelemben optimális, lineáris, torzítatlan becslésének $\hat{a}_{GM}$ -nek meghatározása:

$$\hat{a}_{GM} = Gz, \quad (4.131)$$

ahol az optimális becslőt rögzítő G egy $n \times m$ -es mátrix. A becslő származtatásánál kikötésünk, hogy torzítatlan legyen, azaz

$$E\{\hat{a}\} = a \quad (4.132)$$

teljesüljön. Behelyettesítve a fenti összefüggésbe (4.131) és (4.129)-et, a torzítatlanság feltétele a következő formába írható át:

$$E\{G[Ua + n]\} = GUa = a,$$

amiből

$$GU = I. \quad (4.133)$$

Az optimálási kritérium a négyzetes hiba, amit komponensekre bontva a következő formában írhatunk fel:

$$\varepsilon_2 = E\{(\alpha - a)^T(\alpha - a)\} = \sum_{i=1}^m E\{(\alpha_i - a)^2\} = \sum_{i=1}^m \|\tilde{a}_i\|^2. \quad (4.134)$$

4.4.2. A becslő származtatása

Az optimálási feladat megoldásához első lépésként kifejtjük a (4.134) összefüggésbe definiált négyzetes hibát a (4.131) és (4.129) behelyettesítésével. Az átalakítások elvégzése után a következő eredményt kapjuk:

$$\varepsilon_2 = \sum_{i=1}^m g_i^T \Sigma_n g_i, \quad (4.135)$$

ahol g_i^T a G mátrix i -edik sora.

A feladat tehát a fenti összefüggést minimáló G mátrix megkeresése a

$$GU=I$$

feltétel betartása mellett.

A problémát komponensekre bontva is megfogalmazhatjuk, ami szerint az i -edik optimalizációs probléma a

$$\begin{aligned} & \mathbf{g}_i^T \Sigma_{nn} \mathbf{g}_i \\ & \text{minimálása a} \\ & \mathbf{g}_i^T \mathbf{u}_j = \delta_{ij} \quad j=1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (4.136)$$

feltétel betartása mellett, ahol $\mathbf{u}_j$ az U mátrix j -edik oszlopa és δ_{ij} a *Kronecker* delta függvény.

A minimálási feladat egyszerűbb alakra hozása érdekében hozzunk létre egy olyan jelteret, ahol a belső szorzat definíciójánál egy alkalmas súlyfüggvényt vezetünk be [lásd (2.143) összefüggés], nevezetesen:

$$(\mathbf{x}\mathbf{y})_{\Sigma_{nn}} = \mathbf{x}^T \Sigma_{nn} \mathbf{y}.$$

Ebben az esetben a (4.135) összefüggés a

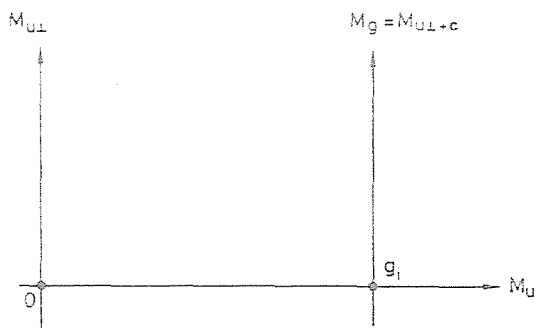
$$\|\mathbf{g}_i\|_{\Sigma_{nn}}^2 = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_i)_{\Sigma_{nn}} \quad (4.137)$$

súlyozott norma minimálását jelenti a

$$(\mathbf{g}_i, \Sigma_{nn}^{-1} \mathbf{u}_j)_{\Sigma_{nn}} = \delta_{ij} \quad j=1, 2, \dots, m \quad (4.138)$$

feltételek mellett. Az adott minimálási problémához egy szemléletes geometriai kép rendelhető.

Jelöljük $M_{u\perp}$ -val az $\{\mathbf{u}_j; j=1, \dots, m\}$ vektorok által kifeszített alteret és $M_{u\perp}$ -val ennek ortogonális komplementjét. [Az $M_{u\perp}$ minden eleme ortogonális M_u valamennyi elemére, lásd (2.134).] Ha a (4.138) feltétel olyan lenne, hogy a $\mathbf{g}_i$ vektornak a



4.13. ábra. A minimálási feladat geometriai képe

$\{\Sigma_{nn}^{-1} \mathbf{u}_j; j=1, \dots, m\}$ vektorokkal vett valamennyi skalár szorzata nulla lenne, akkor $\mathbf{g}_i$ nyilván az $M_{u\perp}$ tér eleme lenne. A feltétel szerint viszont a skalárszorzatok között van nullától eltérő elem. Az összes olyan vektor, amire teljesül a (4.138) feltétel, $M_{u\perp}$ egy affín terének (lásd 2.14. ábra), azaz egy konstans c vektorral eltoltt változatának eleme, tehát M_g -vel jelölve ezt a teret, $M_g = M_{u\perp} + c$. A definiált terek kapcsolatát a 4.13. ábra szemlélteti. Az ábrából láthatóan a (4.137) összefüggés szerinti norma-minimálás nem más, mint az M_g altér minimális normájú elemének kiválasz-

tása. Ez a minimális normájú elem viszont láthatóan eleme az M_0 altérnek is, tehát g_i előállítható az $\{u_j\}$ vektorok lineáris kombinációjaként:

$$g_i = \sum_{j=1}^m \gamma_j u_j. \quad (4.139)$$

Ezt behelyettesítve a (4.138) összefüggésbe, g_i -re a következő eredményt kapjuk

$$g_i = \Sigma_{nn}^{-1} U [U^T \Sigma_{nn}^{-1} U]^{-1} e_i,$$

ahol e_i egy olyan m -dimenziós vektor, aminek i -edik komponense 1, a többi pedig nulla.

Összevonva az n optimálási részprobléma megoldása során származtatott g_i vektorokat, a G mátrixot rögzítő összefüggés:

$$G = [U^T \Sigma_{nn}^{-1} U]^{-1} U^T \Sigma_{nn}^{-1}. \quad (4.140)$$

A becslés négyzetes hibáját a G mátrixra kapott eredménynek, a hibát definiáló (4.135) összefüggésbe való behelyettesítésével nyerjük:

$$\varepsilon_2 = E\{[\hat{\alpha}_{GM} - a]^T [\hat{\alpha}_{GM} - a]\} = [U^T \Sigma_{nn}^{-1} U]^{-1}. \quad (4.141)$$

Megjegyzések:

1. A mérési eljárás származtatásához a zaj kovariancia mátrixának ismerete szükséges, a mérési eljárás tehát optimális minden sűrűségfüggvény mellett.

2. Az eredmények megegyeznek a Gauss—Markov-becslőnek a 3.3.2. pontban származtatott alakjával. Ennek következtében a Gauss—Markov-becslő egyrészt maximum likelihood becslő Gauss-zaj esetén, másrészt legkisebb átlagos négyzetes hibájú, vagy másként minimális varianciájú a lineáris, torzítatlan becslők között.

4.5. A legkisebb négyzetes hibájú lineáris becslő

A legkisebb négyzetes hibájú lineáris (LS) becslő a vizsgált becslési eljárások harmadik fő típusa. Az előző pontokban tárgyalt becslési eljárásoktól az különbözteti meg, hogy származtatásához nincs szükség a priori ismeretre sem a mérendő paraméter, sem a zaj vonatkozásában. Az LS becslés alapvető típusaival, tulajdonságaival a 3.4. szakasz foglalkozik. Célkitűzésünk most mindössze annyi, hogy az LS becslésnek is megadjuk a geometriai interpretációját és ezzel a lineáris, négyzetes értelemben optimális becslések vektorteres leírását teljessé tegyük.

A becslés származtatásánál a 4.4.1. ponttal megegyezően a

$$z = Ua + n \quad (4.142)$$

modellt használjuk, ahol z az n -dimenziós megfigyelési vektor, a az m -dimenziós mérendő vektor és U egy $m \times n$ -es, ismert elemeket tartalmazó mátrix. A feladat az a vektor becslése úgy, hogy a priori ismeret a -ról és n -ről nem áll rendelkezésre. A korábban megadott értelmezés alapján optimálisnak tekintjük azt az $\alpha = \hat{\alpha}_{LS}$ vektort, ami az

$$\varepsilon_2 = \|z - z_M\|^2 = \|z - U\alpha\|^2 \quad (4.143)$$

négyzetes hibát minimálja. A (4.143) szerinti négyzetes hiba a megfigyelési vektor és a $\mathbf{z}_M = \mathbf{U}\alpha$ vektor különbségének norma négyzete. Ha $\mathbf{u}_i$ -vel jelöljük az $\mathbf{U}$ mátrix oszlopvektorait, akkor a megfigyelési vektort közelítő $\mathbf{z}_M$ vektor a következő formába írható:

$$\mathbf{z}_M = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{u}_i. \quad (4.144)$$

Ebből az alakból már közvetlenül megfogalmazhatjuk az optimálási feladatot mint approximációs problémát. Adott m lineárisan független vektor $\{\mathbf{u}_i; i=1, \dots, m\}$, amik kifeszítik az M_u alteret. Keressük az M_u altéren kívüli $\mathbf{z}$ vektor $\mathbf{z}_M$ approximációját, ahol $\mathbf{z}_M$ az M_u altérnek $\mathbf{z}$ -hez legközelebb eső eleme. A vetítési tétel (2.3.2. pont) értelmében $\mathbf{z}_M$ nem más, mint $\mathbf{z}$ -nek az M_u altérre eső vetülete. A vetületet meghatározó $\alpha = \hat{\alpha}_{LS}$ vektort a normál egyenlet felírása és megoldása útján nyerhetjük:

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{z} - \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{u}_i \right]^T \mathbf{u}_1 &= 0, \\ \vdots & \\ \left[\mathbf{z} - \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{u}_i \right]^T \mathbf{u}_m &= 0. \end{aligned} \quad (4.145)$$

Átírva a normál egyenletet mátrixos alakba, a következő egyszerű összefüggéshez jutunk:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^T \mathbf{U} \hat{\alpha}_{LS} &= \mathbf{U}^T \mathbf{z}, \\ \text{amiből} \\ \hat{\alpha}_{LS} &= [\mathbf{U}^T \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{z}. \end{aligned} \quad (4.146)$$

A kapott eredmény természetesen megegyezik az LS becslőre nyert korábbi (3. fej.) összefüggéssel. Megállapíthatjuk tehát, hogy a legkisebb négyzetes hibájú lineáris becslőnek ugyancsak megadható a geometriai interpretációja, és így az LMS, valamint GM becslőkkel együtt egységes keretben tárgyalható.

Összefoglalás

A 4. fejezetben áttekintettük a négyzetes értelemben optimális, lineáris mérési eljárások három alaptípusát és megadtuk a vektorterekre épülő tárgyalásmód alapján geometriai interpretációjukat. Mint ahogy a bevezetésben is említettük, a származtatott becslési alapösszefüggések formájukat tekintve megegyeznek a 3. fejezetben statisztikai alapon nyert formulákkal. A lényeges különbség az eredmények értelmezésében van, ami szerint a kapott becslési eljárások négyzetes értelemben optimális lineáris becslők és ilyen értelemben nem kötődnek bizonyos a priori sűrűségfüggvény típusokhoz, mint azt a statisztikai elemzésnél láttuk.

5. Mérési adatok feldolgozásának alapvető módszerei

Az előző fejezetek a mérési problémák jel- és rendszerelméleti leírásával, az optimális mérési eljárások származtatásával foglalkoztak. Bár a tárgyalt módszerek mindegyike a méréstechnikai gyakorlatban eredményesen alkalmazható, mégis érdemes kiemelni néhány olyan adatfeldolgozási, adatkiértékelési eljárást, amik különösen elterjedtek és széles körben használatosak. Ezeknek a módszereknek, nevezetesen az átlagolásnak, konfidencia számításnak, hipotézis teszteknek, regresszió analízisnek és a gyakorlati hibaszámításnak természetesen megvan a méréselméleti hátterük, többnyire egy általános méréselméleti módszer speciális esetének tekinthetők.

A fejezet célkitűzése, a felsorolt adatfeldolgozási eljárások méréselméleti alapon való tárgyalása és így a módszerek általános tulajdonságainak pontos rögzítése.

5.1. Az átlagolás

A mérési adatok feldolgozásánál legalapvetőbb eljárás az átlagolás. Mint ismeretes, sztochasztikus méréseknél a mérési adatfeldolgozást és a mérési eredmények megadását több helyen kíséri a várhatóérték-képzés.

Ilyen típusú mérési feladathoz tartoznak pl. a középérték, korreláció, négyzetes középérték, spektrum stb. mérése, olyan mérések tehát, melyekkel valamilyen valószínűségi változó egy-egy momentumát határozzuk meg. A mérési eljárás általában nem képes teljesen megvalósítani az elméleti várhatóérték-képzést, így az eljárás tervezőjének gondoskodnia kell annak kellő hatékonyságú helyettesítéséről — olyan adatfeldolgozásról, amely egyszerű módon megvalósítható és igen jól közelíti meg az elméleti várhatóérték-képzés eredményét.

A megoldás az átlagolás, amely a nagyszámok törvénye értelmében biztosítja az igazi várható értékhez való konvergenciát. Ha tehát $\{z_k\}$ a mérés során előállított, független, azonos valószínűségi eloszlással és μ_z középértékkel rendelkező véletlen változó sorozat, akkor a μ_z mérési eredmény megközelítésére igen alkalmas eszköznek bizonyul a:

$$\hat{\mu}_z = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k \quad (5.1)$$

eljárás, mivel:

$$P \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k = \mu_z \right) = 1. \quad (5.2)$$

Az átlagolás ugyanakkor az előző fejezetekben megismert becslési eljárások egy speciális esetének is tekinthető, és ennek megfelelően értelmezhetők rajta a becslési eljárások vizsgált tulajdonságai mint pl.: a konzisztencia, torzítás, variancia, hatássosság.

Az is nyilvánvaló, hogy az átlagolás hatásának elemzését csak a mérendő mennyiségre és a megfigyelési körülményekre vonatkozó a priori ismeretek rögzítése mellett lehet elvégezni, hiszen, mint az előzőekben láttuk, az a priori ismeretek a becslési eljárások analízisében és szintézisében egyaránt meghatározók.

Az átlagolás konvergenciájának feltételeivel a központi határeloszlás tétel foglalkozik, miszerint, ha az előbb említett $\{z_k\}$ valószínűségi változók mindegyikének σ^2 a második momentuma, akkor:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left[\alpha < \frac{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k - \mu_z}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} < \beta \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (5.3)$$

Így tehát az a közismert állítás, hogy az átlagolt mérési adatok szórásnégyzete az átlagolásszámmal fordított arányban csökken, csak a priori ismert statisztikai feltevések mellett teljesül, nevezetesen akkor, ha a mérési adatok függetlenek.

A következőkben jellemezzük azokat a mérési körülményeket, amelyek a mérés-technikai gyakorlatban leginkább összefonódnak az átlagolás alkalmazásával.

5.1.1. Az átlagolás vizsgálatánál használt jelmodell

Átlagolással leggyakrabban a megfigyelések, ill. a megfigyelések tetszőleges függvényeinek középértékét becsljük [l. (5.2), (5.3)].

Ahhoz, hogy az átlagolás statisztikai tulajdonságait elemezni tudjuk, a középérték és a megfigyelés kapcsolatára a következő egyszerű modellt használjuk:

$$z = \mu_z e + n, \quad (5.4)$$

ahol $z^T = [z_0, z_1, \dots, z_{N-1}]$ a megfigyelések vektora, $e^T = [1, 1, \dots, 1]$, μ_z skalár és n a megfigyeléseknek a középértéktől vett eltérését leíró zajvektor.

Megjegyzések:

1. Az iménti modell a diszkrét esetet írja le, és a vizsgálatokat is erre az esetre vezessük el. A folytonos esetre való kiterjesztés a:

$$z(t) = \mu_z + n(t), \quad t \in [0, T],$$

$$\hat{\mu}_z = \frac{1}{T} \int_0^T z(t) dt \quad (5.5)$$

modell alapján nem jelent nehézséget.

2. Bár a modell közvetlenül a megfigyelések középértékének becslésére vonatkozik, az eredményeket egyszerűen kiterjeszthetjük más esetre is. Legyen pl.:

$$m_k = z_k^r, \quad (5.6)$$

azaz képezzük az $\mathbf{m}$ vektort, aminek komponensei a $\mathbf{z}$ megfigyelési vektor komponenseinek n -edik hatványa.

Ekkor az:

$$\mathbf{m} = \mu_m \mathbf{e} + \mathbf{n}_m \quad (5.7)$$

felbontással a megfigyelések n -edik momentumának becslését modellezhetjük, ha μ_m a keresett momentum és $\mathbf{n}_m$ a megfigyelések n -edik hatványának az μ_m középértéktől való eltérését leíró zajvektor.

Hasonlóan, ha:

$$m_k = z_k z_{k+r}, \quad (5.8)$$

akkor ezzel a modellel a korrelációfüggvény becslését írhatjuk le.

3. Fontos ismételten hangsúlyozni, hogy az átlagolást a megfigyelések (másként mérési adatok) vagy azok valamilyen függvénye középértékének becslése szempontjából elemezzük. Ezt az indokolja, hogy az átlagolást legtöbbször erre a mérési feladatra használjuk, de természetesen előfordul más alkalmazás is.

4. Az (5.4) jelmodellről általában azt szokás feltételezni, hogy a jellemzői időben nem változnak, a jelmodell tehát stacionárius. Ezzel a feltételezéssel mi is élni fogunk az átlagolás további vizsgálatánál. A stacionaritás jelenléte, ill. hiánya lényegesen befolyásolja az átlagolás statisztikai tulajdonságait, nevezetesen a középértékbecslés torzítását (l. 3.2. szakasz).

Ha a megfigyelés középértéke időben nem változik — az átlag várható értéke azonos a mérendő középértékkel:

$$E\{\hat{\mu}_z\} = E\left\{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k\right\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} E\{z_k\} = \mu_z \quad (5.9)$$

torzítás tehát nem lép fel

$$b = E\{\hat{\mu}_z\} - \mu_z = 0. \quad (5.10)$$

Időben változó (nem stacionárius) $\mu_z = \mu_z(k)$ középérték esetén az időben egymástól távol eső és az időfüggés miatt amplitúdóban eltérő $\mu_z(k)$ értékek megnehezítik a képzett átlag kiértékelhetőségét, akármelyik időpillanatban is szeretnénk a középértéket becsülni, az átlag torzított lesz:

$$b(L) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mu_z(L - N + 1 + k) - \mu_z(L) \neq 0. \quad (5.11)$$

Nem stacionárius középérték esetében tehát az átlagolás veszít az alkalmazhatóságából. Egy áthidaló megoldásként a mozgó átlagolást szokás alkalmazni. A mozgó átlagolás megtartja az átlagolás egyszerű alakját és megvalósíthatóságát, lerövidíti

azonban a megfigyelési időintervallumot, amivel a középérték régebbi értékeit figyelmen kívül hagyja és a torzítást csökkenti. Az elmondottakból érthető, hogy a mozgó átlagolást lassan változó középérték esetében érdemes csak alkalmazni. A mozgó átlagolásról az átlagolás típusaival foglalkozó 5.1.2. pontban lesz szó bővebben.

5. Az előző megjegyzésben foglaltak természetesen érvényesek folytonos esetben is, amikor $\mu_z = \text{const}$ esetén :

$$b = E\{\hat{\mu}_z\} - \mu_z = E\left\{\frac{1}{T} \int_0^T z(t) dt\right\} - \mu_z = \frac{1}{T} \int_0^T \mu_z dt - \mu_z = 0, \quad (5.12)$$

ill. időben változó $\mu_z = \mu_z(t)$ középérték esetén :

$$b(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \mu_z(t - T + \tau) d\tau - \mu_z(t) \neq 0. \quad (5.13)$$

Az átlagolás statisztikai tulajdonságainak vizsgálatánál továbbiakban feltételezzük μ_z középérték konstans voltát. Ezzel olyan, a gyakorlatban széleskörűen alkalmazható esetekre szorítkozunk, amelyeknél az átlagolás egyszerű módon kiértékelhető mérési eredményt szolgáltat.

A következőkben, az átlagolás típusainak áttekintése után, megvizsgáljuk az átlagolás jelátviteli és statisztikai tulajdonságait. Az utóbbinál a priori statisztikai feltételezésként kiemeljük a zajvektor egy-egy igen fontos speciális esetét.

5.1.2. Az átlagolás típusai

Az átlagolás típusainál az (5.1.1.) szakaszban bevezetett általános egyenletes átlagolással kapcsolatos, ill. a belőle származtatott, elterjedten használt átlagolási formulákat tekintjük át. Az átlagolás különböző típusaihoz olyan formulák tartoznak, amelyek bár formájukban eltérőek, hatásukban minden vonatkozásban az (5.1) képlettel azonosak (pl. rekurzív átlagolás). Más esetet jelentenek az (5.1) formula módosításával nyert átlagolási típusok, amik egy meghatározott mérési cél (mozgó, exponenciális átlagolás), ill. az egyszerűbb megvalósíthatóság érdekében (kettes hatványaival súlyozott rekurzív átlagolás) az előző ideális átlagolástól valamilyen módon eltérnek.

Ideális átlagolás

Az átlagolás a folytonos és a diszkrét időtartományban a következő formulával írható fel :

$$\hat{\mu}_z = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z(k), \quad \hat{\mu}_z = \frac{1}{T} \int_0^T z(t) dt. \quad (5.14)$$

Ezen összefüggéseknél az átlagolás, ahogy arról az előbbi pontban szó is volt, egy speciális mérési feladat, a megfigyelés középértékének becslésére szolgál. Alkalmazásának lehetősége ennél természetesen jóval általánosabb, hiszen az átlagolás argumentumában $z(k)$, ill. $z(t)$ helyett annak tetszőleges függvénye is szerepelhet (l. 5.1.1. pont).

Az összefüggésekből közvetlenül megállapítható, hogy :

- az átlagolás lineáris operáció, továbbá az iménti alak
- nemrekurzív jellegű.

Megjegyzés: A nemrekurzív jelleg kizárja az átlagolás valós idejű alkalmazását. Az átlagképzés elvégzéséhez ki kell várni az összes megfigyelés begyűjtését és gondoskodni az egyes megfigyelések egyidejű eltárolásáról. Ez kétségtől idő- és memória-igényes adatfeldolgozási forma és mint olyan korlátozottan alkalmazható a gyakorlatban. A problémák áthidalását a rekurzív átlagolás biztosítja.

Rekurzív átlagolás

A rekurzív, vagy futó átlagolás a diszkrét idejű (5.1) átlagolási eljárás egyszerű algebrai átalakításával származtatható :

$$\hat{\mu}_z(k) = \hat{\mu}_z(k-1) + \frac{1}{k} [z(k-1) - \hat{\mu}_z(k-1)] \quad (5.15)$$

$$\hat{\mu}_z(0) = 0 \quad k = 1, 2, \dots$$

ill.

$$\hat{\mu}_z(k) = \frac{k-1}{k} \hat{\mu}_z(k-1) + \frac{1}{k} z(k-1). \quad (5.16)$$

A rekurzív átlagolás előnyei a következők :

— az algoritmus közvetlenül kielégíti az on-line valós idejű (real-time) jellegű adatfeldolgozás követelményeit ;

— minden új megfigyelés után előállítja az aktuális átlagolásszámhoz tartozó mérési eredményt.

Az algoritmus hátránya, hogy a két megfigyelés közötti időben egy meglehetősen komplikált aritmetikai művelet, a k -val való osztás elvégzésére van szükség, ami az on-line feldolgozás sebességét korlátozza. Ennek a problémának csökkentésére egy közelítő átlagolási algoritmust érdemes alkalmazni, ami k helyett 2 megfelelő egész hatványaival végzi el az osztást.

Közelítő rekurzív átlagolás

$$\hat{\mu}_z(k) = \hat{\mu}_z(k-1) + \frac{1}{2^{M(k)}} [z(k-1) - \hat{\mu}_z(k-1)], \quad (5.17)$$

$$\hat{\mu}_z(0) = 0 \quad k = 1, 2, \dots$$

ahol az $M(k)$ egész értékű függvény kielégíti a

$$2^{M(k)} \leq k < 2^{M(k)+1}$$

egyenlőtlenséget.

A megoldás előnye, hogy a szokásos aritmetikáknál a 2 egész hatványával való osztás egyszerű léptetéssel megvalósítható és így módon az átlagolás sebessége már nem az átlagképzés időigényességétől, hanem inkább az adatszerzés (A/D átalakítás) sebességétől függ. A megoldás hátránya, hogy az iménti közelítő algoritmus növeli a becslés varianciáját (l. 5.1.5. pont), ami az $M(k)$ függvény módosításával azonban javítható.

Független mintavételi értékeket feltételezve és elhanyagolva a véges szóhosszúság miatti problémákat, kedvezőbb eredményre jutunk, ha az algoritmus az:

$$1,5 \cdot 2^{M(k)-1} < k \leq 1,5 \cdot 2^{M(k)} \quad k=1, 2, \dots \quad (5.18)$$

összefüggés szerinti.

Térjünk most át az (5.1), ill. (5.14) átlagolás olyan módosításaira, melyek egy meghatározott mérési cél érdekében változtatják meg az átlagolás alaptulajdonságait.

Mozgó átlagolás

Az (5.14) képletekkel értelmezett átlagolás (ill. annak rekurzív formája) kiterjedt a megfigyelési időintervallum egészére, a megfigyelések azonos súllyal épülnek a középérték becslésébe. Ha a középérték időben (lassan) változó, az (5.14) átlagolás használata, ahogy ezt előbb láttuk, torzított eredményekhez vezet. A régi megfigyelések a középérték aktuális értékére nézve információt nem hordoznak, mégis az új megfigyelésekkel azonos súllyal szerepelnek az átlag képzésénél.

A probléma (részben) elkerülhető, a torzítás csökkenthető a régi megfigyelések figyelmen kívül hagyásával, a megfigyelési időintervallum mintegy „levágásával”. A mozgó átlagolást definiáló összefüggések tehát:

$$\hat{\mu}_z(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=k-N+1}^k z(j), \quad \hat{\mu}_z(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t z(\tau) d\tau \quad (5.19)$$

$$\hat{\mu}_z(k) = \sum_{j=-\infty}^k z(j)w(k-j), \quad w(j) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{ha } 0 \leq j < N, \\ 0 & \text{máshol,} \end{cases} \quad (5.20)$$

$$\hat{\mu}_z(t) = \int_{-\infty}^t z(\tau)w(t-\tau) d\tau, \quad w(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{ha } 0 \leq \tau \leq T, \\ 0 & \text{máshol.} \end{cases} \quad (5.21)$$

Mozgó átlagolásnál egy egyenletes ablakot csúsztatunk végig a folytonos vagy diszkrét időtengely mentén, és egy adott k indexhez vagy t időpillanathoz tartozó átlagértékeket a megelőző N , ill. T hosszúságú szakasz átlagolásával nyerjük (l. 5.1. ábra).

Az (5.15), ill. (5.16) rekurzív alak mintájára felírhatjuk a mozgó átlagolás rekurzív alakját:

$$\hat{\mu}_z(k) = \hat{\mu}_z(k-1) + \frac{1}{N} [z(k) - z(k-N)]. \quad (5.22)$$

A régi megfigyelések súlyának csökkentését az átlagképzésben a mozgó átlagoláson kívül az ún. exponenciális vagy felejtő átlagolás is szolgálja.

Exponenciális átlagolás

Az exponenciális átlagolás nem szűkíti le a megfigyelés időintervallumát, azonban a régi megfigyeléseket egyre csökkenő súllyal veszi figyelembe (fokozatosan „elfelejti” azok értékét).

Az exponenciális átlagolás képlete :

$$\hat{\mu}_z(k) = \sum_{j=-\infty}^k z(j)w(k-j), \quad w(j) = \begin{cases} \frac{1}{Q} \left(\frac{Q-1}{Q} \right)^j & 0 \leq j, \\ 0 & \text{máshol,} \end{cases} \quad (5.23)$$

$$\hat{\mu}_z(t) = \int_{-\infty}^t z(\tau)w(t-\tau) d\tau, \quad w(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{k} e^{-\tau/k} & 0 \leq \tau, \\ 0 & \text{máshol,} \end{cases} \quad (5.24)$$

ahol Q az átlagolás felejtési időállandója.

Az exponenciális átlagolás felírható rekurzív alakban is :

$$\hat{\mu}_z(k) = \hat{\mu}_z(k-1) + \frac{1}{Q} [z(k) - \hat{\mu}_z(k-1)], \quad (5.25)$$

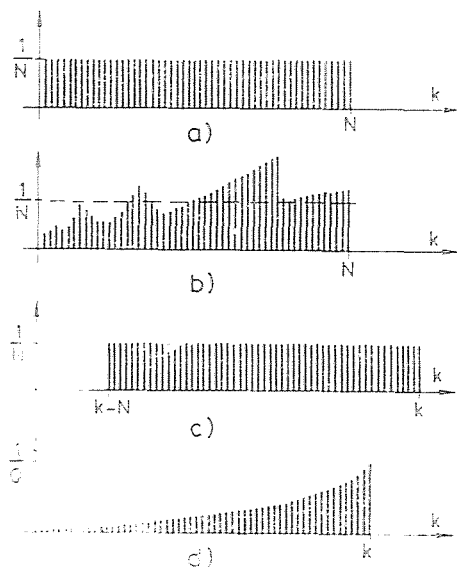
ill.

$$\hat{\mu}_z(k) = \frac{Q-1}{Q} \hat{\mu}_z(k-1) + \frac{1}{Q} z(k). \quad (5.26)$$

Az (5.16) rekurzív alakkal ellentétben a régi átlag rögzített, 1-nél kisebb arányban épül bele az új átlagba, így módon a régi megfigyelések exponenciálisan csökkenő súllyal szólnak bele az új átlag képzésébe.

5.1.3. Az átlagolás jelátviteli jellemzői

Ebben a pontban az átlagolást a lineáris, dinamikus rendszerek leíró függvényeivel jellemezni fogjuk. Könnyen belátható, hogy a felsorolt átlagolási típusok mindegyike lineáris operáció, azonban nem mindegyike fogható fel lineáris, dinamikus, időinvariáns rendszernek.



5.1. ábra. Az átlagolás ablakfüggvényei

a) átlagolás; b) közelítő átlagolás; c) mozgó átlagolás; d) exponenciális átlagolás

Az 5.1. ábrán az egyes átlagolástípusok által képviselt és a megfigyelési intervallumon értelmezett ablakokat látjuk.

Mindegyik átlagolástípus lineáris ugyan a megfigyelésekre nézve, az *a)* és *b)* esetként feltüntetett közönséges és közelítő átlagolás azonban nem időinvariáns (mivel szakaszosan állítja elő a középérték becslését és az egyes szakaszokhoz tartozó ablakfüggvény eltérő amplitúdómenettel rendelkezik) és így nem írható le sem súlyfüggvénnyel, sem frekvencia karakterisztikával.

A mozgó és exponenciális átlagolás (5.20), (5.21), (5.23), (5.24) összefüggéseiből látni lehet viszont, hogy ezen átlagolástípusok:

— lineáris, dinamikus, időinvariáns rendszereknek tekinthetők $w(k)$, ill. $w(t)$ súlyfüggvénnyel;

— mindkét átlagolás a mérési eredményt ennek megfelelően nem szakaszosan, hanem folyamatosan szolgáltatja.

Mindezek alapján a mozgó és exponenciális átlagolásnak meghatározható a frekvenciaátviteli karakterisztikája.

Mozgó átlagolás — frekvenciaátviteli karakterisztika

Diszkrét esetben az átviteli függvényt az (5.20) súlyfüggvény $\mathcal{Q}$ transzformálásával nyerjük:

$$H(z) = \mathcal{Q}\{w(k)\} = \frac{1}{N} (1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(N-1)}) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}, \quad (5.27)$$

amiből a frekvenciaátviteli karakterisztika

$$|H(e^{j\omega T})| = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin(N\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)} \right|. \quad (5.28)$$

A diszkrét idejű mozgó átlagolás frekvenciaátviteli karakterisztikáját az 5.2. ábra szemlélteti.

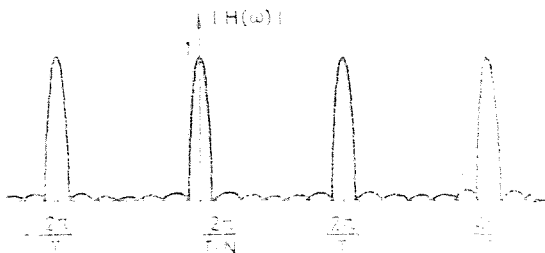
Folytonos esetben az átlagoló átviteli függvénye a súlyfüggvény *Laplace-* (ill. *Fourier-*) transzformáltja:

$$H(s) = \mathcal{L}\{w(t)\} = \frac{1}{sT} (1 - e^{-sT}). \quad (5.29)$$

ill.

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{w(t)\} = e^{-j\omega \frac{T}{2}} \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \quad (5.30)$$

és



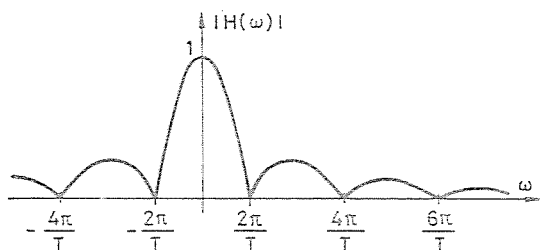
5.2. ábra. A mozgó átlagolás frekvenciaátviteli karakterisztikája, diszkrét eset

$$|H(\omega)| = \left| \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right|. \quad (5.31)$$

A frekvenciaátviteli karakterisztika menete az 5.3. ábrán látható.

A frekvenciaátviteli karakterisztikából a mozgó átlagolás két további érdekes tulajdonsága fedhető fel.

1. Ha az átlagolási idő, vagy az átlagolásszám növekszik, az átlagoló egyre jobban elnyomja a nem nulla frekvenciás komponenseket, azaz mintegy kiszűri az idő-invariáns átlagértéket.



5.3. ábra. A mozgó átlagolás frekvenciaátviteli karakterisztikája, folytonos eset

2. Az átlagoló elnyomja az $\omega = \frac{2\pi k}{T}$ (folytonos esetben) és $\omega = \frac{2\pi k}{T \cdot N}$ (diszkrét esetben) frekvenciákat. Ez a tulajdonság eredményesen alkalmazható periodikus zavarjelek elnyomására, amennyiben biztosítjuk az átlagolási idő és a periodikus idő kapcsolatát.

Exponenciális átlagolás — frekvenciaátviteli karakterisztika

Diszkrét esetben az átviteli karakterisztika legegyszerűbben az (5.26) rekurzív alakból származtatható:

$$\mathcal{Q}\{\hat{\mu}_z\} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{Q} \right) z \right] = \frac{1}{Q} \mathcal{Q}\{z_k\}, \quad (5.32)$$

amiből:

$$H(z) = \frac{1}{Q} \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{Q} \right) z} \quad (5.33)$$

és:

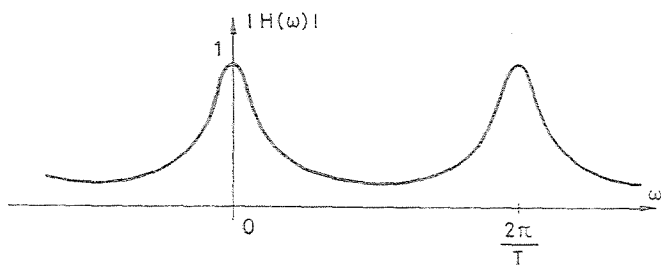
$$|H(e^{j\omega T})| = \frac{1}{Q} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{Q} \right)^2 - 2 \left(1 - \frac{1}{Q} \right) \cos \omega T}}. \quad (5.34)$$

A diszkrét exponenciális átlagolás frekvenciaátvitelét az 5.4. ábra szemlélteti.

Folytonos esetben a frekvenciaátviteli karakterisztika az (5.24) alak alapján számítható:

$$H(s) = \mathcal{L}\{w(t)\} = \frac{1}{1 + sK}, \quad (5.35)$$

ill.



5.4. ábra. Az exponenciális átlagolás frekvenciaátviteli karakterisztikája, diszkrét eset

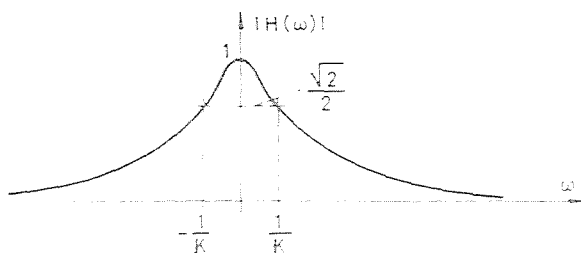
$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 K^2}}. \quad (5.36)$$

A frekvenciaátviteli karakterisztikát folytonos eset számára az 5.5. ábra szemlélteti.

Az exponenciális átlagolás fontosabb jelátviteli tulajdonságai a következők:

1. Az exponenciális átlagoló frekvencia átvitele az egész frekvenciatartományban 0-nál nagyobb, így nem rendelkezik a mozgó átlagolás ismert tulajdonságaival.

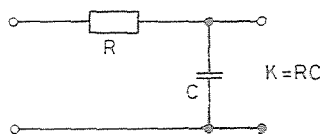
2. A K , ill. Q időállandó növelésével az átlagoló egyre jobban elnyomja a zérustól különböző frekvenciákat, kiszűrve a jelből az idővariáns komponensét. A -3 dB átvitelhez tartozó határfrekvencia $\omega = \frac{1}{K}$, ill. $\omega = \frac{1}{T} \arccos \left(1 - \frac{1}{2Q(Q-1)} \right)$.



5.5. ábra. Az exponenciális átlagolás frekvenciaátviteli karakterisztikája, folytonos eset

3. Az (5.35), (5.36) összefüggések alapján könnyen megállapítható, hogy a folytonos exponenciális átlagoló egy első fokú aluláteresztő szűrő (egy időállandóval rendelkező rendszer), amely egyszerű módon megvalósítható pl. egy R — C impedanciaosztó segítségével (l. 5.6. ábra).

A következőkben az átlagolás statisztikai tulajdonságait vizsgáljuk a középérték becslésénél mint mérési feladatnál. Ennek során elemezzük a becslés torzítását, varianciáját és optimalitását.



5.6. ábra. A folytonos exponenciális átlagolás megvalósítása

5.1.4. Az átlagolás torzítási tulajdonságai

Első lépésként az ideális átlagolási algoritmusok torzítását vizsgáljuk, amik tehát visszavezethetők az (5.1)

$$\hat{\mu}_z = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k$$

alakra, függetlenül a felírás formájától (rekurzív átlagolás, mozgó átlagolás).

Az ideális átlagolás torzítása

Az átlagolással létrehozott becslés a vizsgált jelmodellnél:

$$\hat{\mu}_z = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [\mu_z + n(k)]. \quad (5.37)$$

A becslés feltételes várható értéke a 3. fejezet alapján:

$$E\{\hat{\mu}_z \mid \mu_z\} = E_n \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [\mu_z + n(k)] \mid \mu_z \right\} = \mu_z, \quad (5.38)$$

mivel az 5.1.1. pont szerint n a megfigyelések középértékétől vett eltéréseket leíró zajvektor, azaz

$$E_n\{n(k)\} \equiv 0.$$

Megállapíthatjuk tehát, hogy ha a középérték időben állandó (l. 5.1.1. pont) az ideális átlagolással végzett középértékbecslés feltételesen, és így feltétel nélkül is torzítatlan.

Részletesebben:

— Az átlagolás torzítatlan becslést eredményez abban az esetben is, ha a μ_z nem konstans skalármennyiség, hanem egy valószínűségi változó (feltéve természetesen, hogy a zajvektor várható értéke továbbra is zérus). A jelmodellben szereplő μ_z ilyenkor a μ_z valószínűségi változó egy konkrét értéke (realizációja). A becslendő középérték így véletlen módon változhat, ez az átlagolás hatékonyságát nem befolyásolja, egy átlagolási sorozatnál azonban μ_z konstans, annak eredetétől függetlenül.

— A torzítatlanság a levezetés értelmében független az n zajvektor második és magasabbrendű momentumaitól (szórásától, korrelációjától stb.), feltéve, hogy az első momentuma, azaz várható értéke zérus.

Megjegyzések:

1. Jegyezzük meg ismételten, hogy a középértékbecslés torzítatlanságát elsősorban a középérték stacionaritása (időbeli állandósága) biztosítja, az előbbi megállapítások csak e feltétel mellett érvényesek.

2. Az a tény, hogy az átlagolás mind feltételesen, mind feltétel nélkül torzítatlan becslő az a priori ismeretektől függetlenül (a zajvektor statisztikai tulajdonságaitól függetlenül), igen kedvező tulajdonság a mérési adatok feldolgozása és az eredmény értékelhetősége szempontjából.

3. Folytonos ideális átlagolás szintén torzítatlan becslő, mivel:

$$E\{\hat{\mu}_z | \mu_z\} = E_n \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T [\mu_z + n(t)] dt | \mu_z \right\} = \mu_z \quad (5.39)$$

és a feltételes, valamint feltétel nélküli torzítás zérus.

A nem ideális átlagolások torzítása

Az 5.1.2. pontban tárgyalt átlagolástípusok közül nem ideális, tehát az (5.1) alakkal nem rendelkező, a közelítő rekurzív és az exponenciális átlagolás. Ha az ideálistól eltérő átlagolást a következő formulával:

$$\hat{\mu}_z = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k z(k) \quad (5.40)$$

jellemezzük, akkor a torzítatlanság szükséges feltétele a:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n = 1. \quad (5.41)$$

Az ideális és nem ideális átlagolás összehasonlítása céljából a nem ideális átlagolást ugyanolyan jelmodell mellett vizsgáljuk, amikor tehát az ideális átlagolás torzítatlan.

Közelítő rekurzív átlagolás

A közelítő rekurzív átlagolás (5.17) szerinti alakja mind feltételesen, mind feltétel nélkül torzítatlan.

Teljes indukcióval bebizonyítható, hogy minden olyan rekurzív formula torzítatlan átlagoláshoz vezet, amelyben az új megfigyelés súlyozása pozitív, 1-nél kisebb szám és a rekurzív formula az első mérési adatnál redukálódik a

$$\hat{\mu}_z(1) = z(0) \text{ ill. } z(1) \quad (5.42)$$

alakra.

Exponenciális átlagolás

Az exponenciális átlagolás rekurzív formulája nem teljesíti az (5.42) feltételt, mivel:

$$\hat{\mu}_z(1) = \frac{1}{Q} z(1), \quad Q > 1. \quad (5.43)$$

Várható tehát, hogy az exponenciális átlagolás torzított lesz és nem fog teljesülni az (5.41) feltétel sem. A torzítás mértéke k -adik időpillanatban (5.41) szerint:

$$b(k) = \mu_z \left(\sum_{j=0}^k \alpha_j - 1 \right) = \mu_z \left[\frac{1}{Q} \sum_{j=0}^k \left(\frac{Q-1}{Q} \right)^j - 1 \right] = - \left(1 - \frac{1}{Q} \right)^{k+1} \mu_z. \quad (5.44)$$

A torzítás összefüggéséből látható, hogy növekvő k diszkrét időindex esetében a torzítás csökken, az exponenciális átlagolás tehát mint becslés aszimptotikusan torzítatlan.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b(k) = 0. \quad (5.45)$$

Folytonos esetben a torzítás az (5.24) összefüggésből származtatható az előbb vázolt levezetéshez hasonlóan. A torzítás mértéke:

$$b(t) = \mu_z \left[\int_0^t w(\tau) d\tau - 1 \right] = \mu_z \left[\int_0^t \frac{1}{k} e^{-\tau/k} d\tau - 1 \right] = -e^{-t/k} \mu_z. \quad (5.46)$$

A diszkrét esethez hasonlóan a torzítás az átlagolási idővel fordított arányban csökken, így a becslés szintén aszimptotikusan torzítatlan.

Megjegyzések:

1. A torzítás oka az ideális és a nem ideális átlagolás jelátvitel közötti különbség volt, olyan jelmodell (mérési körülmények) mellett, amely ideális esetben biztosítja a becslés torzítatlanságát. Minden, az elfogadott jelmodelltől való eltérés forrása lehet egy járulékos torzításnak, amit a konkrét vizsgálatnál figyelembe kell venni.

2. A torzítás (5.44) és (5.46) kifejezései és így módon a diszkrét és folytonos idejű exponenciális átlagolás időállandói kapcsolatba hozhatók egymással:

$$b(k) = - \left(1 - \frac{1}{Q} \right)^{k+1} \mu_z = - \left[\left(1 - \frac{1}{Q} \right)^{Q^{(k+1)/Q}} \right] \mu_z \cong - e^{-(k+1)/Q} \mu_z. \quad (5.47)$$

3. Az exponenciális átlagolás aszimptotikusan torzítatlan. Ez esetben a kis torzítás feltétele a megfelelően hosszú átlagolási idő. Ha a torzítás maximális mértékét előírjuk, az (5.44) és (5.46) összefüggésekből számítható a szükséges minimális átlagolási idő:

$$\frac{b(k)}{\mu_z} 100\% \cong \varepsilon\%, \quad k+1 \cong Q \ln \frac{100}{\varepsilon} \gg Q, \quad (5.48)$$

ill.

$$t \cong K \ln \frac{100}{\varepsilon} \gg K. \quad (5.49)$$

5.1.5. Az átlagolás varianciája

A torzításhoz hasonlóan az átlagolás varianciáját külön vizsgáljuk az ideális és nem ideális átlagolásoknál.

Az ideális átlagolás vizsgálatánál figyelembe vesszük, hogy a feltételezett jelmodell (mérési körülmények) csak a középérték időbeli állandóságát rögzíti, a zajvektor statisztikai tulajdonságaira semmilyen kikötést nem tesz. Ilyen módon lehetőség nyílik az ideális átlagolás varianciájának vizsgálatára különböző tulajdonságú zajvektorok mellett, melyek közül külön tárgyaljuk a korrelálatlan (fehér) és korrelált zaj esetét.

Az ideális átlagolás varianciája

Az ideális átlagoláshoz (az 5.1.4. pontban leírtakhoz hasonlóan) a közönséges, a mozgó átlagolás és azok rekurzív formája tartozik.

A variancia meghatározását célszerű az ebből a szempontból legáltalánosabb esetre, a mozgó átlagolásra elvégezni. Itt ugyanis az eredmény egy valószínűségi sorozat (diszkrét esetben), aminek a diszkrét kovarianciafüggvénye is lényeges statisztikai jellemző. Mint tudjuk, a mozgó átlagolás egy lineáris rendszernek tekinthető az (5.20), ill. (5.21) súlyfüggvénnyel.

A 2.5.1. szakasz alapján a lineáris rendszerek kimenőjelei kovarianciafüggvényének meghatározásához a bemenőjel kovarianciafüggvényének és a súlyfüggvénynek az ismeretére van szükség.

$$C_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(j) = C_{zz}(j) * w(j) * w(-j). \quad (5.50)$$

Felhasználva a mozgó átlagolás (5.20) súlyfüggvényét azt kapjuk, hogy:

$$C_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(j) = \frac{1}{N} \sum_{i=-(N-1)}^{N-1} C_{zz}(j-i) \left(1 - \frac{|i|}{N}\right), \quad (5.51)$$

ill.:

$$C_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(j) = \frac{1}{N} \left[C_{zz}(0) \left(1 - \frac{|j|}{N}\right) + \sum_{\substack{l=j-N+1 \\ l \neq 0}}^{j+N-1} C_{zz}(l) \left(1 - \frac{|l-j|}{N}\right) \right] \quad j \leq N-1. \quad (5.52)$$

Megjegyzések:

1. A közönséges (nem mozgó) átlagolás varianciája N átlagolásszám mellett az (5.52) összefüggés $C_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(0)$ esete. Pontosabban:

$$\text{var} \{\hat{\mu}_z\} = C_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(0) = \frac{1}{N} \left[C_{zz}(0) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} C_{zz}(k) \left(1 - \frac{k}{N}\right) \right]. \quad (5.53)$$

2. Ahhoz, hogy meghatározzuk az átlagolással nyert becslés varianciáját, ill. mozgó átlagolásnál a kovarianciafüggvényét, a priori ismeretként [az (5.4) jelmodellel összhangban] az n zajvektor (másként a megfigyelések vagy mérési adatok) kovarianciafüggvényének ismeretére van szükség [$C_{zz}(k) = C_{nn}(k)$].

Lényeges megjegyezni, hogy az eredmény most is független lesz attól, hogy μ_z valószínűségi változó vagy sem, továbbá ugyancsak független az n zajvektor magasabb rendű statisztikai jellemzőitől (pl. valószínűség-sűrűségfüggvényétől).

3. Lényeges hangsúlyozni, hogy amennyiben nem közvetlenül a megfigyelések, hanem azok valamilyen függvényének a középértékét becsüljük átlagolással (1. 5.1.1. pont), akkor nem a z vektor, hanem az m vektornál értelmezett n_m zajvektor kovarianciafüggvényének ismerete szükséges. Ennek meghatározása a z vektor statisztikai jellemzőinek alapján a nemlineáris függvénykapcsolat következtében általában meglehetősen nehéz, és szükségessé válik a magasabb rendű statisztikai jellemzőinek, általában a teljes valószínűségi leírásának a priori ismerete. [Négyzetes középérték mérésénél, amikor $m(k) = z^2(k)$ az m vektor kovarianciafüggvénye:

$$E\{m(k)m(k+r)\} = E\{z(k)z(k)z(k+r)z(k+r)\}$$

az eredeti megfigyelési vektor negyedrendű statisztikai leírását igényli.]

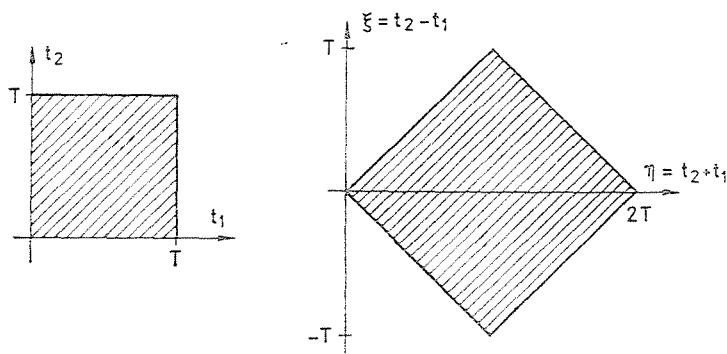
4. Folytonos idejű esetben a kovarianciafüggvény alakja hasonlít az (5.51) diszkrét idejű függvényre. Az (5.21) és (5.50) alapján:

$$C_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t) = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T C_{zz}(t+t_2-t_1) dt_1 dt_2. \quad (5.54)$$

A $\xi = t_2 - t_1$ és $\eta = t_2 + t_1$ változó helyettesítéssel:

$$C_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t) = \frac{1}{T^2} \int \int C_{zz}(t+\xi) d\xi d\eta, \quad (5.55)$$

ahol az A integrálási tartomány az 5.7. ábrán látható.



5.7. ábra. Az integrálási tartományok transzformációja

Mivel az integrandus nem függ η -tól az (5.55) integrál átírható következő alakba:

$$C_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t) = \frac{1}{T^2} \int_{-T}^T (T - |\xi|) C_{zz}(t + \xi) d\xi. \quad (5.56)$$

Az (5.56) képletet átrendezve megkapjuk az (5.51) diszkrét formula folytonos idejű megfelelőjét:

$$C_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t) = \frac{1}{T} \int_{-T}^T C_{zz}(t + \xi) \left(1 - \frac{|\xi|}{T}\right) d\xi. \quad (5.57)$$

Az ideális folytonos átlagolás varianciája ennek alapján:

$$\text{var } \{\hat{\mu}_z\} = C_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(0) = \frac{1}{T} \int_{-T}^T C_{zz}(\xi) \left(1 - \frac{|\xi|}{T}\right) d\xi. \quad (5.58)$$

Korrelálatlan megfigyelések esete

Vizsgáljuk most meg, hogyan alakul a becsült középérték varianciája abban a konkrét esetben, amikor az egymásután végzett megfigyelések korrelálatlanok. A zajvektor kovarianciájáról feltételezzük tehát, hogy:

$$C_{nn}(k) = \begin{cases} \sigma_n^2 & \text{ha } k=0, \\ 0 & \text{más esetben.} \end{cases} \quad (5.59)$$

Korrelálatlan megfigyeléseknél a mozgó átlagolás kovarianciafüggvénye az (5.52) alapján:

$$C_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(j) = \begin{cases} \frac{\sigma_n^2}{N} \left(1 - \frac{|j|}{N}\right) & j = -(N-1), \dots, 0, \dots, N-1, \\ 0 & \text{más esetben.} \end{cases} \quad (5.60)$$

Az ideális átlagolás varianciája pedig az (5.53) összefüggés alapján :

$$\text{var } \{\hat{\mu}_z\} = C_{\hat{\mu}} \hat{\mu}(0) = \frac{\sigma_n^2}{N}. \quad (5.61)$$

Megjegyzések :

1. Folytonos idejű esetben a korrelálatlan (fehér) zaj egy, valóságban nem előforduló idealizált kép. Ilyen zaj esetében a középérték pontos becsléséhez szükséges megfigyelési időintervallum hossza tetszőlegesen rövid lehet

$$\frac{1}{T_\varepsilon} \int_0^{T_\varepsilon} z(t) dt = \mu_z, \quad \text{minden } T_\varepsilon > 0\text{-ra.}$$

Az (5.60), (5.61) összefüggésekhez hasonló eredményre jutunk, ha a zaj kovarianciafüggvényéről feltételezzük annak impulzusszerű alakját. Ilyenkor az (5.57) integrál alól kiemelhetjük a zaj kovarianciája mellett szereplő súlyfüggvényt, amiből a teljesítménysűrűség-függvény felhasználásával [l. (2.11)]:

$$C_{\hat{\mu}} \hat{\mu}(t) = \frac{1}{T} \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) \int_{-T}^T C_{zz}(\tau) d\tau = \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) \frac{S_{nn}(0)}{T}, \quad (5.62)$$

ill.

$$\text{var } \{\hat{\mu}_z\} = C_{\hat{\mu}} \hat{\mu}(0) = \frac{S_{nn}(0)}{T}. \quad (5.63)$$

2. Az (5.61), (5.63) összefüggésekből látható, hogy független (ill. folytonos idejű esetben közel független) megfigyelések esetén az ideális átlagolás az átlagolásszámmal, ill. az átlagolási idővel fordított arányban csökkenti a középértékbecslés varianciáját a megfigyelések varianciájához képest.

3. Az (5.61), (5.63) összefüggésekből látható az is, hogy a lehető legjobb becslés érdekében nagy N , ill. T értékekre kell törekedni. A mozgó átlagolásnál azonban az átlagolás hossza nem lehet túlságosan nagy, mert az alkalmazások többségénél mozgó átlagolással időben lassan változó középértéket becslünk és a növekvő átlagolási idővel arányosan növekedne a becslés torzítása.

Korrelált megfigyelések esete

A sokféleképpen korrelált megfigyelések közül azt az igen általános esetet vizsgáljuk, amikor a zajvektor korreláció-, ill. kovarianciafüggvénye exponenciálisan lecsengő:

$$C_{nn}(k) = \sigma_n^2 \varrho^k, \quad 0 < \varrho < 1. \quad (5.64)$$

Ilyenkor a diszkrét idejű mozgó átlagolás kovarianciafüggvénye :

$$C_{\hat{\mu}} \hat{\mu}(k) = \frac{\sigma_n^2}{N} \left[\left(1 - \frac{|k|}{N}\right) + \sum_{l=j-N+1}^{j+N-1} \varrho^l \left(1 - \frac{|l-j|}{N}\right) \right] \quad (5.65)$$

és az ideális átlagolás kovarianciája :

$$\text{var } \{\hat{\mu}_z\} = C_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(0) = \frac{\sigma_n^2}{N} \left[1 + 2 \sum_{l=1}^{N-1} \rho^l \left(1 - \frac{l}{N} \right) \right]. \quad (5.66)$$

Folytonos esetben az exponenciális lecsengésű folytonos kovarianciafüggvény :

$$C_{nn}(t) = \sigma_n^2 \exp[-\alpha|t|], \quad \alpha > 0. \quad (5.67)$$

A folytonos $C_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t)$ kovariancia levezetésénél az (5.57), ill. (5.58) összefüggésekre támaszkodunk :

$$\begin{aligned} \text{var } \{\hat{\mu}_z\} &= C_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(0) = \frac{1}{T} \int_{-T}^T \sigma_n^2 e^{-\alpha|\xi|} \left(1 - \frac{|\xi|}{T} \right) d\xi = \\ &= \sigma_n^2 \frac{2}{\alpha T} \left(1 - \frac{1}{\alpha T} (1 - e^{-\alpha T}) \right). \end{aligned} \quad (5.68)$$

Megjegyzések :

1. Összehasonlítva a független és a korrelált megfigyelések esetét megállapíthatjuk, hogy az utóbbi esetben az átlagolás varianciacsökkentő tulajdonsága romlott (a korrelált megfigyelések ugyanolyan átlagolásszám, ill. átlagolási idő mellett lényegesen nagyobb varianciát eredményeznek). A variancianövekedés mértéke diszkrét esetben közvetlenül leolvasható az (5.61) és (5.66) összefüggésekből.

Folytonos esetben a variancia növekedésére az (5.68) összefüggés alapján következtethetünk, figyelembe véve, hogy az (5.67) formulában szereplő α paraméter kapcsolatban áll a megfigyelések függetlenségével. Minél nagyobb az α , annál keskenyebb a megfigyelések kovarianciafüggvénye és függetlenebbek a mérési adatok. Az eredményvariancia (5.68) képletéből látható, hogy ez, egy rögzített T átlagolási idő mellett, az α paraméter monoton csökkenő függvénye, az átlagolás által előidézett varianciacsökkenés tehát annál nagyobb, minél függetlenebbek a mérési adatok.

2. Bár a korrelált megfigyelésekkel képzett átlag varianciája az N időindexszel, ill. T idővel csökken, nem így alakul a korrelálatlan esethez viszonyított eltérése. A mérési adatok korreláltsága egy állandó relatív variancianövekedést eredményez, melynek mértéke (viszonylag kis korreláció esetében is) könnyen elérheti a 100%-os eltérést is.

A nemideális átlagolás varianciája

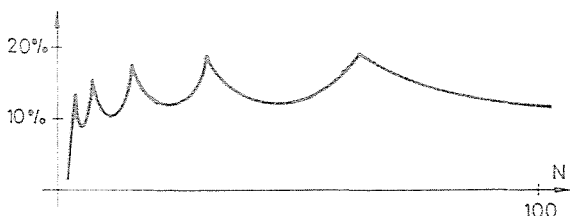
A nemideális átlagolás együtthatói (súlyfüggvénye) eltérnek az egyenletes ideális átlagolástól (l. 5.1. ábra). A következő pontban látni fogjuk, hogy független megfigyelések esetén az ideális átlagolás egyben optimális is, azaz leghatékonyabb a variancia csökkentésében. Ennek megfelelően minden, a súlyfüggvényben tapasztalt, az egyenletestől való eltérés tehát rontani fogja az átlagolás varianciacsökkentő tulajdonságait.

Ha a megfigyelések nem függetlenek, a becslés tulajdonságai tovább fognak romlani, a kovariancia (pontosabban az ideális esethez viszonyított relatív variancianövekedés) nőni fog. A két hatás — a nemideális átlagolás és a nemideális mérési körülmények — egymástól független, módon növelik az eredmény varianciáját.

A következőkben a vizsgálatot csak független megfigyelések esetére végezzük el, hogy megmutassuk a nem ideális feldolgozás tulajdonságait az ideális esetéhez képest.

Közelítő rekurzív átlagolás

A közelítő rekurzív átlagolás varianciája zárt alakban nehezen fejezhető ki, viszonylag könnyű azonban e varianciának számítógépes analízise. Az 5.8. ábrán láthatjuk az (5.17) közelítő átlagolás által behozott, az ideális átlagolás esetére viszonyított százalékos variancianövekményt.



5.8. ábra. A közelítő rekurzív átlagolás relatív variancianövekménye

Megjegyzés: A közelítő rekurzív átlagolás az ideálistól erősen eltérő súlyfüggvénye ellenére (l. 5.1. ábra) igen jó becslőnek bizonyul.

Az 5.1.4. pontban láttuk, hogy torzítatlan becslő, az 5.8. ábrán feltüntetett relatív variancianövekedés pedig nem több mint 20%, ami a közelítő rekurzív átlagolás könnyű megvalósíthatósága mellett, elenyésző hátrány.

Exponenciális átlagolás

Diszkrét és folytonos esetben az átlagolás varianciáját az (5.23), (5.24), (5.50), alapján határozzuk meg:

$$\begin{aligned} \text{var} \{\hat{u}_z(N)\} &= \text{var} \left\{ \frac{1}{Q} \sum_{j=0}^N \left(\frac{Q-1}{Q} \right)^{N-j} z(j) \right\} = \\ &= \sigma_{nn}^2 \sum_{j=0}^N |w(j)|^2 = \frac{\sigma_{nn}^2}{Q^2} \sum_{j=0}^N \left(\frac{Q-1}{Q} \right)^{2j} = \\ &= \frac{\sigma_{nn}^2}{Q^2} \frac{1 - \left(\frac{Q-1}{Q} \right)^{2(N+1)}}{1 - \left(\frac{Q-1}{Q} \right)^2} = \frac{\sigma_{nn}^2}{2Q-1} \left(1 - \left(\frac{Q-1}{Q} \right)^{2(N+1)} \right), \end{aligned} \quad (5.69)$$

ill. az előbb alkalmazott közelítéssel [l. (5.47)]:

$$\text{var} \{\hat{u}_z(N)\} \cong \frac{\sigma_{nn}^2}{2Q-1} \left(1 - e^{-\frac{2(N+1)}{Q}} \right). \quad (5.70)$$

Elég hosszú átlagolási idő elteltével ($N \gg Q$) az átlag varianciája beáll a:

$$\text{var} \{\hat{u}_z(\infty)\} = \frac{\sigma_{nn}^2}{2Q-1} \quad (5.71)$$

értékre.

Folytonos esetben az átlag varianciája T átlagolási idő eltelte után :

$$\text{var} \{\hat{\mu}_z(T)\} = \int_0^T \int_0^T \frac{1}{K} e^{-\frac{t}{K}} \frac{1}{K} e^{-\frac{\tau}{K}} C(t-\tau) dt d\tau. \quad (5.72)$$

Felhasználva az 5.7. ábrán látható integrálási tartomány- és változócsereét azt kapjuk, hogy :

$$\begin{aligned} \text{var} \{\hat{\mu}_z(T)\} &= \frac{1}{2K^2} \int_{-T}^T \int_{|\xi|}^{2T-|\xi|} e^{-\frac{\eta}{K}} C(\xi) d\xi d\eta = \\ &= \int_{-T}^T e^{-\frac{|\xi|}{K}} \frac{1 - e^{-\frac{2}{K}(T-|\xi|)}}{2K} C(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Az állandósult eset innen $T \rightarrow \infty$ határátmenettel nyerhető

$$\text{var} \{\hat{\mu}_z(\infty)\} = \frac{1}{2K} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|\xi|}{K}} C_{nn}(\xi) d\xi. \quad (5.74)$$

Közel korrelálatlan mérési adatok esetében, amikor a $C_{nn}(\xi)$ kovarianciafüggvény keskeny, megkapjuk az (5.71) összefüggés folytonos idejű megfelelőjét :

$$\text{var} \{\hat{\mu}_z(\infty)\} \cong \frac{1}{2K} \int_{-\infty}^{\infty} C_{nn}(\xi) d\xi = \frac{S_{nn}(0)}{2K}. \quad (5.75)$$

Megjegyzés: Az exponenciális átlagolás varianciája az átlagolás idejével nem csökken, állandó szinten marad. Az elérhető varianciacsökkenés arányos az átlagolás időállandójának kétszeresével, így módon az exponenciális átlagolás ekvivalens (csak variancia szempontjából) egy $N=2Q-1$, ill. $T=2K$ idejű mozgó átlagolással.

5.1.6. Az átlagolás mint optimális becslő

Szó volt már arról, hogy bizonyos statisztikai tulajdonságokkal rendelkező megfigyelések esetében az (ideális) átlagolás egyben optimális becslő, azaz az $1/N$ arányú varianciacsökkenés egyben az elérhető maximális varianciacsökkenés is.

Az átlagolás becslési tulajdonságai szorosan kapcsolódnak az alkalmazott jelmodellhez, csak a kettőnek együttes vizsgálata vezethet eredményre.

1. Az általános, az 5.1.1. pont feltételeit kielégítő esetben a mérés egy tetszőleges (nem szükségképpen normális) eloszlású véletlen változó középvértékének meghatározására irányult. Ilyen modell mellett a származtatott optimális becslők többnyire nemlineárisak (l. 3.2.2. pont). Egy szuboptimális becslésre törekedve ki lehet kötni ugyan a becslés linearitását, de rendszerint ez sem eredményezi az ideális átlagolásra jellemző egyenletes súlyozást.

Az átlagolás tehát általában nemoptimális becslés, ami azt jelenti, hogy nemlineáris feldolgozással a variancia nagyobb mértékben csökkenthető.

2. Gauss-eloszlású független megfigyelések esetében az ideális átlagolás egyben maximum likelihood, ill. Gauss—Markov-féle becslő (l. 3.4.2. pont, 3.6. és 3.7. példa).

Jegyezzük itt meg, hogy ez esetben a feltételes várható érték, tehát a minimális varianciájú és a maximum a posteriori becslők szintén lineáris függvényei a megfigyeléseknek, a becslő képletébe beépülnek azonban a megfigyeléseken kívül a becsülendő középérték statisztikai paraméterei. Normális eloszlás esetén a likelihood-egyenlet a megfigyelésekben lineáris [l. (3.146)], a megfigyelések függetlensége és azonos szórása pedig biztosítja a lineáris becslő egyenletes súlyozó együtthatóit. A 3.4.1. pontban elmondottaknak értelmében a likelihood-egyenlet megoldásából adódó maximum likelihood becslés hatásos [l. (3.126)], az ideális átlagolás tehát a feltételesen (és feltétel nélkül) torzítatlan, Gauss-eloszlású megfigyeléseket feldolgozó becslések körében a lehető legjobb.

5.2. Konfidenciintervallumok

A mérési eredmények konfidenciintervallumának meghatározása a gyakorlati méréstechnika jól ismert feladata. A következőkben összefoglaljuk a konfidenciaszámítás alapfogalmait és bemutatunk néhány gyakran használt számítási módszert.

5.2.1. A konfidenciintervallum fogalma

A 3. fejezetben foglalkoztunk az optimális becslések származtatásával. A zajos környezetből nyert mérési adatok feldolgozásához olyan eljárást (becslőt) kellett létrehozni, amely a zajjal fedett megfigyelések és a (részleges) a priori ismeret alapján állította elő a mérendő paraméterek bizonyos szempontból legjobb közelítését (becslését).

A véges adatszám és feldolgozási idő, továbbá a részleges a priori ismeret miatt a becslő eljárás nem volt képes teljes mértékben kiküszöbölni a mérési adatokból azok sztochasztikus jellegét. A becslő szintén egy valószínűségi változó maradt, bár a megfigyelt adatokhoz képest lényegesen kevésbé véletlen jellegű.

A becslés mint mérési eredmény és a paraméter tényleges értéke között tehát mindig jelen van egy véletlen jellegű eltérés, melynek nagyságát valahogyan jellemezni kell, mivel ez a mérési eredmény értelmezése szempontjából feltétlenül szükséges.

A becslési eljárás kimenetén megjelenő konkrét „pontoszerű” becslés sok esetben kevés információt hordoz a felhasználó számára. A felhasználó szempontjából sokszor célszerűbb lenne, hogyha a becslött értékkel együtt megkapná a keresett paraméter más, a megfigyelésekkel összhangban levő és szintén jó (bár nem szükségképpen legjobb) közelítéseit. A becslés ilyen megadása illeszkedik a mérési eredmények szokványos:

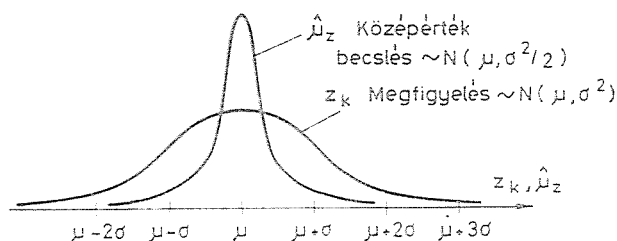
$$\boxed{\text{mérési eredmény} = \text{mért érték} \pm \text{hiba}}$$

megadási módjához.

Tekintsük példának az 5.1. szakaszban tárgyalt középértékbecslést.

Az N számú, független $N(\mu, \sigma^2)$ normális eloszlású, ismert σ szórást $\{z_1, z_2, \dots, z_N\}$ megfigyelések $\hat{\mu}_z$ számtani átlaga [l. (5.1)] a tényleges μ középérték torzítatlan becslése. Bizonyítható, hogy $\hat{\mu}_z$ egy $N(\mu, \sigma^2/N)$ normális eloszlású véletlen változó. A $\hat{\mu}_z$ eloszlása tehát azonos az egyes megfigyelések eloszlásával, a szórással azonos.

ban eredeti értékének $1/\sqrt{N}$ -ére csökkent. A megfigyelések N számának növelésével $\hat{\mu}_z$ statisztikai ingadozása a tényleges μ középérték körül elvileg minden határon túl csökkenthető, konkrét mérési körülmények között azonban az N mindig véges és így $\hat{\mu}_z$ -ben mindig jelen van egy véletlen jellegű komponens. A két eloszlást $N=4$ esetére az 5.9. ábra szemlélteti.



5.9. ábra. A σ és a $\sigma/\sqrt{N}$ szórású eloszlások sűrűségfüggvényei

Látható, hogy a becslési eljárás eredményezte optimális $\hat{\mu}_z$ becslés, és a tényleges μ középérték közötti $(\hat{\mu}_z - \mu)$ eltérés egyes esetekben igen nagy lehet (hiszen a normális eloszlás az egész számegyenesen értelmezve van), bár meg kell jegyezni, hogy kis valószínűséggel. Tekintsük pl. a következő konkrét, független megfigyeléssorozatot:

$$z_1 = -1,4 \quad z_2 = 0,1 \quad z_3 = 0,7 \quad z_4 = -1,0, \quad (5.76)$$

ahol mindegyik megfigyelés $N(\mu, 1)$ eloszlású.

Az (5.1) becslés eredménye:

$$\hat{\mu}_z = -0,4 \quad \text{és} \quad \sigma_{\hat{\mu}_z}^2 = 0,25. \quad (5.77)$$

Próbáljuk elemezni, hogy mi mondható a középérték valódi nagyságára nézve akkor, ha a megfigyelési sorozat hosszúságát tetszőlegesen növelni nem tudjuk.

Vegyük figyelembe, hogy a $\hat{\mu}_z$ eloszlásának alapján a $|\hat{\mu}_z - \mu| \leq 2\sigma_{\hat{\mu}_z}$ esemény valószínűsége közel 0,95:

$$P(|\hat{\mu}_z - \mu| \leq 2\sigma_{\hat{\mu}_z}) \cong 0,95, \quad (5.78)$$

ill.:

$$P(\mu - 2\sigma_{\hat{\mu}_z} \leq \hat{\mu}_z \leq \mu + 2\sigma_{\hat{\mu}_z}) \cong 0,95.$$

Tekintettel arra, hogy a $\hat{\mu}_z$ becslés egy véletlen változó, a $\hat{\mu}_z$ becslésből képzett:

$$k_1 = \hat{\mu}_z - 2\sigma_{\hat{\mu}_z} \quad \text{és} \quad k_2 = \hat{\mu}_z + 2\sigma_{\hat{\mu}_z} \quad (5.79)$$

szintén véletlen változók és az (5.78) esemény ekvivalens a következő összetett eseménnyel:

$$P(\{k_1 \leq \mu\} \cap \{\mu \leq k_2\}) \cong 0,95. \quad (5.80)$$

A kapott eredmény értelmezésénél mindenképpen hangsúlyozni kell, hogy az (5.80) valószínűségi állítás nem a μ paraméter ismeretlen értékére vonatkozik, mivel a μ -re vonatkozó (akár sztochasztikus, akár determinisztikus konstans, akár egy determinisztikusan változó függvény) a priori ismeretet a tárgyalásnál nem használunk. Egy konkrét megfigyelési sorozatnál μ egy konstans, melynek értéke azonban más megfigyelési sorozatoknál változhat.

Az (5.80) állításban szereplő k_1 és k_2 véletlen mennyiségek segítségével képezhető egy véletlen helyzetű, rögzített hosszúságú:

$$(k_1, k_2) = (\hat{\mu}_z - 2\sigma_{\hat{\mu}_z}, \hat{\mu}_z + 2\sigma_{\hat{\mu}_z}) = \left(\hat{\mu}_z - 2 \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \hat{\mu}_z + 2 \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right) \quad (5.81)$$

intervallum, amely az előre specifikált 0,95 valószínűséggel lefedi a μ paraméter valódi értékét, azaz:

$$P\left(\mu \in \left(\hat{\mu}_z - 2 \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \hat{\mu}_z + 2 \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)\right) \cong 0,95. \quad (5.82)$$

Az (5.77) konkrét értékeket behelyettesítve:

$$P(\mu \in (-1,4; 0,6)) \cong 0,95. \quad (5.83)$$

Az (5.81) típusú intervallumokat konfidenciaintervallumoknak nevezzük. A továbbiakban a konfidenciaintervallumok pontos értelmezésével és származtatásával foglalkozunk.

Megjegyzések:

1. Ismételten hangsúlyozzuk, hogy az (5.81) konfidenciaintervallummal kapcsolatos (5.82) valószínűségi állítás nem a μ paraméter értékére vonatkozik (mivel nem biztos, hogy az véletlen változó). Az (5.82) valószínűség nem annak a valószínűsége, hogy egy véletlen jellegű μ két, méréssel rögzített k_1 és k_2 határ közé esik, hanem annak, hogy a mérési eredmények alapján származtatott k_1 és k_2 véletlen változóval definiált, rögzített hosszúságú, de véletlen helyzetű (k_1, k_2) intervallum tartalmazza az ismeretlen (akár determinisztikus, akár sztochasztikus) eredetű, de különben az adott megfigyelési sorozat alatt konstans értékű μ paramétert.

2. A becslés e megadási módja már nem csak az optimális becslés értékéről tájékoztat minket, hanem elfogadásának „kockázatáról” is.

3. Előfordulhat, hogy az (5.81) konfidenciaintervallum túl nagy, szükségessé válna annak leszűkítése. Az (5.81) konfidenciaintervallum mérete függ a megbízhatóság megkövetelt szintjétől (a példában 0,95 valószínűség, ill. 95% megbízhatóság) és a $\hat{\mu}_z$ becslés szórásától.

Kisebb megbízhatósági szint mellett (pl. 68%, ill. 0,68 valószínűség) a konfidenciaintervallum $(\hat{\mu}_z - \sigma_{\hat{\mu}_z}, \hat{\mu}_z + \sigma_{\hat{\mu}_z}) = (-0,9; 0,1)$ fele az előbbinek. Rögzített megbízhatósági szint mellett a konfidenciaintervallum nagysága az N megfigyelésszámmal csökkenthető, hiszen a $\hat{\mu}_z$ becslés szórása növekvő N esetében csökken. Így pl. ahhoz, hogy a 95% megbízhatósági szint mellett az (5.81) konfidenciaintervallum hossza felére csökkenjen 4-szer annyi megfigyelést kell feldolgozni.

4. Az (5.81) konfidenciaintervallum szimmetrikus a mért $\hat{\mu}_z$ becslésre nézve. Ez a választás nem szükségszerű, hiszen az (5.80) valószínűségi állítás betartása mellett több (de most már nem szimmetrikus) (k_1, k_2) intervallum képzelhető el úgy, hogy:

$$P_1 + P_2 = 0,95, \quad (5.84)$$

ahol:

$$P_1 = P(k_1 \leq \mu) \quad \text{és} \quad P_2 = P(k_2 \geq \mu).$$

Feltéve, hogy a $\hat{\mu}_z$ becslés valószínűségi eloszlására ezt lehetővé teszi, természetes a $P_1 = P_2$ választás, mivel ilyenkor a mérési eredmény megadásánál a negatív és pozitív hiba valószínűsége azonos.

5. Egy konfidenciaintervallum megadása semmilyen információt nem ad arra vonatkozólag, hogy a valódi μ középérték hol helyezkedik el az intervallum belsőjében.

6. A konfidenciaintervallum hossza az esetek többségében számítható az a priori ismeret alapján a mérés elvégzése előtt, tehát rögzített. Az intervallum helyzete azonban véletlen jellegű, függ a mindenkor konkrét mérési eredménytől, $\hat{\mu}_z$ -től.

Adjuk meg ezek után a konfidenciaintervallumok pontos meghatározását.

Konfidenciaintervallumok

Tegyük fel, hogy a mérés, a mérési adatok feldolgozása egy ismeretlen a -paraméter meghatározására (becslésére) irányul. Az a -paraméter $\hat{a}$ becslését N számú $\{z_1, z_2, \dots, z_N\}$ megfigyelés alapján határozzuk meg.

A probléma a következő: a kiszámított $\hat{a}$ becslés birtokában, milyen nem triviális és a mérési eredmény megadása szempontjából lényeges valószínűségi állítást fogalmazhatunk meg az ismeretlen a -paraméterre nézve?

Ha az a -paraméternek a mért megfigyelési sorozatban rejlő konkrét értéke egy véletlen esemény eredménye — azaz az a -paraméter egy véletlen változó, melynek a priori eloszlásfüggvénye adva van —, a Bayes-tétel értelmében képezhetjük az a -paraméternek az $\hat{a}$ becslésben feltételes a posteriori $f_{a|\hat{a}}(a|\hat{a})$ sűrűségfüggvényét, és ennek alapján a szükséges valószínűségi állításokat.

A gyakorlati esetek nagy részében az előbb vázolt feltételek nem teljesülnek. Az a -paraméter sokszor egy ismeretlen konstans, melyről lehetetlen eldönteni, hogy egy véletlen változó, ill. determinisztikus függvény konkrét értéke.

Sőt, ha a rendelkezésre álló a priori ismeret utalna is az a -paraméter véletlen jellegére, hiányzik általában az a -paraméter a priori sűrűségfüggvényének pontos ismerete és így módon lehetetlenné válik az a posteriori sűrűségfüggvény származtatása és az azon alapuló valószínűségi állítások kihozása. Igen hasznos lenne tehát egy olyan módszer megteremtése, amely az a -paraméterre vonatkozó valószínűségi állítások kihozásánál nélkülözné az a -paraméter véletlen, ill. determinisztikus eredetére vonatkozó hipotéziseket.

Adott tehát az N számú $\{z_1, z_2, \dots, z_N\}$ megfigyelés, amely alapján képezzük az a -paraméter becslését. Az $\hat{a} = \hat{a}(z_1, z_2, \dots, z_N)$ becslés $f_{\hat{a}|a}(\hat{a}|a)$ feltételes sűrűségfüggvénye szintén ismert és rögzítsünk azontúl egy $1 - \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < 1$) értékű valószínűséget.

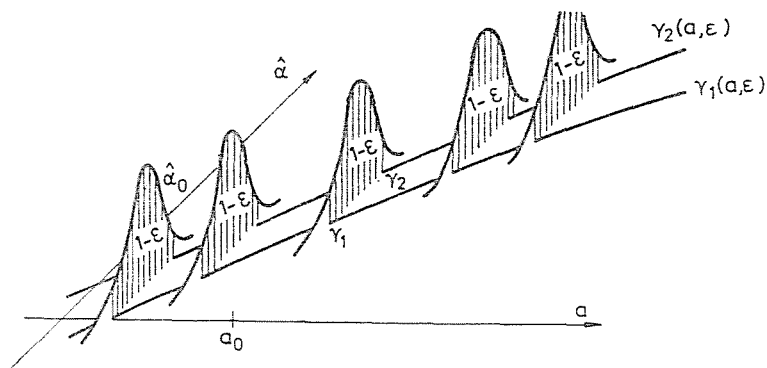
Az $(a, \hat{a})$ koordinátákban ábrázolva az $f_{\hat{a}|a}$ feltételes sűrűségfüggvény egy felületet képez, melynek az $\hat{a}$ tengellyel párhuzamos metszései megadják az a -paraméter konkrét értékeihez tartozó $f_{\hat{a}|a}$ feltételes sűrűségfüggvényeket (l. 5.10. ábra).

Ha az $\hat{a}$ becslés feltételes sűrűségfüggvénye folytonos és értelmezve van az a -paraméter minden értékeire (természetesen egy, a mérés fizikai körülményeiből adódó értéktartományon belül), akkor, egy előre rögzített $1 - \varepsilon$ valószínűség mellett, minden a -hoz megadható olyan γ_1 és γ_2 konstans, hogy:

$$\gamma_1 = \gamma_1(a, \varepsilon), \quad \gamma_2 = \gamma_2(a, \varepsilon),$$

és

$$P(\gamma_1 < \hat{a} < \gamma_2 | a) = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f_{\hat{a}|a}(\hat{a} | a) d\hat{a} = 1 - \varepsilon. \quad (5.85)$$



5.10. ábra. A konfidenciahatárok általános képe

A γ_1, γ_2 határok ilyen rögzítése nem egyértelmű, mivel a sűrűségfüggvény csontkításával figyelmen kívül hagyott valószínűségek aránya szabadon választható:

$$\int_{-\infty}^{\gamma_1} f_{\hat{a}|a}(\hat{a} | a) d\hat{a} = \varepsilon_1, \quad \int_{\gamma_2}^{\infty} f_{\hat{a}|a}(\hat{a} | a) d\hat{a} = \varepsilon_2, \quad (5.86)$$

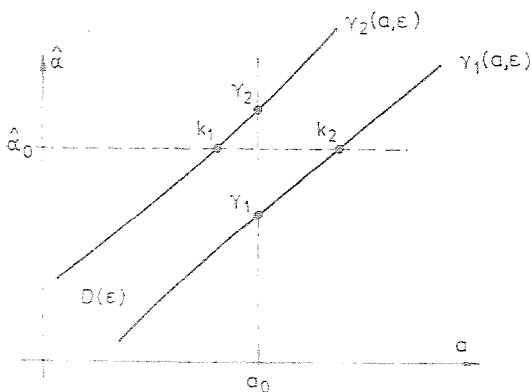
$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon.$$

Rögzített ε mellett γ_1 és γ_2 függvénye az a -paraméternek, az $(a, \hat{a})$ síkon tehát (a, γ_1) és (a, γ_2) pontpárok két görbét határoznak meg (l. 5.11. ábra).

Tegyük fel, hogy az a_0 -paraméter becslésénél (egy $z_1, \dots, z_N$ megfigyeléssorozat segítségével) egy konkrét $\hat{a}_0$ becslést kaptunk. Tegyük fel továbbá, hogy az $\hat{a}_0$ -hoz tartozó vízszintes vonal legfeljebb egy-egy helyen metszi az előbb értelmezett (a, γ_1) és (a, γ_2) görbákat. A k_1 és k_2 metszési pontok függvényei természetesen az $\hat{a}$ becslésnek és a rögzített ε valószínűségnek:

$$k_1 = k_1(\hat{a}, \varepsilon), \quad k_2 = k_2(\hat{a}, \varepsilon). \quad (5.87)$$

A k_1, k_2 metszési pontok véletlen változók, mivel függvényei a szintén véletlen változónak bizonyuló $\hat{a}$ becslésnek (γ_1 és γ_2 viszont determinisztikus függvények).



5.11. ábra. A konfidenciaintervallumok értelmezése

Az 5.11. ábrára támaszkodva tekintsük az alábbi három relációt :

$$(a, \hat{a}) \in D(\varepsilon), \quad (5.88)$$

$$\gamma_1(a, \varepsilon) < \hat{a} < \gamma_2(a, \varepsilon), \quad (5.89)$$

$$k_1(\hat{a}, \varepsilon) < a < k_2(\hat{a}, \varepsilon). \quad (5.90)$$

Mindhárom reláció ekvivalens [mindegyik azt fejezi ki, hogy az $(a, \hat{a})$ pont a $D(\varepsilon)$ tartományba esik], így :

$$P(k_1(\hat{a}, \varepsilon) < a < k_2(\hat{a}, \varepsilon) \mid a) = 1 - \varepsilon, \quad (5.91)$$

az a -paraméter tetszőleges értéke mellett.

Megjegyzés: Az (5.89) reláció jelentése az, hogy $\hat{a}$ véletlen változó $1 - \varepsilon$ valószínűséggel a γ_1, γ_2 konstanshatárok közé esik. Ezzel szemben az (5.90) azt jelenti, hogy $1 - \varepsilon$ valószínűséggel $k_1(\hat{a}, \varepsilon)$ véletlen változó a -nál kisebb, $k_2(\hat{a}, \varepsilon)$ véletlen változó pedig a -nál nagyobb, azaz a (k_1, k_2) intervallum $1 - \varepsilon$ valószínűséggel lefedi az a -paraméter ismeretlen értékét.

A (k_1, k_2) intervallumot az a -paraméterre vonatkozó, az $1 - \varepsilon$ konfidencia szint-hez (ill. $p = \varepsilon \cdot 100\%$ megbízhatósági szinthez) tartozó konfidenciaintervallumnak nevezzük. A k_1 és k_2 véletlen változók az ún. konfidenciahatárok.

A konfidenciaintervallumok módszerének alkalmazása a következőket jelenti. Először rögzítjük a megkívánt $1 - \varepsilon$ konfidencia szintet, ezek után elvégezzük a megfigyeléseket és azok segítségével meghatározzuk az a -paraméter $\hat{a}$ becslését. A becslés $\hat{a}$ értékére támaszkodva kiszámítjuk a hozzá tartozó k_1 és k_2 korlátokat, melyek alapján állítjuk, hogy a megfigyelési sorozatban rejlő ismeretlen a -paraméter a k_1 és k_2 határok között helyezkedik el. Állításunk az esetek $p\%$ -ában téves lesz, azoktól eltekintve igaz.

A gyakorlatban a $k_1 = k_2(\hat{a}, \varepsilon)$ és $k_2 = k_2(\hat{a}, \varepsilon)$ konfidenciahatárokat az $\hat{a}$ mérési eredménytől számított negatív és pozitív eltérés formájában szokás megadni, ahol speciális esetben :

$$k_1 = \hat{a} - u_1(\varepsilon), \quad k_2 = \hat{a} + u_2(\varepsilon), \quad (5.92)$$

II. általánosabb esetben :

$$k_1 = \hat{a} - u_1(\hat{a}, \varepsilon), \quad k_2 = \hat{a} + u_2(\hat{a}, \varepsilon). \quad (5.93)$$

Ilyenkor a mérési eredmény megadása az :

$$a = \hat{a} \begin{matrix} + u_2(\varepsilon) \\ - u_1(\varepsilon) \end{matrix}$$

$(1 - \varepsilon)$ konfidenciaszinttel megszokott alakban lehetséges.

Az $u_1(\varepsilon)$ és $u_2(\varepsilon)$ mennyiségek az ε valószínűségen túl függenek a rendelkezésre álló a priori ismerettől [l. pl. (5.81)]. Az (5.92) felbontás bizonyos matematikai feltételekhez van kötve, amelyekre, a tárgyalás tömörsége érdekében nem térünk ki.

Az $\hat{a}$ becslés konkrét értéke mellett, az a -paraméterhez tartozó konfidenciaintervallum nagysága függ az alkalmazott becslés típusától. A konfidenciaintervallumok annál rövidebbek, minél keskenyebb az 5.11. ábrán feltüntetett $D(\varepsilon)$ terület, ez viszont szorosan függ a becslés szórásától. Az a -paraméter becslésére használt különböző becslők tehát különböző szélességű konfidenciaintervallumokhoz vezetnek ugyanazon konfidenciaszint $(1 - \varepsilon)$ mellett. Nyilvánvaló, hogy a torzítatlan, közel normális eloszlású becslések közül, a legkeskenyebb $D(\varepsilon)$ területet az ún. mini-

mális varianciájú becslés eredményezi, e becsléstípus esetében tehát a számított konfidenciaintervallumok a többi becsléstípushoz viszonyítva lehető legrövidebbek.

Szó volt arról, hogy ha az a -paraméter egy véletlen változó, melynek a priori sűrűségfüggvénye adott, az „ a ” értékére vonatkozó valószínűségi állítást Bayes-tétel segítségével is nyerhetjük.

Legyen $f_a(a)$ az a -paraméter a priori sűrűségfüggvénye, legyen továbbá $f_{\hat{a}|a}(\hat{a} | a)$ az $\hat{a}$ becslés, a mérési körülmények alapján meghatározott feltételes sűrűségfüggvénye. Bayes-tétel értelmében:

$$f_{a|\hat{a}}(a | \hat{a}) = \frac{f_{\hat{a}|a}(\hat{a} | a)f_a(a)}{\int f_{\hat{a}|a}(\hat{a} | a)f_a(a) da}, \quad (5.94)$$

az a -paraméternek a posteriori sűrűségfüggvénye. Az (5.94) sűrűségfüggvény segítségével számítható annak az a posteriori valószínűsége, hogy „ a ” értéke a k_1, k_2 határok közé esik (feltéve, hogy a mérés eredménye $\hat{a}$):

$$P(k_1 < a < k_2 | \hat{a}) = \int_{k_1}^{k_2} f_{a|\hat{a}}(a | \hat{a}) da, \quad (5.95)$$

[jegyezzük meg, hogy a mérés elvégzése előtt az ugyanazon a k_1, k_2 határok közé esés valószínűsége az $f_a(a)$ sűrűségfüggvényből számítandó].

A konfidenciaintervallum szerkesztése véletlen jellegű a -paraméter esetén tehát a következő. Egy rögzített $1-\varepsilon$ konfidenciaszint mellett, minden $\hat{a}$ becslés számára megtalálható az a $k_1=k_1(\hat{a}, \varepsilon)$ és $k_2=k_2(\hat{a}, \varepsilon)$ konfidenciahatár, amire (5.95)-ből:

$$P(k_1 < a < k_2 | \hat{a}) = 1 - \varepsilon. \quad (5.96)$$

Az (5.96) (k_1, k_2) intervallum megfelel az 5.11. ábrán feltüntetett (k_1, k_2) intervallumnak, véletlen módon változó a -paraméter esetén tehát a két módszer ugyanarra az eredményre vezet.

Általános esetben a (k_1, k_2) konfidenciaintervallum (az $\hat{a}$ becsléstől való függés miatt) véletlen nagyságú és helyzetű. A véletlen a -paraméter konkrét értéke az esetek $(1-\varepsilon) \cdot 100\%$ -ban a k_1 és k_2 konfidenciahatárok által kifeszített intervallumba esik. A k_1 és k_2 konfidenciahatárok kiszámításánál általában szimmetrikusan elhelyezett határookra törekszünk:

$$P(a < k_1 | \hat{a}) = P(a > k_2 | \hat{a}) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Több, $a_1, a_2, \dots, a_k$ paraméter egyidejű becslése esetében a paraméterek, becslések és megfigyelések vektorokba foglalhatók össze. Az (5.88)—(5.90) relációk ilyenkor a többdimenziós paramétertér, ill. megfigyelési tér részhalmazain értelmezett relációk, amelyekből a konfidenciaintervallumok helyett többdimenziós konfidenciatartományokat kapunk.

5.2.2. Néhány gyakori becslés konfidenciaintervalluma

A következőkben bemutatjuk néhány gyakori becslési eljárásnál a konfidenciaintervallum származtatását. Mindegyik esetben elsősorban olyan statisztikai függvényt állítunk elő, amely függvénye a megfigyeléseknek (a becslés képletén keresztül) és a becslött paraméternek egyaránt. E statisztikai függvény eloszlása kötött alakú lesz

(sem a megfigyelésektől, sem a keresett paramétertől nem fog függeni). Az eloszlásból származó $1 - \varepsilon$ konfidenciaszint és a γ_1, γ_2 határok megfeleltetése az [5.5] irodalomban található táblázatok segítségével végezhető el. Miután egy adott konfidenciaszinthez a táblázatok segítségével megtaláltuk a megfelelő γ_1 és γ_2 határokat, felhasználva az (5.89) és (5.90) típusú relációk ekvivalenciáját, a megkapott γ_1, γ_2 határokat átírjuk a keresett (k_1, k_2) konfidenciaintervallummá.

Független, Gauss-eloszlású megfigyelések átlagának konfidenciaintervalluma

Legyen a $\{z_1, z_2, \dots, z_N\}$ megfigyeléssorozat N eleme egy $N(\mu, \sigma^2)$ eloszlású valószínűségi változó realizációi.

A normált :

$$z_\mu = \frac{\hat{\mu}_z - \mu}{\sigma} \sqrt{N} \quad (5.97)$$

véletlen változó $N(0, 1)$ (tehát μ -től független) normális eloszlással rendelkezik, ami lehetővé teszi a konfidenciaintervallum megszerkesztését.

Legyen a konfidenciaszint $1 - \varepsilon$, ekkor található olyan szimmetrikusan elhelyezkedő $u_{2, \varepsilon}$, ill. $u_{1, \varepsilon} = -u_{2, \varepsilon}$ érték, hogy :

$$P(\gamma_1 \leq z_\mu \leq \gamma_2) = 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_{2, \varepsilon}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - \varepsilon \quad (5.98)$$

Az ε és $u_{2, \varepsilon}$ egymásnak való megfeleltetése a normális eloszlás táblázatából (lásd [5.5]) kiolvasható.

Összevetve az (5.89) és (5.90) összefüggéseket, eredményül azt kapjuk, hogy az (5.89) összefüggésben szereplő valószínűségi esemény ekvivalens az ugyanúgy $1 - \varepsilon$ valószínűséggel bekövetkező :

$$\hat{\mu}_z - u_{2, \varepsilon} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \hat{\mu}_z + u_{2, \varepsilon} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (5.99)$$

eseménnyel, vagyis az

$$\left(\hat{\mu}_z - u_{2, \varepsilon} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \hat{\mu}_z + u_{2, \varepsilon} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right) \quad (5.100)$$

véletlen helyzetű intervallum $1 - \varepsilon$ valószínűséggel lefedi a μ középértéket, ez tehát a μ -re vonatkozó, $1 - \varepsilon$ konfidenciaszintű konfidenciaintervallum. Az (5.100) konfidenciaintervallum szerkesztése az 5.12. ábrán látható.

Megjegyzés: Ha a konfidenciaintervallum lefedi μ -t, akkor μ és $\hat{\mu}_z$ maximális abszolút eltérése legfeljebb a konfidenciaintervallum $u_{2, \varepsilon} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ félhossza, ami azonban nul-

lához tart, minden határon túl növekvő N megfigyelésszámmal. A mérési adatok feldolgozásánál előírhatjuk például, hogy rögzített $1 - \varepsilon$ konfidenciaszint mellett a konfidenciaintervallum félhossza legfeljebb δ legyen.

Ekkor az N megfigyelésszámmra be kell tartani a

$$\delta \geq u_{2, \varepsilon} \frac{\sigma}{\sqrt{N}},$$

avagy az

$$N \cong u_2^2 \cdot \frac{\sigma^2}{\delta^2} \quad (5.101)$$

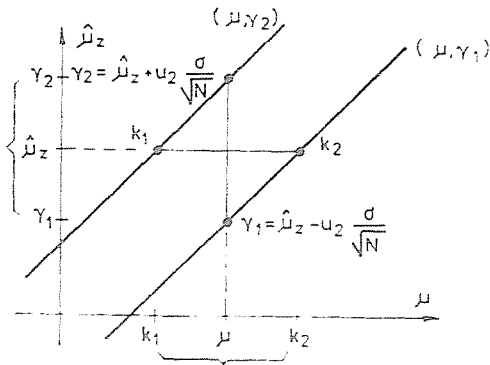
feltételt.

Független, Gauss-eloszlású megfigyelések varianciájának konfidenciaintervalluma

Az $N(\mu, \sigma^2)$ eloszlású véletlen változóból vett N független mintából (megfigyelésből) a következő módon becsülhetjük az ismeretlen σ^2 variancia nagyságát:

$$\hat{\sigma}^2 = s^{*2} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (z_k - \hat{\mu}_z)^2. \quad (5.102)$$

Az (5.102) összefüggésben szereplő $z_k - \hat{\mu}_z$ véletlen változók már nem függetlenek, a $\hat{\mu}_z$ -n keresztül kapcsolódnak egymáshoz. Próbáljuk meghatározni az s^{*2} tapasztalati szórásnégyzet eloszlás függvényét. Tudjuk (l. [5.5]), hogy N darab független, $N(0, 1)$ eloszlású véletlen változó négyzetösszege az ún. N szabadsági fokú χ_N^2 eloszlást követi.



5.12. ábra. A konfidenciaintervallum szerkesztése

Ahhoz, hogy meghatározzuk, hogy az s^{*2} szórással χ^2 eloszlása hány szabadsági fokkal rendelkezik, az (5.102) összeget független, $N(0, 1)$ eloszlású változók négyzetösszegére kell transzformálni. Ezt a célt szolgálja a következő gondolatmenet.

Az s^{*2} eloszlásfüggvényének kiszámításához vezessük be

$$y_i = z_i - \mu \sim N(0, \sigma^2) \quad (5.103)$$

normális eloszlású centralizált véletlen változókat. Ezzel a szórásnégyzet:

$$s^{*2} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N y_k^2 - \frac{N}{N-1} (\hat{\mu}_y)^2, \quad (5.104)$$

ahol:

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k.$$

Mivel a bevezetett y_i véletlen változók $N(0, \sigma^2)$ eloszlásúak és függetlenek, a belőlük képzett $y^T = [y_1, \dots, y_N]$ vektor egy alkalmasan megválasztott A ortogonális transz-

formációval átvihető azonos tulajdonságú véletlen változók $\mathbf{x}^T = [x_1, \dots, x_N]$ vektorába:

$$\mathbf{x} = A\mathbf{y}, \quad (5.105)$$

ill.:

$$x_k = \sum_{l=1}^N a_{kl} y_l.$$

Olyan mátrixot válasszunk meg a transzformáció elvégzéséhez, amelynek első sora azonos $\frac{1}{\sqrt{N}}$ nagyságú elemekből áll.

Ilyenkor:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N y_k = \sqrt{N} \hat{\mu}_y. \quad (5.106)$$

Továbbá a mátrix ortogonalitása miatt:

$$\sum_{k=1}^N y_k^2 = \sum_{k=1}^N x_k^2. \quad (5.107)$$

Ezzel a szórásnégyzet (5.102) kifejezése következőképpen alakul:

$$s^{*2} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N x_k^2 - \frac{1}{N-1} x_1^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=2}^N x_k^2 = \frac{\sigma^2}{N-1} \sum_{k=2}^N \frac{x_k^2}{\sigma^2} \quad (5.108)$$

A kapott eredményből a következőket állapíthatjuk meg:

1. Az (5.108) összefüggésben szereplő x_k/σ véletlen változók $N(0, 1)$ eloszlásúak és függetlenek, az előbbi megjegyzés értelmében tehát az $\frac{N-1}{\sigma^2} s^{*2}$ véletlen változó $(N-1)$ szabadsági fokú χ^2 -eloszlású.

2. Vegyük figyelembe, hogy az (5.103) alapján

$$\hat{\mu}_y = \hat{\mu}_x - \mu, \quad (5.109)$$

az (5.106) alapján pedig:

$$\hat{\mu}_x = \frac{x_1}{\sqrt{N}} + \mu. \quad (5.110)$$

Mivel $\hat{\mu}_x$ csak az x_1 , s^{*2} pedig csak az $x_2, x_3, \dots, x_N$ valószínűségi változók függvénye, továbbá a $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ függetlenek, ebből következik, hogy a normális eloszlású, véges számú megfigyelés alapján származtatott középérték- és varianciabecslés független valószínűségi változók.

Az (5.108) eredmény és a χ_{N-1}^2 eloszlás táblázatának (lásd [5.5]) felhasználásával a variancia konfidenciaintervalluma következőképpen szerkeszthető:

Az adott $1-\varepsilon$ konfidenciaszinthez keressük meg a táblázatban a megfelelő $\chi_{N-1, \varepsilon}^2$ és $\chi_{N-1, 1-\varepsilon}^2$ határokat úgy, hogy:

$$P(\chi_{N-1, 1-\varepsilon}^2 < \chi_{N-1}^2 < \chi_{N-1, \varepsilon}^2) = 1 - \varepsilon. \quad (5.111)$$

Mivel az (5.108) szerint:

$$\chi_{N-1}^2 = \frac{(N-1)s^{*2}}{\sigma^2} \quad (5.112)$$

ebből:

$$P\left(\chi_{N-1, 1-\varepsilon}^2 < \frac{(N-1)s^{*2}}{\sigma^2} < \chi_{N-1, \varepsilon}^2\right) = 1 - \varepsilon, \quad (5.113)$$

ill. a vele ekvivalens állítás:

$$P\left(\frac{s^{*2}(N-1)}{\chi_{N-1, 1-\varepsilon}^2} > \sigma^2 > \frac{s^{*2}(N-1)}{\chi_{N-1, \varepsilon}^2}\right) = 1 - \varepsilon. \quad (5.114)$$

A konfidenciaintervallum tehát:

$$\left(\frac{s^{*2}(N-1)}{\chi_{N-1, \varepsilon}^2}, \frac{s^{*2}(N-1)}{\chi_{N-1, 1-\varepsilon}^2}\right). \quad (5.115)$$

Független, Gauss-eloszlású, ismeretlen varianciájú megfigyelések középértékének konfidenciaintervalluma

A középértékbecslésnél igen gyakori az az eset, amikor a megfigyelések varianciája is ismeretlen. Az (5.97) helyett ilyenkor tekintjük a:

$$t = \frac{\hat{\mu}_z - \mu}{s^*} \sqrt{N} \quad (5.116)$$

statisztikai függvényt, amely abban különbözik (5.97)-től, hogy a valódi, de ismeretlen σ szórás helyett, annak becslése, az s^* empirikus szórás áll.

A t változó a következő módon írható át egy könnyebben értelmezhető alakba:

$$t = \frac{\hat{\mu}_z - \mu}{s^*} \sqrt{N} = \frac{\frac{\hat{\mu}_z - \mu}{\sigma} \sqrt{N}}{\frac{\sqrt{N-1}}{\sigma} s^*} \sqrt{N-1} = t_{N-1}. \quad (5.117)$$

A számlálóban egy $N(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változó $\sqrt{N-1}$ -szerese szerepel, a nevezőben álló változó pedig egy χ_{N-1}^2 valószínűségi változó négyzetgyöke.

$$t_{N-1} \sim \frac{N(0, 1)}{\sqrt{\frac{\chi_{N-1}^2}{N-1}}}. \quad (5.118)$$

Az így értelmezett valószínűségi változó ún. *Student-t*-eloszlású (lásd [5.5]).

Az előbb tárgyalt példákhoz hasonlóan írjuk fel az $1 - \varepsilon$ konfidenciaszinthez tartozó valószínűségi állítást:

$$P(t_{N-1, 1-\varepsilon} < t_{N-1} < t_{N-1, \varepsilon}) = 1 - \varepsilon. \quad (5.119)$$

A $t_{N-1, \varepsilon}$ és $t_{N-1, 1-\varepsilon}$ határok a t_{N-1} *Student*-eloszlás táblázatából határozhatók meg (lásd [5.5]). Helyettesítsük az (5.118)-at az (5.119) egyenletbe és írjuk át

az utóbbit egy konfidenciaintervallummá. A konfidenciaintervallum származtatásánál használjuk fel a *Student*-féle eloszlás szimmetriáját, miszerint:

$$t_{N-1, 1-\varepsilon} = -t_{N-1, \varepsilon}. \quad (5.120)$$

A konfidenciaintervallumhoz vezető valószínűségi állítás tehát:

$$P\left(-t_{N-1, \varepsilon} < \frac{\hat{\mu}_z - \mu}{s^*} \sqrt{N} < t_{N-1, \varepsilon}\right) = 1 - \varepsilon, \quad (5.121)$$

ill.

$$P\left(\hat{\mu}_z - t_{N-1, \varepsilon} \frac{s^*}{\sqrt{N}} < \mu < \hat{\mu}_z + t_{N-1, \varepsilon} \frac{s^*}{\sqrt{N}}\right) = 1 - \varepsilon$$

és végül a konfidenciaintervallum:

$$\left(\hat{\mu}_z - t_{N-1, \varepsilon} \frac{s^*}{\sqrt{N}}, \hat{\mu}_z + t_{N-1, \varepsilon} \frac{s^*}{\sqrt{N}}\right). \quad (5.122)$$

Megjegyzések:

1. Az ismeretlen szórás mellett való középértékbecslés konfidenciaintervalluma az eddigi esetekkel ellentétben nem csak véletlen helyzetű (középpontja a $\hat{\mu}_z$ empirikus átlag), de véletlen hosszúságú is (az intervallum hosszúsága függ a mindenkor s^* empirikus szórás nagyságától). Könnyen belátható azonban, hogy a növekvő N megfigyelésszám mellett az azonos konfidenciaszinthez tartozó konfidenciaintervallumok hossza sztochasztikusan nullához tart:

$$t_{N-1, \varepsilon} \frac{s^*}{\sqrt{N}} \rightarrow 0. \quad (5.123)$$

2. Mivel az ismeretlen μ paraméter két becsléstől függ ($\hat{\mu}_z$ -től és s^* -től) és a rendelkezésre álló megfigyelésekből az ismeretlen σ^2 paraméter is becsülhető, a probléma többdimenziósnak tekinthető, ahol a paramétertér az $a^T = [\mu, \sigma^2]$ pontokból tevődik össze, (a megfigyelési tér természetesen N -dimenziós). A konkrét mérési eredményt jelentő $(\hat{\mu}_z, s^{*2})$ értékpárhoz a paramétertérben egy egész konfidenciatartomány tartozik. Az előbb levezetett (5.115) és (5.122) konfidenciaintervallumok e konfidenciatartomány kötött μ -höz, ill. σ^2 -hez tartozó vetületei.

5.3. Statisztikai próbák

A statisztikai próbák a matematikai statisztika és így a mérési adatok statisztikai kiértékelésének fontos eszközei.

Statisztikai próbákhoz a mérési adatok feldolgozásánál akkor folyamodunk, ha a mérendő jellemző értékére, ill. a mérési adatok természetére vonatkozóan bizonyos a priori ismerettel rendelkezünk és ezt az ismeretet ellenőrizni szeretnénk a konkrét értékek kiszámítása nélkül. Ilyen tipikus mérési problémák pl. a mérendő jelek *Gauss*-jellegének tesztelése, ill. a mérési adatsorozat statisztikai momentumainak rögzítése.

A statisztikai próbák elméleti szempontból a 3. fejezetben tárgyalt döntésmélet speciális esetének tekinthetők, bár a kettő közötti kapcsolat, főleg eltérő nyelvezetük miatt, igen elmosódott.

5.3.1. Parametrikus próbák

Véletlen kísérleteknél igen gyakori eset, hogy az adatfeldolgozás célja a véletlen mechanizmust leíró eloszlásfüggvény valamilyen mértékű rögzítése. A feltételezett eloszlásfüggvényt (hipotézist) össze kell vetni a mért megfigyeléssorozat (statisztikai minta) statisztikai tulajdonságaival, az eltérésüket egy mérőszámmal kifejezni és azt egy küszöbértékkel összehasonlítani. Az összehasonlítás eredményétől függően a hipotézist elvetjük, ill. elfogadjuk.

A hipotézis tehát a statisztikai minta háttérben húzódó valószínűségi eloszlásra (ill. eloszlásokra) vonatkozó állítás, vagy ilyen állítások összessége. Attól függően, hogy a hipotetikus eloszlásra vonatkozó a priori ismeret milyen módon épül bele a hipotézisbe, *parametrikus* és *nemparametrikus* próbákról beszélünk. A parametrikus próbáknál feltesszük, hogy a kérdéses eloszlás valamelyik parametrizált eloszláscsaládhoz tartozik, így a hipotézis a paraméterek (statisztikai momentumok) konkrét értékeire vonatkozó állítás. Nem parametrikus próbáknál az eloszlás parametrikus megadása nem lehetséges, a vizsgálandó hipotézis tartalmazza a vizsgálandó eloszlás explicit közelítő alakját (l. χ^2 illeszkedési próba).

A statisztikai próbák szoros kapcsolatban állnak a 3. fejezetben tárgyalt döntésekkel. A legegyszerűbb statisztikai próbáknál azonban rendszerint egyetlen hipotézist fogalmazunk meg és tesztelünk. Mivel alternatív hipotézis (ellenhipotézis) nincs rögzítve, a döntéseknél látott likelihood arány nem képezhető, és így az azzal kapcsolatos fogalmak és tesztelési algoritmusok a statisztikai próbák tárgyalásából kimaradnak. A két vagy több hipotézist vizsgáló döntéseknél (l. 3. fejezet) egy adott hipotézis igazolására törekedtünk. Az egy hipotézises statisztikai próbánál elsősorban a hipotézis elvetésének lehetőségét vizsgáljuk, emiatt a döntésméleti és statisztikai fogalmi apparátusban bizonyos komplementer fogalompárok lehettek fel. Tegyük fel, hogy egy véletlen kimenetelű kísérlet során a $[z_1, z_2, \dots, z_N]$ megfigyelésekre (mintára) tettünk szert. A megfigyelések együttes eloszlás-, ill. sűrűségfüggvénye K számú ismeretlen a -paramétert tartalmaz:

$$f_z(z_1, z_2, \dots, z_N; a_1, a_2, \dots, a_K) = f_z(z; a), \quad (5.124)$$

ill.

$$\int_S f_z(z; a) dz = P_z(S; a), \quad z \in S \subset R_N, \quad a \in \Omega \subset P_K, \quad (5.125)$$

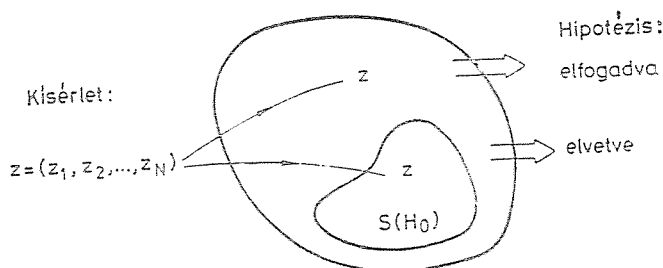
ahol R_N az N -dimenziós mintatér, és S ennek részhalmaza,

P_K a K -dimenziós paraméterter és Ω a megengedett paramétervektorok halmaza.

Az (5.124)–(5.125) eloszlásra vonatkozó hipotézis olyan állítás, mely szerint az ismeretlen a -paraméter egy feltételezett $\omega \subset \Omega$ halmaz eleme, vagyis:

$$H_0: a \in \omega. \quad (5.126)$$

Ha az ω halmaz egyelemű — $\omega = \{a_0\}$ — azaz a hipotetikus eloszlás egyértelműen meghatározott, a hipotézist *egyszerűnek* nevezzük. Ellenkező esetben a hipotézis *összetett*, az (5.124) eloszlás többé-kevésbé határozatlan.



5.13. ábra. A statisztikai próba sémája

A próba elvégzéséhez meg kell határozni az R_N mintatér egy kitüntetett, a vizsgált hipotézishez kapcsolódó $S(H_0)$ részhalmazát. Ha a konkrét z megfigyeléssorozat az $S(H_0)$ halmazba esik, a hipotézist elvetjük, ellenkező esetben elfogadjuk (l. 5.13. ábra).

Az $S(H_0)$ halmazhoz, melyet a H_0 hipotézis *kritikus tartományának* nevezzük, egyértelműen tartozik egy α nagyságú valószínűség, amely a téves elvetés valószínűsége (a hipotézist elvetjük, bár igaz volt, ún. elsőfajú hiba):

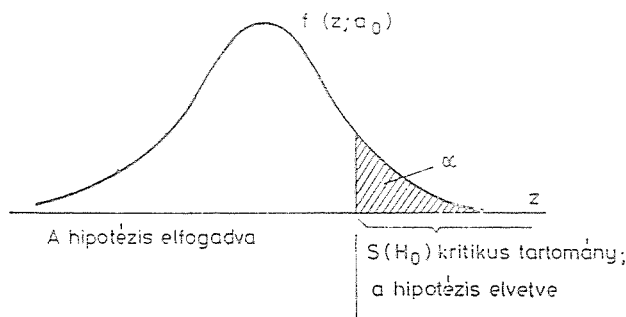
$$\int_{S(H_0)} f_z(z; a_0) dz = \alpha. \quad (5.127)$$

Az α valószínűség a próba ún. *szignifikancia szintje*, a próbáról pedig azt mondjuk, hogy az $S(H_0)$ kritikus tartomány a $H_0: a = a_0$ hipotézist α szignifikancia szinten vizsgálja. A bevezetett fogalmakat a következő ábra szemlélteti (5.14. ábra).

Jegyezzük meg, hogy egy adott R_N, P_K minta- és paraméterter, továbbá f_z sűrűségfüggvény és α szignifikancia szint mellett az $S(H_0)$ kritikus tartomány többféleképpen (sőt végtelen sokféleképpen) is megválasztható, hiszen egy rögzített α valószínűségnek a sűrűségfüggvény alatti több részterület is megfeleltethető. A szabad választás oka az, hogy az alternatív hipotézis nincs megfogalmazva, így a vele kapcsolatos döntések valószínűségeit a kritikus tartomány rögzítésével befolyásolni nem tudjuk.

Rögzített $S(H_0)$ kritikus tartomány (próba) mellett, a próbára az ún. $\pi_S(a)$ *erőfüggvény* jellemző:

$$\pi_S(a) = \int_{S(H_0)} f_z(z; a) dz, \quad \pi_S(a_0) = \int_{S(H_0)} f_z(z; a_0) dz = \alpha. \quad (5.128)$$



5.14. ábra. A próba szignifikancia szintje és kritikus tartománya

Az erőfüggvény tehát az adott hipotézis elvetésének valószínűsége, a H_0 hipotézishez tartozó kritikus tartomány felett.

Gyakori eset, amikor egy hipotézist nem önmagában, hanem egy másik, ún. ellenhipotézissel, pl.:

$$H_1: a = a_1 \quad (5.129)$$

szemben vizsgáljuk.

A H_0 hipotézisnek a H_1 ellenhipotézisre nézve *legerősebb próbájáról* akkor beszélünk, ha az ellenhipotézis elvetési valószínűsége maximális:

$$\pi_S(a_1) = 1 - \beta = \max, \quad (5.130)$$

ahol $1 - \beta$ a próba ún. *ereje* az ellenhipotézissel szemben.

Az *egyenletes legerősebb próba* egy olyan próba, amely minden egyes megengedett ellenhipotézisre nézve legerősebb. Mivel a legerősebb próba esetén az (5.128) és (5.130) definíció szerint:

$$\pi_S(a_0) = \alpha$$

és

$$\pi_S(a_1) = 1 - \beta = \max, \quad (5.131)$$

bizonyítható, hogy az $S(H_0)$ kritikus tartomány a következő:

$$f_Z(z; a_1) \geq A(\alpha) f_Z(z; a_0) \quad \forall z \in S(H_0) \quad (5.132)$$

feltétellel adható meg, ahol $A(\alpha)$ egy, az α -tól függő küszöbérték.

Összehasonlítva a kéthipotézises statisztikai próba [(5.128)—(5.130) összefüggés] és a szintén kéthipotézises döntés [(3.291)—(3.292), 3.23. ábra] leírását látjuk, hogy a próba erejében szereplő β — a téves elfogadás valószínűsége — azonos a P_M téves elvetés valószínűségével. A különbség forrása az, hogy míg a statisztikai próbák jellemző mennyiségei (α szignifikancia szint, $1 - \beta$ próba ereje) a minta tulajdonságaira vonatkozó H_0 hipotézis elutasítására vonatkoznak, a döntésméleti fogalmak (P_M téves elvetés, ill. P_F téves elfogadás valószínűsége) a H_1 hipotézis elfogadására (másként az értékes jel zajos háttérben való detektálására) irányulnak.

A jelen szakaszban tárgyalt legerősebb próba lényegében megegyezik a bináris *Neyman—Pearson*-tesztrel [hiszen $A(\alpha)$ a rögzített α valószínűség függvénye, miközben a másik valószínűségben maximumra törekszünk] (l. 3.7.3. pont), $\alpha = P_F$, $\beta = P_M$ megfeleltetéssel. A H_0 hipotézisre vonatkozó $S(H_0)$ kritikus tartomány a H_1 hipotézis $\mathcal{Q}_1$ elfogadási tartománya (l. 3.33. ábra).

A teszt értelmezése azonban eltérő jellegű, hiszen az (5.132) feltétel teljesülése, azaz a küszöbérték túllépése itt a H_0 hipotézis elvetését jelenti, ellentétben a H_1 hipotézis elfogadásával.

5.1. példa

Tekintsük példának az ismeretlen várható értékű (de ismert szórású) normális eloszlást:

$$z_i \sim N(\mu, \sigma^2), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.133)$$

és vizsgáljuk a következő két hipotézist :

$$\begin{aligned} H_0: \mu &= \mu_0, \\ H_1: \mu &= \mu_1 > \mu_0. \end{aligned} \quad (5.134)$$

Tekintsük a próba (5.132) likelihood-arányát :

$$\frac{f_z(z; \mu_1)}{f_z(z; \mu_0)} = e^{My - \frac{1}{2}M^2} \equiv A(\alpha), \quad (5.135)$$

ahol :

$$M = \sqrt{N}(\mu_1 - \mu_0)/\sigma$$

és

$$y = \sqrt{N}(\hat{\mu}_z - \mu_0)/\sigma$$

az említett próbastatisztika.

Válasszuk meg $A(\alpha)$ -t küszöbértéknek :

$$A(\alpha) = e^{Mu_{2,\alpha} - \frac{1}{2}M^2}. \quad (5.136)$$

A $A(\alpha)$ ilyen megválasztásával az $S(H_0)$ kritikus tartományt definiáló feltétel a megfigyeléseknek lineáris függvényeként állítható elő. Pontosabban :

$$S(H_0) = \{z : y = \sqrt{N}(\hat{\mu}_z - \mu_0)/\sigma \geq u_{2,\alpha}\} \subset R_N, \quad (5.137)$$

azaz :

$$\hat{\mu}_z \geq \mu_0 + u_{2,\alpha}\sigma/\sqrt{N},$$

ahol $u_{2,\alpha}$ az (5.98) összefüggéssel definiált érték és a helyes H_0 hipotézis elvetési valószínűsége :

$$\pi_S(\mu_0) = \alpha. \quad (5.138)$$

Az (5.137) S kritikus tartományon alapuló próba tehát a H_0 hipotézist elutasítja, ha csak a minta elemeiből képzett $\hat{\mu}_z$ becslés eleget nem tesz az (5.137) feltételnek. Az S kritikus tartomány (5.137) szerinti megválasztása biztosítja ezen próba legerősebb voltát. A kritikus tartomány megválasztása azonban a μ_1 ellenhipotézistől nem függ, így az (5.137) próba egyben a H_0 hipotézis egyenletes legerősebb próbája.

5.3.2. Nemparametrikus próbák

A nemparametrikus próbához akkor folyamodunk, ha a keresett eloszlás tulajdonságait paraméterekkel kifejezni nem tudjuk. Ilyen feladat tipikus példája az ún. *illeszkedési próba*.

Az illeszkedési próbánál a véletlen kísérlet mechanizmusát leíró sűrűségfüggvény alakját keressük, ezen alakra vonatkozó feltételezéseinket ellenőrizzük. Igen gyakori a normális eloszlás feltételezése. A begyűjtött megfigyelések alapján választ szeretnénk kapni arra vonatkozólag, hogy a megfigyeléseket generáló eloszlás normális-e vagy sem. A paraméteres teszthez nem folyamodhatunk, hiszen a centralizált :

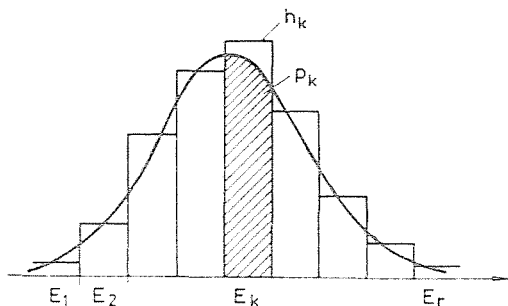
$$(z_i - \hat{\mu}_z)/s_z^2 \quad (5.139)$$

változók eloszlása és így a lehetséges próbastatisztikák eloszlása ismeretlen.

Az ismeretlen sűrűségfüggvény alakjára tett hipotézist a sűrűségfüggvény generálta véletlen változó lehetséges értékeinek csoportokra való sorolásával vizsgáljuk.

Az adott csoportba tartozás valószínűsége egyrészt a feltételezett eloszlásból adott, másrészt a kísérletből becsülhető. Így csupán bizonyos E_k események feltételezett $p_k = P(E_k)$ valószínűségét hasonlíthatjuk össze a kapott minták alapján számított $h_k = h(E_k) = \frac{n_k}{N}$ relatív gyakoriságokkal.

Az E_k esemény a véletlen változónak a k -adik csoportba, ill. számintervallumba tartozását jelenti, N a kísérletek össz-száma, n_k pedig azon kísérletek száma, melyeknél a véletlen változó értéke a k -adik intervallumba esett (5.15. ábra).



5.15. ábra. Nem parametrikus próbáknál előforduló valószínűségi viszonyok

Könnyen belátható, hogy az eloszlás ilyen megadása nem más, mint az E_k intervallumok nagyságától függő finomságú hisztogram.

Az elméleti és empirikus hisztogram eltérésének mértékeként vezessük be az:

$$\chi^2 = N \sum_{k=1}^r \frac{(h_k - p_k)^2}{p_k} = \sum_{k=1}^r \frac{(n_k - Np_k)^2}{Np_k} \quad (5.140)$$

próbastatisztikát. Bizonyítható, hogy nagy N -re az χ^2 eloszlása $m = r - 1$ szabadságfokú χ^2 -típusú eloszláshoz tart, jó közelítéssel alkalmazható tehát a χ^2 próba:

$$H_0: p(E_i) = p_i \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (5.141)$$

hipotézist a szignifikancia szinten elutasítjuk, ha a konkrét minta alapján számított próbastatisztika értéke:

$$\chi^2 > \chi_{m, 1-\alpha}^2 \quad (5.142)$$

5.4. Regressziószámítás

Minden jelenségben, ahol változások zajlanak le, a vizsgálatok, megfigyelések lényeges célkitűzése a változó mennyiségek közötti kapcsolat felderítése.

Egyes esetekben ez a kapcsolat egyszerű és nagy pontossággal megfigyelhető, mint pl. az egyenes vonalú egyenletes mozgás út és idő változók közötti összefüggésénél.

Ez azonban a legtöbb fizikai folyamatnál nem teljesül a következő tipikus okok miatt:

1. A változók közötti függvénykapcsolat túl bonyolult, ezért a vizsgálat célja valamilyen egyszerűbb, közelítő összefüggés származtatása.

2. A jelenség természetéből, vagy a megfigyelés módszereiből adódóan az adatok zajosak, amit úgy is megfogalmazhatunk, hogy a függő és független változók közötti kapcsolat a keresett determinisztikus összefüggés mellett sztochasztikus komponens is tartalmaz.

A vázolt probléma nem más, mint az 1. fejezetben tárgyalt modellezési probléma, egy ismeretlen, ill. részben ismert jelenség identifikációja. A felsorolt okok miatt a feladat megoldása többnyire összetett adatfeldolgozási eljárások alkalmazását igényli. Ezeket az eljárásokat a mérés technikai gyakorlatban regressziószámítási módszereknek nevezzük.

A regressziószámításnak, vagy regresszióanalízisnek, nagy gyakorlati jelentősége miatt, meglehetősen sok módszere ismert, amik részletes áttekintése nem célunk.

A továbbiakban a hangsúlyt inkább a regressziószámítás és a becslélmélet kapcsolatának bemutatására helyezzük.

5.4.1. A regressziós probléma modellje

Mint láttuk, a regressziószámítás célja a függő és független változók közötti közvetlen determinisztikus kapcsolat meghatározása. A vizsgált jelenség változóinak ilyen felosztása természetesen a vizsgálat célkitűzésétől függ, számos esetben a kérdésfeltevés dönti el, hogy mit tekintünk függő és mit független változónak (pl. az emberek nagysága és súlya közötti kapcsolat vizsgálatánál). Hogy a becslélméleti modellekkel való kapcsolat minél közvetlenebbül látszon, jelöljük u -val a független és z -vel a függő változókat.

Az u és z közötti kapcsolatot a :

$$z = g(u, n) \quad (5.143)$$

összefüggéssel írjuk le, ahol n a kapcsolat sztochasztikus komponensét okozó valamilyen zajvektor.

Mint az előzőekben említettük, a fenti, esetleg igen komplex kapcsolatot redukálni akarjuk az u és z közötti valamilyen

$$z_M = r(u) \quad (5.144)$$

összefüggésre. Az $r(u)$ és $g(u, n)$ függvények viszonyát a következőképpen értelmezhetjük :

1. A $z_M = r(u)$ kapcsolat a függő és független változó között a valóságban létező, de közvetlenül meg nem figyelhető összefüggés. A $g(u, n)$ függvény a megfigyelhető kapcsolatot írja le, és egy lehetséges viszonya $r(u)$ -val additív megfigyelési zaj esetén :

$$z = g(u, n) = r(u) + n. \quad (5.145)$$

2. A $z_M = r(u)$ kapcsolatnak valóságos tartalma nincs, célunk mindössze a $z = g(u, n)$ összefüggésnek a redukciója (pl. amikor az u és z egyaránt véletlen változó és a köztük értelmezhető kapcsolat statisztikai jellegű).

Mindkét értelmezésnél $r(u)$ meghatározását a z és z_M közötti viszony alapján végezhetjük el. A keresett $z_M = r(u)$ redukált kapcsolat nyilván annál jobb, minél kisebb z és z_M között az eltérés azonos u változó érték mellett (feltesszük, hogy az u változó értékét vagy teljesen pontosan ismerjük, vagy véges pontossággal mérjük).

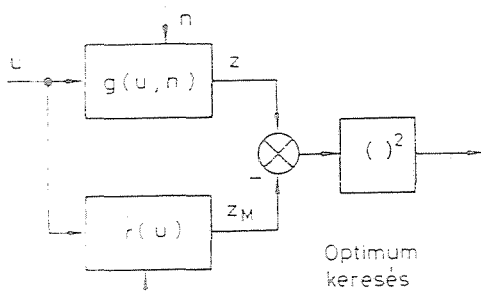
Az $r(u)$ meghatározása tehát a z és z_M között definiált eltérés minimálására, azaz egy optimumfeladat megoldására vezethető vissza. A regressziószámítási gyakorlatban ez az eltérési mérték a négyzetes hiba, a regressziószámítás modelljét tehát az 5.16. ábra szemlélteti.

Mint az ábrából is látható, a regressziószámítás modellje hasonló a rendszeridentifikációs feladatok szokásos modelljéhez, így természetes, hogy a megoldások között is nagyfokú a hasonlóság.

A regressziószámítás módszerei abban különböznek egymástól, hogy a vázolt optimumlási probléma megoldásához milyen a priori ismeretek állnak rendelkezésre, és milyenek a keresett regressziós kapcsolat $[r(u)]$ tulajdonságai. A következőkben — hogy a 3. és 4. fejezetben tárgyalt becslési alapszerek és a regressziószámítás módszerei közötti kapcsolat minél világosabb legyen — a tárgyalást a szükséges a priori ismeretek szerinti csoportosításban végezzük.

5.4.2. Regressziószámítás teljesen specifikált statisztikai jellemzőknél

A regressziós feladat szempontjából az 5.16. ábra szerinti modell statisztikai jellemzői akkor teljesen rögzítettek, ha ismerjük az u és z független és függő változók együttes valószínűségi sűrűségfüggvényét, $f_{u,z}(u, z)$ -t.



5.16. ábra. A regressziós probléma modellje

A keresett $r(u)$ függvénynek olyannak kell lenni, hogy az

$$E\{(z - z_M)^T(z - z_M)\} \quad (5.146)$$

átlagos négyzetes hiba minimális legyen.

Könnyű észrevenni, hogy a fenti probléma átfogalmazható úgy, hogy keressük azt az optimális $r(u)$ becslőt, ami a z átlagos négyzetes értelemben optimális $z = z_M$ becslést állítja elő adott u bemenet mellett. Ez a probléma pedig a rögzített a priori ismeretek melletti Bayes-becslési probléma (l. 3.3.1. pont), és a megoldás az ott ismertett levezetés értelmében

$$r(u) = E\{z | u\}. \quad (5.147)$$

Az u független változó különböző értékeihez a z függő változó különböző $r(u)$ becslései tartoznak, az $[u, r(u)]$ értékpárok tehát egy görbén helyezkednek el. Az $[u, r(u)]$ görbe a z változó u változóra vonatkoztatott regressziós görbéje.

A regressziós probléma általánosítható több változó esetére is. Tegyük fel, hogy egy fizikai jelenségnél $(s-1)$ számú független változót különböztethetünk meg:

$$u_2, u_3, u_4, \dots, u_s$$

és keressük azok és egy u_1 függő változó közötti kapcsolatot:

$$u_{1,M} = r(u_2, u_3, \dots, u_s). \quad (5.148)$$

Az (5.146) négyzetes hibakritérium mellett és az $f_{u_1, u_2, \dots, u_s}(u_1, \dots, u_s)$ együttes sűrűségfüggvény ismeretében az u_1 és $u_2, u_3, \dots, u_s$ változók kapcsolatát, az egydimenziós eset mintájára, a feltételes várható érték fejezi ki:

$$u_{1,M} = r(u_2, u_3, \dots, u_s) = E\{u_1 | u_2, u_3, \dots, u_s\}. \quad (5.149)$$

Az s -dimenziós térben ábrázolva az $[u_2, u_3, \dots, u_s, r(u_2, u_3, \dots, u_s)]$ pontok egy felületet futnak be, amit *regressziós felületnek* szokás nevezni.

Megjegyzés: A független és függő változók $u_1, u_2, \dots, u_s$ jelölésével a kapott regressziós felületek nemcsak egy kitüntetett $z = u_1$ függő változó esetére érvényesek, hanem az indexek alkalmas permutációjával vizsgálni tudjuk tetszőleges változók közötti kapcsolatot is.

5.2. példa

Legyenek u és z skalár változók, együttes eloszlásuk pedig 2-dimenziós normális eloszlás:

$$f_{u,z}(u, z) = \frac{1}{2\pi\sigma_u\sigma_z\sqrt{1-\varrho^2}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2(1-\varrho^2)} \left[\frac{(u-\mu_u)^2}{\sigma_u^2} - 2\varrho \frac{(u-\mu_u)(z-\mu_z)}{\sigma_u\sigma_z} + \frac{(z-\mu_z)^2}{\sigma_z^2} \right] \right]. \quad (5.150)$$

Az u változó sűrűségfüggvénye szintén normális eloszlású:

$$f_u(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} \exp \left[-\frac{(u-\mu_u)^2}{2\sigma_u^2} \right]. \quad (5.151)$$

A z függőváltozó feltételes sűrűségfüggvénye (1. 3.3.3. pont) egy

$$N \left(\mu_z + \varrho \frac{\sigma_z}{\sigma_u} (u - \mu_u), \sigma_z^2(1 - \varrho^2) \right)$$

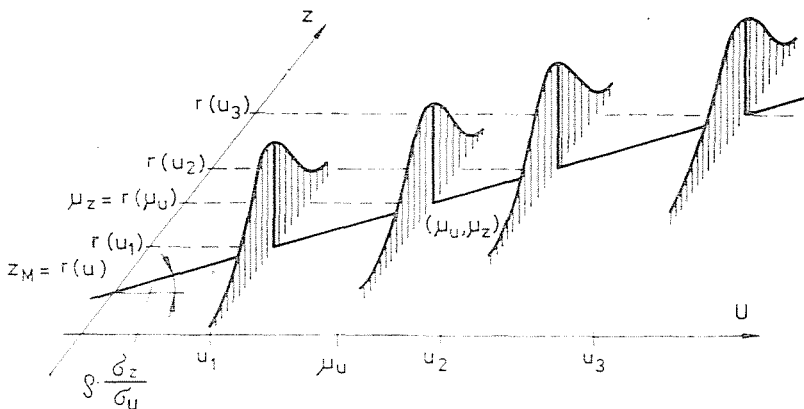
normális sűrűségfüggvény. A feltételes várható érték a feltételben lineáris, így az $r(u)$ (5.147) regressziós görbe:

$$z_M = r(u) = \mu_z + \varrho \frac{\sigma_z}{\sigma_u} (u - \mu_u) \quad (5.152)$$

egy egyenes, amely átmegy az (u, z) eloszlás (μ_u, μ_z) súlypontján és melynek iránytangense $\varrho \frac{\sigma_z}{\sigma_u}$ (5.17. ábra). A 2-dimenziós normális együttes eloszlás esetén tehát a feltételes várható érték lineáris függvény. Az elméleti részleteket mellőzve megállapíthatjuk, hogy ez az eredmény többdimenziós esetben is igaz. Az (5.149) regressziós felület mindegyik változójában lineáris:

$$u_{1,M} = b_{10}e + b_{12}u_2 + b_{13}u_3 + \dots + b_{1s}u_s, \quad (5.153)$$

ahol $e^T = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]$, a regressziós felület tehát egy *sík* (regressziós sík). A b_{11} regressziós együtthatók kiszámításával a következő pontban foglalkozunk.



5.17. ábra. A regressziós egyenes származtatása

5.4.3. Regressziószámítás részben specifikált statisztikai jellemzőknél

Az (5.147) szerinti regressziós görbe (ill. felület) meghatározásának feltétele az együttes sűrűségfüggvény ismerete. Sok esetben ez nem teljesül, hanem csak az együttes eloszlás véges számú momentumát ismerjük. Lényegesek azért az olyan regressziószámítási módszerek, amik részben ismert statisztikai jellemzők mellett vezetnek eredményre.

A kevesebb a priori ismeret természetesen azt jelenti, hogy a származtatható regressziós kapcsolat szerkezete egyszerűbb, ami úgy jelentkezik, hogy a származtatható függvényosztályt szűkíteni kell. A következőkben néhány ilyen módszert mutatunk be.

Lineáris regresszió

Az (5.152) regressziós egyenes megszerkesztéséhez elegendő volt a μ_u , μ_z , σ_u , σ_z és ρ momentumok ismerete. Eltekintve tehát attól, hogy az (5.147) regressziós függvény lineáris-e vagy sem, e momentumok ismeretében kereseljük az u véletlen változónak azt a $b_0 + b_1 u = \hat{r}_1(u)$ függvényét, amelyre:

$$E\{[z - \hat{r}_1(u)]^2\} = \min_{b_0, b_1}. \quad (5.154)$$

A megoldás természetesen azonos az (5.152) regressziós egyenessel:

$$z_M = b_0 + b_1 u, \quad b_0 = \mu_z - \mu_u \rho \frac{\sigma_z}{\sigma_u}, \quad b_1 = \rho \frac{\sigma_z}{\sigma_u}. \quad (5.155)$$

Az (5.154) közelítés jóságára jellemző mennyiség az elkövetett hiba varianciája, amely a következő módon fejezhető ki az a priori ismeret segítségével:

$$\text{var}[z - \hat{r}_1(u)] = \sigma_z^2(1 - \rho^2). \quad (5.156)$$

Jegyezzük meg, hogy az (5.155) lineáris regresszió, a normális együttes eloszlású változók esetétől eltekintve, nem azonos az (5.147) elméleti regressziós görbével (skalár esetben), csupán annak az átlagos négyzetes értelemben vett legjobb lineáris közelítése.

Többdimenziós esetben az (5.149) általános regressziós felület kisebb-nagyobb mértékben eltér a normális eloszlásnál jelentkező (5.153) síkfelülettől. A regressziós felület pontos meghatározása általában nehézségekbe ütközik. Ismert együttes sűrűségfüggvénynél tipikus eset az, hogy annak bonyolultsága miatt az (5.149) feltételes várható érték nem kiértékelhető. Részben vagy teljesen ismeretlen sűrűségfüggvénynél a regressziós felület meghatározása eleve lehetetlen. A gyakorlatban ilyenkor közeli-tetéshez folyamodunk, méghozzá általában a legegyszerűbb lineáris közelítéshez.

Egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az $u_2, u_3, \dots, u_s$ független változók centrilizáltak (zérus várható értékűek). Az u_1 és $u_2, u_3, \dots, u_s$ változók kapcsolatát a következő:

$$\hat{r}_1(u_2, \dots, u_s) = z_M = \hat{u}_1 = b_{12}u_2 + b_{13}u_3 + \dots + b_{1s}u_s \quad (5.157)$$

regressziós síkkal közelítjük az (5.146):

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{u_1} = E\{(u_1 - \hat{u}_1)^T(u_1 - \hat{u}_1)\} \quad (5.158)$$

minimális négyzetes hiba értelmében.

Az (5.158) optimumfeltétel kiértékelésével a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\mu_{1,2}b_{12} + \mu_{1,3}b_{13} + \dots + \mu_{1,s}b_{1s} = \mu_{1,1} \quad i = 2, 3, \dots, s, \quad (5.159)$$

ahol: $\mu_{i,j} = E\{u_i^T u_j\}$.

Ha $\Sigma_{u,u} = [\mu_{i,j}]$ az $u_2, u_3, \dots, u_s$ változók kovarianciamátrixa és $m^T = [\mu_{2,1}, \mu_{3,1}, \dots, \mu_{s,1}]$ az (5.159) egyenlet jobb oldalán álló momentumok vektora, akkor az (5.159) egyenletrendszer mátrixos formában következőképpen írható fel:

$$\Sigma_{u,u} b = m, \quad b = \Sigma_{u,u}^{-1} m. \quad (5.160)$$

A b_{1i} regressziós együtthatók Cramer-szabályok segítségével számíthatók a Σ kovarianciamátrix determinánsaiból:

$$b_{1i} = - \frac{\Sigma_{1i}}{\Sigma_{11}}, \quad (5.161)$$

ahol Σ_{ij} a $\Sigma_{u,u}$ mátrix $\mu_{i,j}$ eleméhez tartozó előjeles aldetemináns.

Megjegyzés: Az (5.155) és (5.159) lineáris regresszió származtatásánál csak az első-, ill. másodrendű momentumok ismeretére támaszkodtunk, ez egyben kijelöli a regressziótípus alkalmazhatósági körét. Előfordul azonban, hogy annál magasabb rendű momentumok is rendelkezésre állnak, ilyenkor a regressziós görbe, ill. felület a lineárisnál jobb, a független változók magasabb hatványait is tartalmazó közelítésére törekedhetünk.

N-ed fokú polinomiális regresszió

Az elméleti (5.147) regressziós görbe közelítését most az

$$\hat{r}_N(u) = \sum_{i=0}^N b_i u^i \quad (5.162)$$

alakú függvények (N -ed fokú polinomok) osztályában keressük. A legjobban közelítő polinom minimálja az:

$$E\{[z - \hat{f}_N(u)]^T [z - \hat{f}_N(u)]\} = \min_{\{b_l\}} \quad (5.163)$$

átlagos négyzetes hibát. A b_l regressziós együtthatók kiszámításához meg kell oldani a

$$\mu_{l,0}b_0 + \mu_{l,1,0}b_1 + \dots + \mu_{l,N,0}b_N = \mu_{l,1}, \quad l=0, 1, 2, \dots, N, \quad (5.164)$$

ahol:

$$\mu_{l,k} = E\{u^l z^k\}$$

egyenletrendszer.

Látható, hogy az N -ed fokú polinomiális közelítés megvalósításához a momentumokat $\mu_{2N,0}$ -ig bezárólag kell ismerni.

A polinomiális regressziót akkor alkalmazzuk, amikor a lineáris regresszió nem szolgáltat az adott gyakorlati probléma szempontjából kielégítő megoldást. Polinomiális regressziónál lényeges lépés a regressziós együtthatók számának, avagy a közelítő polinom megfelelő fokának a rögzítése.

Megjegyzés: Az (5.162) polinomiális regresszió hátránya az (5.164) egyenletrendszer, melynek megoldásához a momentummátrix determinánsainak ismeretére van szükség. További hátránya az, hogy egy másik, nagyobb fokszámú polinomiális közelítésre való áttéréskor az összes regressziós együtthatót újra kell számolni. A polinomiális regresszió egy másik megoldása az ortogonális polinomiális közelítés. Az $\hat{f}_N(u)$ becslést az u változó sűrűségfüggvényére, mint súlyfüggvényre ortogonális polinomok (I. 2.3.6. pont) összegeként állíthatjuk össze:

$$\hat{f}_N(u) = c_0 p_0(u) + c_1 p_1(u) + \dots + c_N p_N(u), \quad (5.165)$$

ahol

$$E\{p_n^T(u) p_m(u)\} = \int p_n^T(u) p_m(u) f_u(u) du = \delta_{n,m}$$

és

$$c_l = E\{z^T p_l(u)\}.$$

Az ortogonális polinomok nagy előnye a c_l regressziós együtthatók kiszámításában rejlik. A közelítő regressziós görbe származtatásához:

- a c_l együtthatók egzakt képletből és nem egyenletrendszerből számíthatók;
- a c_l regressziós együttható értéke a többi regressziós együtthatótól független, ami lehetővé teszi a közelítés jóságának egyszerű növelését. E célból az (5.165) közelítő regresszióhoz elegendő a $c_{N+1} p_{N+1}(u)$ tagot hozzáadni.

Az ortogonális polinomiális regressziós közelítés hibája:

$$E\{[z - \hat{f}_N(u)]^T [z - \hat{f}_N(u)]\} = \sigma_z^2 - c_0^2 - c_1^2 - \dots - c_N^2. \quad (5.166)$$

Többdimenziós esetben a lineárisnál magasabb fokú regressziós felület elméleti úton történő származtatása gyakorlatban, tekintettel a számításhoz szükséges, főleg egyes momentumokra, nemigen lehetséges. Járhatóbb út a momentumok megfigyelések alapján történő becslése és a tapasztalati regressziós felület előállítása. Tapasztalati regressziószámítással a következő, 5.4.4. pontban foglalkozunk.

5.4.4. Regressziószámítás ismeretlen statisztikai jellemzőknél

A gyakorlati esetek igen jelentős részében az együttes sűrűségfüggvényt, ill. annak momentumait nem ismerjük, vagy a rájuk vonatkozó a priori ismeret nem megbízható, használhatatlan az egzakt (5.155), (5.159) számítások elvégzéséhez. Ilyen esetben a megfigyelésekhez folyamodunk, azok alapján meghatározzuk a négyzetes értelemben empirikusan legjobban illeszthető egyenest, polinomot, síkot, ill. magasabbrendű felületet.

Fontos megjegyezni, hogy véges számú megfigyelés révén a becsült regressziós együtthatók véletlen változók és emiatt véletlen jellegű maga a származtatott közelítő regresszió is.

A probléma tehát a következő.

Az $r_A(u)$ regressziófüggvényt az ismeretlen a paramétervektor rögzíti (az a vektor elemei a lineáris, polinomiális stb. regressziós összefüggés paraméterei), aminek $\hat{\alpha}$ négyzetes értelemben optimális becslését az u független és z függő változóban végzett (u_i, z_i) megfigyelések segítségével kell elvégezni.

A minimálandó négyzetes hiba

$$\varepsilon_z = (z - z_M)^T (z - z_M) = \sum_{i=1}^N (z_i - z_{Mi})^2 \quad (5.167)$$

alakjából és a regressziószámítás 5.18. ábra szerinti modelljéből nyilvánvaló, hogy a feladat az a paramétervektor legkisebb négyzetes hibájú (LS) becslése egység súlyozó mátrix mellett, aminek alapösszefüggését a 3.5. szakaszban származtattuk. Mint láttuk, a paraméterekben lineáris modell mellett, amikor:

$$z = Ua + n \quad \text{ahol} \quad n \sim N(0, I\sigma^2) \quad (5.168)$$

és

$$z_M = U \cdot \alpha$$

az optimális $\hat{\alpha}$ vektor az

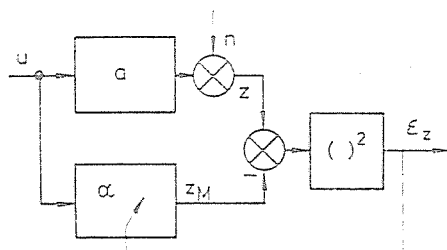
$$\hat{\alpha} = [U^T U]^{-1} U^T z \quad (5.169)$$

összefüggéssel nyerhető [l. (3.175)].

Az $\hat{\alpha}$ becslés varianciája a (3.158) alapján és az (5.168) modell mellett:

$$\text{var}(\hat{\alpha}) = (U^T U)^{-1} \sigma^2. \quad (5.170)$$

A következőkben röviden megmutatjuk, hogy a lineáris és polinomiális regressziónál mik a fenti összefüggésben szereplő U mátrix elemei.



5.18. ábra. A regressziószámítás modellje

Lineáris regresszió

Tekintsük először az egyváltozós esetet. Az (u_i, z_i) megfigyeléssorozat egy pontthalmazt ábrázol az (u, z) koordinátáson (l. 5.19. ábra).

Az alábbi:

$$z_M = \alpha_0 e + \alpha_1 u \quad (5.171)$$

lineáris kapcsolatot természetesen akármilyen alakú és elhelyezkedésű pontthalmaz esetén értelmezhetjük, az (u_i, z_i) pontthalmaz képe segítséget nyújthat azonban annak eldöntésében, hogy mennyire jogos a lineáris kapcsolat feltételezése. Az 5.19. ábrán a megfigyelési (u_i, z_i) pontthalmaz két példáját látjuk, ahol az a) esetben a lineáris kapcsolat lényegesen jobban kimutatható.

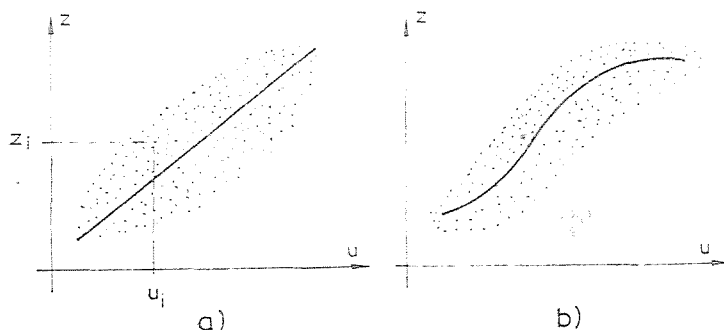
Az egyváltozós lineáris (5.152) regresszióhoz tartozó általános (5.168) modell a következő:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_1 \\ 1 & u_2 \\ 1 & u_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & u_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ \vdots \\ n_N \end{bmatrix}. \quad (5.172)$$

Az (5.169) összefüggésben szereplő $U^T U$ és $U^T z$ részletes kiértékelésével belátható, hogy azok az (5.160) egyenletben szereplő $\Sigma_{u,u}$ és m mennyiségek (az u vektor autokovariancia mátrixa, u és z kereszkovariancia mátrixának egy sora) empirikus becslései:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{M1} \\ u_{12} & u_{22} & \dots & u_{M2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{1N} & u_{2N} & \dots & u_{MN} \end{bmatrix} = [u_1, u_2, \dots, u_M], \quad (5.173)$$

$$U^T U = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_M^T \end{bmatrix} [u_1, u_2, \dots, u_M] = \begin{bmatrix} u_1^T u_1 & u_1^T u_2 & \dots & u_1^T u_M \\ u_2^T u_1 & u_2^T u_2 & \dots & u_2^T u_M \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_M^T u_1 & u_M^T u_2 & \dots & u_M^T u_M \end{bmatrix} = (N-1) \hat{\Sigma}_{u,u}, \quad (5.174)$$



5.19. ábra.
A megfigyeléssorozatnak megfelelő pontthalmaz

$$U^T Z = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_M^T \end{bmatrix} [Z] = \begin{bmatrix} u_1^T Z \\ u_2^T Z \\ \vdots \\ u_M^T Z \end{bmatrix} = (N-1)\hat{m}. \quad (5.175)$$

Az (5.169) legkisebb négyzetes hibájú becslés felírható tehát az (5.160) becslés empirikus megfelelőjeként:

$$\hat{\alpha} = \hat{\Sigma}_{u,u}^{-1} \hat{m}. \quad (5.176)$$

A regressziós együtthatók értékét az (5.176) kiértékelésével nyerjük, konkrét U (megfigyelési) mátrix mellett.

Tekintettel az (5.172) modellben szereplő:

$$u_1 = e \quad u_2 = u \quad (5.177)$$

vektorokra, az (5.172) összefüggésben szereplő $U^T U$ mátrix és $U^T Z$ vektor elemei:

$$U^T U = \begin{bmatrix} e^T \\ u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & N\hat{\mu}_u \\ N\hat{\mu}_u & (N-1)s_u^{*2} + N\hat{\mu}_u^2 \end{bmatrix},$$

$$U^T Z = \begin{bmatrix} e^T \\ u^T \end{bmatrix} [Z] = \begin{bmatrix} N\hat{\mu}_z \\ (N-1)m_{uz}^* + N\hat{\mu}_u \hat{\mu}_z \end{bmatrix}, \quad (5.178)$$

ahol:

$$m_{uz}^* = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (u_i - \hat{\mu}_u)(z_i - \hat{\mu}_z) \quad (5.179)$$

a $\hat{\mu}_u, \hat{\mu}_z, s_u^*$ pedig előbb már értelmezett jelölések [l. pl. (5.1) és (5.102)].

A részletes számításokat (l. 5.3 példa) mellőzve, a regressziós együtthatók:

$$\hat{\alpha}_0 = \hat{\mu}_z - \hat{\mu}_u \hat{\alpha}_1, \quad \hat{\alpha}_1 = \hat{\varrho} \frac{s_z^*}{s_u^*}, \quad (5.180)$$

ahol:

$$\hat{\varrho} = \frac{m_{uz}^*}{s_u^* s_z^*}. \quad (5.181)$$

A tapasztalati regressziós egyenes egyenlete tehát:

$$\frac{z_M - \hat{\mu}_z}{s_z^*} = \hat{\varrho} \frac{u - \hat{\mu}_u}{s_u^*}. \quad (5.182)$$

A közelítés jóságának jellemzésére használhatjuk az (5.156) kifejezés tapasztalati analógiáját:

$$\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (z_i - z_{M_i})^2 = s_z^{*2} (1 - \hat{\varrho}^2). \quad (5.183)$$

A többdimenziós (változós) lineáris regresszió esetén a megfigyeléssorozat: $(u_1, u_2, u_3, \dots, u_s)$ és ennek megfelelően az általános (5.168) modell és az U mátrix konkrét alakja a következő:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ \vdots \\ u_{1N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{21} & u_{31} & \dots & u_{s1} \\ u_{22} & u_{32} & \dots & u_{s2} \\ u_{23} & u_{33} & \dots & u_{s3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{2N} & u_{3N} & \dots & u_{sN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ \vdots \\ a_{1s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ \vdots \\ n_N \end{bmatrix}. \quad (5.184)$$

A tapasztalati regressziós síkhoz vezető $\hat{\alpha}_{ij}$ regressziós együtthatók előállítására az (5.160)-nál azonos módon történik. Az ismeretlen momentumok helyett azok tapasztalati becsléseit kell használni:

$$\hat{\mu}_{nj} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N u_{ni} u_{ji}. \quad (5.185)$$

Ezekkel:

$$\hat{\mu}_{12} \hat{a}_{12} + \hat{\mu}_{13} \hat{a}_{13} + \dots + \hat{\mu}_{1s} \hat{a}_{1s} = \hat{\mu}_{11}, \quad i = 2, 3, \dots, s \quad (5.186)$$

ill. [l. (5.176)]

$$\hat{\Sigma}_{u,u}^{-1} \hat{\alpha} = \hat{m} \quad \text{vagy} \quad \hat{\alpha} = \hat{\Sigma}_{u,u}^{-1} \hat{m} \quad (5.187)$$

Megjegyzés: Láttuk előbb [l. (5.173)–(5.176)], hogy az (5.169) összefüggésben szereplő $U^T U$ mátrix lényegében az u vektor autokovariancia mátrixának egy becslése, az $U^T z$ vektor pedig az u és z vektorok becslült keresztkovariancia mátrixának egy sora. Az u vektor konkrét alakja függ a szóban forgó regresszió dimenziójától és típusától. Egyváltozós lineáris regresszió esetén az u vektor $u^T = [1 \ u]$ volt, többdimenziós esetben pedig $u^T = [u_2, u_3, \dots, u_s]$. Látni fogjuk, hogy alkalmas változó transzformációval az (5.168), ill. (5.169) általános alakba vihető át a polinomiális (sőt több dimenziós polinomiális) regresszió is. Az u vektor elemei természetesen abban az esetben nem a független u_i változók egyszerű megfigyelései, hanem azok a regresszió fokszámától és dimenziójától függő hatványai (pl. $u^T = [1 \ u \ u^2 \dots u^M]$) lesznek.

M-ed fokú polinomiális regresszió

Ha az (u_i, z_i) pontthalmaz elhelyezkedése a lineáris kapcsolat ellen szól [l. 5.19. ábra, b) eset], alkalmazhatjuk az (5.162) polinomiális regresszió tapasztalati megfelelőjét:

$$z_M = \sum_{i=0}^M x_i u^i, \quad (5.188)$$

ill. az (5.168) alakban:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 & \dots & u_1^M \\ 1 & u_2 & u_2^2 & \dots & u_2^M \\ 1 & u_3 & u_3^2 & \dots & u_3^M \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & u_N & u_N^2 & \dots & u_N^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ \vdots \\ n_N \end{bmatrix}. \quad (5.189)$$

Az (5.169) összefüggésnek megfelelően:

$$\hat{\alpha} = [U^T U]^{-1} U^T z, \quad (5.190)$$

ez esetben azonban az $U^T U$ és $U^T z$ mennyiségek az elemei:

$$U^T U = \begin{bmatrix} e^T \\ u^T \\ u^{2^T} \\ \vdots \\ u^{M^T} \end{bmatrix} [c \ u \ u^2 \ \dots \ u^M] = \begin{bmatrix} N & N\hat{\mu}_u & \Sigma u_i^2 & \dots & \Sigma u_i^M \\ N\hat{\mu}_u & \Sigma u_i^2 & \Sigma u_i^3 & \dots & \Sigma u_i^{M+1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \Sigma u_i^M & \Sigma u_i^{M+1} & & & \Sigma u_i^{2M} \end{bmatrix},$$

$$U^T z = \begin{bmatrix} e^T \\ u^T \\ u^{2^T} \\ \vdots \\ u^{M^T} \end{bmatrix} [z] = \begin{bmatrix} N\hat{\mu}_z \\ \Sigma u_i z_i \\ \Sigma u_i^2 z_i \\ \vdots \\ \Sigma u_i^M z_i \end{bmatrix} \quad (5.191)$$

az u vektor magasabb rendű momentumainak empirikus becslései.

A regressziós együtthatók $\hat{a}_i$ becsléseit a következő, az (5.186) egyenletrendszerrel formailag azonos:

$$\hat{\mu}_{i,0} \hat{a}_0 + \hat{\mu}_{i+1,0} \hat{a}_1 + \dots + \hat{\mu}_{i+M,0} \hat{a}_M = \hat{\mu}_{i,1}, \quad i=0, 1, 2, \dots, M, \quad (5.192)$$

ahol:

$$\hat{\mu}_{i,j} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N u_k^i z_k^j \quad (5.193)$$

egyenletrendszer megoldásával nyerjük.

A többdimenziós, 1-nél magasabb fokú regressziós felület tapasztalati úton (megfigyelések alapján) történő származtatása az (5.192)-nél lényegesen bonyolultabb feladat, hiszen az egyes független változók hatványain túl, azok szorzatait is figyelembe kell venni. Az s -dimenziós M -ed fokú közelítő regressziós felület a következő:

$$z_M = u_1 = \alpha_{10}e + \alpha_{12}u_2 + \alpha_{13}u_3 + \dots + \alpha_{1s}u_s + \alpha_{122}u_2^2 + \dots \\ \dots + \alpha_{123}u_2u_3 + \dots + \alpha_{1s \dots s}u_s^M, \quad (5.194)$$

ill. az (5.186) alakban:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ \vdots \\ u_{1N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_{21} & u_{31} & \dots & u_{s1} & u_{21}^2 & \dots & u_{s1}^M \\ 1 & u_{22} & u_{32} & \dots & u_{s2} & u_{22}^2 & \dots & u_{s2}^M \\ 1 & u_{23} & u_{33} & \dots & u_{s3} & u_{23}^2 & \dots & u_{s3}^M \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 1 & u_{2N} & u_{3N} & & u_{sN} & u_{2N}^2 & \dots & u_{sN}^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{1s} \\ a_{122} \\ \vdots \\ a_{123} \\ \vdots \\ a_{1s \dots s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ \vdots \\ n_N \end{bmatrix}. \quad (5.195)$$

Az (5.194) közelítő függvényben szereplő regressziós együtthatók származtatása az előbbiekhöz hasonlóan az (5.192), ill. az általános (5.169) összefüggés szerint történik.

Hangsúlyozzuk ismételten, hogy (az előbbi megjegyzésben elmondottaknak megfelelően) az általános (5.169) megoldásban szereplő $U^T U$ és $U^T z$ mátrixok nem az u és z egyszerű változóknak, hanem az (5.194) modellben szereplő hatványainak és szorzatának az empirikus auto- és keresztkovariancia mátrixai.

Megjegyzés: A regresszió kiszámításához használt megfigyelések nem szükségképpen azonos mértékben megbízhatók. Az (5.145) hibavektor modellezésénél színes zaj (l. 3.5.1. pont) esetével is foglalkoznunk kell. A színes zaj modellje itt azt az a priori ismeretet fejezi ki, miszerint a megfigyelések eltérő szórásúak (vannak „pontosabb” és „kevésbé pontosabb” megfigyelések) és korreláltak. Ilyenkor:

$$\text{var}(\mathbf{n}) = \Sigma_{n,n} \neq I\sigma^2 \quad (5.196)$$

és (l. 3.4.2. pont, súlyozott legkisebb négyzetes hibájú lineáris becslés):

$$\hat{\alpha} = (U^T \Sigma_{n,n}^{-1} U)^{-1} U^T \Sigma_{n,n}^{-1} z, \\ \text{var}(\hat{\alpha}) = (U^T \Sigma_{n,n}^{-1} U)^{-1}. \quad (5.197)$$

Tapasztalati regresszióval kapcsolatos hibaszámítás

Mivel $\hat{\alpha}$ a megfigyelésekből származtatott mennyiség, lényeges a becslés hibájának meghatározása. A hibaszámítás akkor végezhető el, ha az n megfigyelési zaj statisztikai tulajdonságait rögzítjük, mivel csak ilyenkor tudjuk kiértékelni az ε_z hiba (5.146) szerinti kifejezését.

Tételezzük fel, hogy a megfigyelési zaj normális eloszlású [l. (3.108)]. A 3.4.2. pont eredményei alapján tudjuk, hogy az $\hat{\alpha}$ vektor elemei lineáris, torzítatlan, minimális varianciájú becslései az egyes regressziós együtthatóknak. A normális eloszlásra vonatkozó a priori ismeret lényegtelen volt az (5.169) becslés származtatása szempontjából, ha a hibák azonban mégis normális eloszlásúak, az (5.169) becslés egyben a maximum likelihood becslés is (l. 3.4. szakasz). A normális eloszlás feltételezése igen lényeges a Student-féle t -eloszlásra támaszkodó, a regressziós együtthatókra és egyesre vonatkozó konfidenciaintervallumok előállításánál.

Az $\hat{\alpha}$ becslések és az u_k megfigyelési vektor ismeretében (ahol u_k az U mátrix k -adik sora) tekintsük először a $z_{M,k}$ közelítő függő változó:

$$\hat{z}_{M,k} = u_k^T \hat{\alpha} \quad (5.198)$$

becslését.

A $\hat{z}_{M,k}$ becslés varianciája:

$$\text{var}(\hat{z}_{M,k}) = u_k^T \text{var}(\hat{\alpha}) u_k = u_k^T (U^T U)^{-1} u_k \sigma^2. \quad (5.199)$$

A σ^2 szórás, ha ismeretlen, anna $s_{\varepsilon_z}^2$ becslésével helyettesíthjük [v jelenti a szórásbecslés előállításához felhasznált független véletlen változók számát (l. 5.2. szakasz)].

Az (5.197) és (5.199) varianciák ismeretében szerkesszük meg a jósolt $\hat{z}_{M,k}$ és az egyes $\hat{a}_i$ regressziós együtthatóbecslések konfidenciaintervallumait. Mivel a

$$\frac{\hat{z}_{M,k}}{\sqrt{\text{var}(\hat{z}_{M,k})}} \quad \text{és} \quad \frac{\hat{a}_i}{\sqrt{\text{var}(\hat{a}_i)}} = \frac{\hat{a}_i}{\sqrt{[\text{var}(\hat{\alpha})]_{ii}}}, \quad (5.200)$$

(ahol a $[\text{var}(\hat{\alpha})]_{ii}$ a $\text{var}(\hat{\alpha})$ varianciamátrix főátlóján helyezkedő i -edik elem) véletlen változók *Student*-eloszlásúak (l. 5.2. szakasz) — $s_{n,v}^*$ szórását figyelembe véve, a $100(1-\varepsilon)\%$ -os megbízhatósági szinthez tartozó konfidenciaintervallumok a következők:

$$\hat{z}_{M,k} \pm t_{v, 1-\varepsilon} s_{n,v}^* \sqrt{\mathbf{u}_k^T (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{u}_k} \quad (5.201)$$

és

$$\hat{\alpha}_i \pm t_{v, 1-\varepsilon} s_{n,v}^* \sqrt{[(\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1}]_{ii}}.$$

Illusztráljuk az elhangzottakat egy egyszerű példával.

5.3. példa: (Hibaszámítás egydimenziós lineáris regresszió esetében)

Tekintsük közelebbről az egydimenziós lineáris regresszió szerinti összefüggést:

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^N u_i \\ \sum_{i=1}^N u_i & \sum_{i=1}^N u_i^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}^T \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N z_i \\ \sum_{i=1}^N u_i z_i \end{bmatrix}, \quad (5.202)$$

$$(\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} = \frac{1}{N \sum_{i=1}^N (u_i - \hat{\mu}_u)^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N u_i^2 & -\sum_{i=1}^N u_i \\ -\sum_{i=1}^N u_i & N \end{bmatrix} \quad (5.203)$$

és:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_0 \\ \hat{\alpha}_1 \end{bmatrix} &= (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{z} = \frac{1}{N \sum_{i=1}^N (u_i - \hat{\mu}_u)^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N u_i^2 & \sum_{i=1}^N z_i - \sum_{i=1}^N u_i \sum_{i=1}^N u_i z_i \\ -\sum_{i=1}^N u_i & \sum_{i=1}^N z_i + N \sum_{i=1}^N u_i z_i \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\mu}_z - \hat{\mu}_u \cdot \hat{\rho} \frac{s_z^*}{s_u^*} \\ \hat{\rho} \frac{s_z^*}{s_u^*} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.204)$$

A becslés varianciája:

$$\text{var}(\hat{\alpha}) = s_{n,v}^{*2} \begin{bmatrix} \frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} \frac{\hat{\mu}_u^2}{s_u^{*2}} & -\frac{\hat{\mu}_u}{(N-1)s_u^{*2}} \\ -\frac{\hat{\mu}_u}{(N-1)s_u^{*2}} & \frac{1}{(N-1)s_u^{*2}} \end{bmatrix}. \quad (5.205)$$

Legyen $\mathbf{u}_k^T = [1 \ u_k]$, ezzel a függő változó becslése:

$$\begin{aligned} \hat{z}_{M,k} &= \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \cdot u_k \\ \text{var}(\hat{z}_{M,k}) &= [1 \ u_k] (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ u_k \end{bmatrix} \cdot s_{n,v}^{*2} = s_{n,v}^{*2} \left(\frac{1}{N} + \frac{(u_k - \hat{\mu}_u)^2}{(N-1)s_u^{*2}} \right). \end{aligned} \quad (5.206)$$

A jelenséget az 5.20. ábra szemlélteti, amelyen feltüntettük a regressziós egyenes 100(1- ε)% megbízhatósági szinthez tartozó konfidenciahatárait.

$$\text{var}(\hat{z}_k) = s_{n,v}^{*2} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{N} + \frac{(u_k - \hat{\mu}_u)^2}{(N-1)s_u^{*2}} \right), \quad (5.207)$$

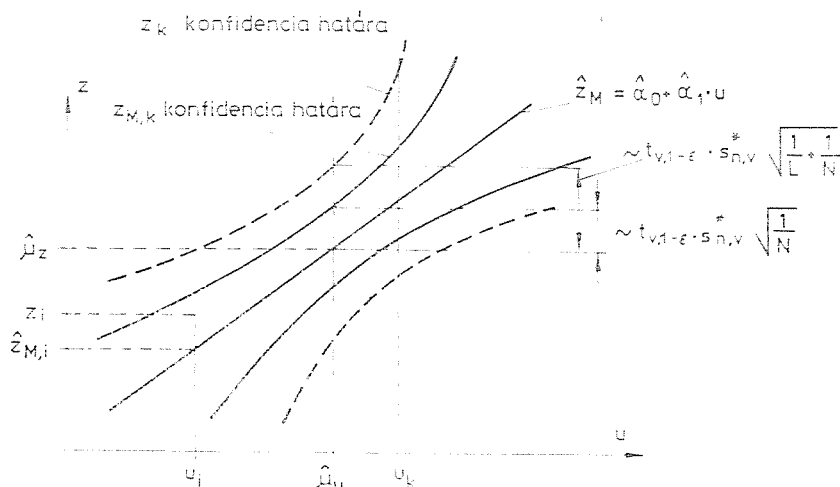
A két konfidenciaintervallum részletesen kiírva:

$$\hat{z}_{M,k} \pm t_{v, 1-\alpha} \cdot S_{n,v}^* \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{(u_k - \hat{\mu}_u)^2}{(N-1)S_u^{*2}}}, \quad (5.208)$$

$$\hat{\mu}_{z_k} \pm t_{v, 1-\alpha} \cdot S_{n, v}^* \sqrt{\frac{1}{L} + \frac{1}{N} + \frac{(u_k - \hat{\mu}_u)^2}{(N-1)S_u^{*2}}}.$$

Ha pedig az α_1 együtthatót vizsgáljuk, akkor

$$\text{var}(\hat{a}_1) = \frac{s_{n,v}^{*2}}{(N-1)s_{n,v}^{*2}} \quad (5.209)$$

$$\hat{\alpha}_1 \pm t_{v, 1-\varepsilon} \cdot \frac{S_{n, v}^*}{(N-1)S_{n, v}^*}. \quad (5.210)$$


5.20. ábra. A variancia és a tapasztalati regressziós egyenes

5.5. Mérési hibák és hibaszámítás

A 3. és 4. fejezetben megismerkedtünk néhány olyan módszerrel, amik segítségével optimális mérési eljárások származtathatók. Láttuk, hogy a mérési eljárás optimalitását mindig a mérendő jellemzőre vonatkozó valamilyen hibakritérium alapján értelmezzük, tehát a mérési hiba és az optimális mérési eljárás fogalma közvetlen kapcsolatban vannak egymással. A mérési hiba természetesen nemcsak a mérésselméletnek, hanem a gyakorlati méréstechnikának is központi fogalma. Ennek megfelelően a gyakorlati méréstechnika oldaláról is kialakult a mérési hibához kapcsolódó fogalomkészlet és hibaszámítási technika, aminek megvan a mérésselméleti értelmezése. A következőkben röviden összefoglaljuk ezeket a fogalmakat és hibaszámítási módszereket, amik gyakran mint szabványosított metrológiai alapfogalmak jelennek meg.

5.5.1. A mérési hibával kapcsolatos fogalmak

Minden mérés, elvi vagy gyakorlati okok miatt, hibával terhelt. A mérési hibák származhatnak a megfigyelés és mérés körülményeiből, a mérőeszköz tulajdonságaiból, a mérési folyamatot befolyásoló külső zavarokból. E hibaforrások eredménye a mérési hiba, ami az ideális mérési eredménytől vett eltérés mértéke. A mérési hibának a következő típusait különböztetjük meg:

Az *abszolút hiba* a mérési eredmény és a helyes érték közötti különbség értéke. Egy mérési eljárásnál az abszolút hiba becslését a konfidencia számításnál tárgyalt módon határozhatjuk meg.

A *relatív hiba* (h) az abszolút hiba és egy referencia-érték hányadosa, amit általában 100-zal megszorozva százalékos alakban szokták megadni. Az abszolút és a relatív hibát használjuk mérőeszközök és módszerek jellemzésére. Az, hogy melyiket célszerű alkalmazni, a hibaforrás jellegétől függ.

Ha a zaj elektronikus eredetű, ha csapágysúrlódás az oka, vagy egy digitális műszer kvantálási hibájáról van szó, akkor az abszolút hiba megadása az egész mérési tartományban jellemzi a műszert. Van azonban olyan eset, amikor a relatív hiba állandó a mérési tartományban. Ez figyelhető meg pl. akkor, amikor a műszer átvitele ingadozik véletlenszerűen. Egy jobb műszernél mindig megadják, hogy milyen hibafajtáról van éppen szó. Az abszolút hibát gyakran a felső mérési határra (a mérési tartomány legnagyobb értékéhez tartozó mennyiség) vonatkoztatva adják meg. Ez főképpen akkor fordul elő, amikor az állandó relatív hibát okozó fizikai hatás elhanyagolható.

Egy digitális műszer tipikus hibamegadása:

Mérési tartomány: $0 \dots 199,9 \text{ V}$, pontosság $\pm 0,5\% \pm 5$ digit ahol az első hibátag a teljes mérési tartományban érvényes, a mért értékre vonatkoztatott relatív hiba, a második pedig az abszolút hiba. A megadott hibából könnyű kiszámolni egy mérés relatív hibáját:

pl. $u = 50 \text{ V}$ esetén a relatív hiba

$$h = 0,5\% + \frac{0,5 \text{ V}}{50 \text{ V}} \cdot 100 = 1,5\%.$$

Elektromechanikus műszereknél általában a végkitérésre vonatkoztatott relatív hibát adjuk meg, amit egyben a műszer pontossági osztályának nevezünk. Látható,

hogy a gyakorlati mérés technika abszolút és relatív hiba fogalma alapvetően a skalár, időfüggetlen mennyiségek méréséhez kapcsolódik, becslésméleti háttérüket pedig a konfidenciaszámítás adja.

A *rendszeres hiba* olyan hibatényező, amely egy adott mennyiség, azonos feltételek közötti többszöri mérésekor nagyságára és előjelére nézve állandó marad, vagy a feltételek megváltozásakor ismert törvényszerűségek szerint változik. A rendszeres hiba fogalma közel megegyezik a becslésmélet „torzítás” fogalmával, de nem tartozik hozzá az olyan torzítás, ami előre nem határozható meg. Ezt a részt összevonjuk a véletlen hibákkal. A rendszeres hibával ennek megfelelően korrigálható a mérési eredmény, így a rendszeres hiba elvileg eliminálható.

A *véletlen hiba* az a hibakomponens, aminek konkrét nagyságát egy mérés elvégzésekor megjósolni nem tudjuk, így azzal korrigálni nem lehet. A véletlen hibát többnyire mint konfidenciaintervallumot adjuk meg.

Az időfüggetlen hibákat *statikus hibának* nevezzük. A statikus hiba használható az időfüggetlen mennyiségek mérésénél, amikor a mérőeszköz kimenetét már stabil állapotában nézzük, a mérési idő tehát a mérőeszköz tranziens idejénél nagyobb.

A *dinamikus hibáknál* a hiba időfüggvény. Általában dinamikus hibát kell figyelembe venni időfüggő mennyiségek mérésénél és a mérőeszközök tranziens viselkedésének leírásánál.

A felsorolt hibafogalmakhoz kapcsolódik még néhány mérés technikai alapfogalom, ami a mérőeszközök leírásánál szabványosítva van.

Befolyásoló mennyiségek

Egy mérőműszertől nem várhatjuk el, hogy bármilyen körülmények között a megadott pontossággal mérjen. Legszenvedelmesebb a hőmérséklet hatása: a klasszikus elektromechanikus és a modern elektronikus műszerek működését egyaránt befolyásolja a környezet hőmérséklete. Ha a hőmérséklet igen nagy vagy igen kicsi, a műszer nem működik tovább, tönkre is mehet. Ha a hőmérséklet megváltozása nem ilyen szélsőséges, a műszer üzemképes marad, de a pontossági előírásokat nem teljesíti. Kell azonban, hogy a szobahőmérséklet körül legyen olyan intervallum, ahol a műszer teljesíti pontossági előírásait. Ha ez nem így lenne, a műszer mérésre alkalmatlan lenne, hiszen nulla terjedelmű intervallumon kívül már nem ismernénk pontosságát.

A szabvány befolyásoló mennyiségnek nevezi a mérés tárgyát nem képező mennyiséget, mely megváltoztatja a mérőműszer értékmutatását. A leggyakoribb befolyásoló mennyiségek: hőmérséklet, külső mágneses és villamos tér, jelek hullámformája, segédjellemzők értéke, használati helyzet.

Referenciafeltételeknek nevezik a befolyásoló mennyiségek értékhatárait, amelyek mellett a mérőműszerek mérés technikai jellemzői értelmezve vannak. Pl. egy elektromechanikus műszer referencia-hőmérséklettartománya: $20\text{ °C} \pm 1\text{ °C}$. A legelterjedtebb elektromechanikus műszerek befolyásoló mennyiségeinek referenciatartományait szabványok rögzítik.

Ha egy befolyásoló mennyiség kilép referenciatartományából, természetesen az még nem jelenti azt, hogy a műszer használhatatlanná válik. Az értékmutatás megváltozása a befolyásoló mennyiségek által a mérendő mennyiségben okozott változás, ha a mérőeszközt nem a referenciafeltételek között használjuk. Ha ezt számszerűen megadják, akkor a referenciatartományon kívül is meg tudjuk adni mérésünk hibáját. Természetesen nem távolodhatunk el bármilyen messzire a referenciatartománytól: a befolyásoló mennyiség egy meghatározott értékétől a hibaváltozás nemlineáris

válí, tovább már nem számítható. A befolyásoló mennyiségeknek azt a határát, ameddig a hibaváltozási összefüggés megadható, névleges használati tartománynak nevezik. Az elektromechanikus műszereknél ezeket a határokat is részletesen megadják a szabványok. A névleges használati tartományon túl egyes szabványok még a következő tartományokat definiálják (Standard Process Instrumentation Terminology. ISA—551 · 1/1976):

Névleges működési tartomány a befolyásoló mennyiségek azon tartománya, melyben a műszer még üzemképes. Például, egy meghatározott hőmérséklet alatt lezárhatnak a műszerben levő félvezetők, és a bemenetre nem reagál többé a kimenet.

A szállítási és tárolási tartomány a befolyásoló mennyiségek azon határa, melyet túllépve a műszer kikapcsolt állapotban is tönkremehet. Például túl nagy hőmérsékleten elolvadhatnak alkatrészek.

A szabványok még két további hibajellemzőt vezetnek be:

A mérőműszer ismétlőképessége: ugyanazon mérendő mennyiségen végzett több, megismételt méréssel kapott mérőszámok egymással való megegyezése, ha a méréseket egyforma feltételek mellett végezték:

- ugyanazzal a mérőműszerrel,
- ugyanaz a személy, ugyanabban a helyiségben,
- rövid idő alatt, egymást követően,
- a befolyásoló mennyiségeknek a gyakorlatnak megfelelő értékei mellett és
- a rendszeres hibák figyelmen kívül hagyásával.

Az ismétlőképesség az adott műszerpéldány adott időszakban mérhető véletlen hibájára ad felvilágosítást. Az ismétlőképességet pl. a mért eredményekből számított konfidenciaintervallummal jellemezhetjük. Egy jól beállított és ép műszernél remélhetjük, hogy a példány hibáját leíró ismétlőképesség konfidenciaintervalluma kisebb, mint a műszer specifikált konfidenciaintervalluma.

Mérőműszertípus reprodukálóképessége: ugyanezen mérendő mennyiségen végzett több méréssel kapott mérőszámok egymással való megegyezése, ha az egyes méréseket különböző feltételek mellett végezték:

- ugyanazon műszertípus különböző darabjaival,
- különböző személyek, különböző helyeken,
- a mérések tartamához képest elég nagy időkülönbséggel,
- a befolyásoló mennyiségek a névleges használati tartományban és
- a rendszeres hibák figyelmen kívül hagyásával.

A reprodukálóképességet szintén az értékmutatásokból számított konfidenciaintervallummal jellemezhetjük. A reprodukálóképesség láthatóan nem csak a műszer hibáját, hanem az értékmutatásnak a befolyásoló mennyiségek hatására létrejövő megváltozásait is magában foglalja.

A mérési hibák típusainak és a hibákhoz kapcsolódó fogalmaknak az áttekintése után áttérünk a gyakorlati hibaszámítás egy fontos területének vizsgálatára.

5.5.2. Hibaszámítási módszerek

Mint a bevezetésben említettük, a mérési hiba a méréelmélet központi fogalma, hiszen a méréelméleti módszerek rendre arra irányulnak, hogy minél kisebb hibájú mérési eljárásokat tudjunk tervezni. Nem meglepő ezért, hogy a „hibaszámítási módszerek” című alatt, megfelelő csoportosítással fel lehetne sorakoztatni valamennyi eddig tárgyalt témakört. A lehetséges hibamodellekre ugyanis a jel- és rendszerelmélet nyújt

megfelelő apparátust, a mérési eljárások 3. és 4. fejezetekben tárgyalt tervezési módszerei egyben magukban foglalják a hibák meghatározásának módját is, és az 5. fejezetben tárgyalt átlagolás, konfidenciaszámítás a hibakiértékelés legismertebb eljárásai.

A hibaszámítással kapcsolatban a következő általános megjegyzéseket tehetjük.

1. A hibaszámításnál világosan el kell határolnunk — legalább koncepcionálisan — a mérési hibát és a modellezési hibát. A méréselmélet által nyújtott hibaszámítási módszerek alapvetően a mérési hiba meghatározását teszik lehetővé, ami természetesen lehet előfeltétele a modellezési hiba becslésének is.

2. A hibaszámítás alapvető módszerei az *analitikus* és az *empirikus* módszerek. Az analitikus hibaszámítást akkor alkalmazhatjuk, mikor ismerjük pontosan a mérési eljárást, és így lehetőségünk van arra, hogy adott modell mellett kiszámítsuk a mérési eredmény hibajellemzőit. Az analitikus módszerre egy példa az átlagolás tulajdonságainak vizsgálata a középérték becslésénél (5.1. szakasz), de ide sorolhatók a regressziószámítás hibájával foglalkozó témakörök is.

Az empirikus módszerek a definiált mérési hiba meghatározott jellemzőit becsülik a mérési eredmények kiértékelése alapján. Az empirikus hibaszámítási eljárás megtervezése tehát egy szokásos mérési eljárás tervezési problémára vezethető vissza, aminek alaplószereivel a 3. és 4. fejezetben foglalkoztunk. Jól ismert, elemi példa erre a mérési sorozatok középértékének maximum likelihood becslése, ami a 3. fejezet egyik mintapéldája volt.

Ezek az általános megjegyzések túl azonban érdemes konkrétan foglalkoznunk az analitikus hibaszámítási módszerek egy igen elterjedt típusával, az úgynevezett hibaterjedési összefüggésekkel.

A mérési feladatok egy részénél a mérendő paramétert egy vagy több közvetlenül megfigyelhető vagy mérhető mennyiség függvényeként határozzuk meg. Ha tehát y a mérendő paraméter és $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ a közvetlenül mérhető mennyiségek, akkor

$$y = y(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (5.211)$$

Az úgynevezett hibaterjedési probléma — vagy ahogy itt nevezzük, a gyakorlati hibaszámítás — alapkérdése, hogy amennyiben ismerjük az $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ mennyiségek mérési hibáját, hogyan határozhatjuk meg az y számított paraméter hibáját? A kérdést a rendszeres és véletlen hibák esetére külön válaszoljuk meg.

Hibaterjedés rendszeres hibáknál

Tételezzük fel, hogy az $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ mennyiségekre vonatkozó relatív rendszeres hiba kicsi. Ekkor az y megváltozása felírható teljes differenciaként, tehát

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|_{x_1=x_{10}} \Delta x_i, \quad (5.212)$$

$$y_0 = y(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}), \quad (5.213)$$

ahol y_0 és $[x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}]$ az y és $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ mennyiségek aktuális értékei. A relatív hiba pedig

$$\frac{\Delta y}{y_0} = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|_{x_1=x_{10}} \frac{\Delta x_i}{y_0}. \quad (5.214)$$

Az összefüggésekben szereplő differenciálhányadosok a differenciálási szabályok alapján meghatározhatók, vagy megfelelő matematikai kézikönyvekből kikereshetők. Az

(5.214) összefüggés alkalmazásának feltétele, hogy az $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ függvény a vizsgált hely környezetében sima legyen, továbbá a Δx_i változások ne legyenek nagyok, mert ekkor a teljes differencia közelítési hibája kicsi. Ha ezek a feltételek nem teljesülnek, akkor a függvény pontos kiértékelésével, azaz a hibával terhelt $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ értékek behelyettesítésével kaphatjuk meg az eredményt.

Hibaterjedés véletlen hibáknál

Ha az $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ mennyiségek véletlen hibával terheltek, akkor úgy tekinthetők mint valószínűségi változók. Ennek megfelelően az y mérendő mennyiség is valószínűségi változó, hiszen valószínűségi változók függvényeként állítjuk elő. Mint tudjuk, y tulajdonságait valószínűség eloszlás-, vagy sűrűségfüggvénye írja le, aminek származtatása akkor végezhető el, ha ismert az $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ mennyiségek együttes eloszlása.

Az esetek egy részében feltételezhetjük, hogy $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ egymástól függetlenek. Ekkor, ha az y függvényt az y_0 hely környezetében teljes differenciájával (5.212) közelítjük, szórásnégyzetének meghatározására alkalmazhatjuk a valószínűségelmélet ismert tételét. Eszerint, a független valószínűségi változók lineáris kombinációjának szórásnégyzete úgy határozható meg, hogy vesszük a szórásnégyzeteknek a lineáris kombináció együtthatói négyzetével súlyozott összegét, tehát:

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n \left[\left. \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|_{x_i=x_{i0}} \right]^2 \sigma_{x_i}^2. \quad (5.215)$$

Ha a véletlen hibát a szórások konstansszorosával származtatott konfidenciaintervallummal írjuk le, akkor

$$\Delta y = \left[\sum_{i=1}^n \left[\left. \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|_{x_i=x_{i0}} \right]^2 \Delta x_i^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.216)$$

ill. a relatív értéket felírva

$$\frac{\Delta y}{y} = \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\left. \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|_{x_i=x_{i0}} \frac{\Delta x_i}{y} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (5.217)$$

Látható, hogy ezen összefüggések csak akkor alkalmazhatók, ha az $x_1, x_2, \dots, x_n$ változók függetlenek.

Megjegyzések

1. Amennyiben az $y = y[x_1, x_2, \dots, x_n]$ kapcsolat az $x_1, x_2, \dots, x_n$ mennyiségek függvényeinek szorzataként írható fel,

$$y = f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n)$$

alakban, akkor az $\ln$ operációt alkalmazva:

$$\ln y = \sum_{i=1}^n \ln f_i(x_i) \quad (5.218)$$

és mindkét oldalon deriválva és a változásokat összegezve

$$\frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^n \frac{f'_i(x_i)}{f_i(x_i)} \Delta x_i \quad (5.219)$$

alakot kapjuk, amely megegyezik az (5.214), ill. értelemszerűen az (5.216) formulákkal, de számítástechnikailag egyes esetekben egyszerűbb megoldást ad.

2. A sztochasztikus modell alapján megadott (5.216) és (5.217) összefüggések feltételezik az $x_1, x_2, \dots, x_n$ mérési eredmények függetlenségét, valamint a konfidencia-intervallum becslésénél a valószínűségeloszlás ismeretét. Mivel ezeknek az előfeltételeknek fennállása sok esetben nem egyértelmű, gyakran használják a relatív hiba becslésénél a

$$\frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|_{x_i=x_{i0}} \frac{\Delta x_i}{y} \quad (5.220)$$

formulát, amely az egyes hibaösszetevők abszolút értékének összegezését fejezi ki. Ennek a kifejezésnek nincs egzakt matematikai háttere, de mivel azonos körülmények között nagyobb hibát eredményez, mint az (5.217) összefüggés, egyes esetekben „megnyugtatóbb” becslést ad.

3. A hibakifejezésekben szereplő $\frac{\partial y}{\partial x_i} \Big|_{x_i=x_{i0}}$ alakú súlyfaktor azt mutatja, hogy az egyes paraméterek mérési hibája milyen súllyal jelenik meg a hibák összegezésében. Ezért ez segítséget nyújthat a mérés tervezésében abból a szempontból, hogy az egyes paraméterek közül melyik mérési hibája milyen mértékben befolyásolja a számított mérési eredményt.

5.4. példa

a) Vizsgáljuk az

$$y = x_1^n x_2^m$$

összefüggésben az y relatív hibáját, amennyiben x_1 és x_2 relatív hibája ismert *rendszeres* hiba, tehát nagysága és előjele is *ismert*.

Az (5.214) szerint

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{n x_1^{n-1} x_2^m}{x_1^n x_2^m} \Big|_{x_1=x_{10}} \Delta x_1 + \frac{x_1^n m x_2^{m-1}}{x_1^n x_2^m} \Big|_{x_2=x_{20}} \Delta x_2 = n \frac{\Delta x_1}{x_{10}} + m \frac{\Delta x_2}{x_{20}}.$$

Egyszerűbben jutunk ugyanerre az eredményre az (5.218), ill. (5.219) összefüggések alkalmazásával:

$$\ln y = n \ln x_1 + m \ln x_2,$$

és ebből közvetlenül adódik:

$$\frac{\Delta y}{y} = n \frac{\Delta x_1}{x_{10}} + m \frac{\Delta x_2}{x_{20}}.$$

Amennyiben x_1 és x_2 hibája véletlen hiba, alkalmazható a sztochasztikus hibamodell az (5.217) szerint:

$$\frac{\Delta y}{y} = \left[\left(n \frac{\Delta x_1}{x_{10}} \right)^2 + \left(m \frac{\Delta x_2}{x_{20}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Végül ha az előző *Megjegyzések* 2. esete forog fenn, akkor

$$\frac{\Delta y}{y} = \left| n \frac{\Delta x_1}{x_{10}} \right| + \left| m \frac{\Delta x_2}{x_{20}} \right|$$

összefüggés adhat elfogadható, ill. az előzőnél „megnyugtatóbb” becslést.

b) Egy Z impedancián fellépő teljesítményt mérjük elektrodinamikus wattmérővel, áram- és feszültségváltó közbeiktatásával. A mérőtranszformátorok rendszeres hibáit (áttételi- és szöghibáját) ismertnek tételezzük fel. Keressük a teljesítménymérés $\Delta P_2/P_2$ relatív hibáját, amelyet a mérőtranszformátorok rendszeres hibái okoznak. A hibátlanak tekintett wattmérő

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2$$

teljesítményt mutat. Alkalmazva az (5.218) szerinti felírást:

$$\ln P_2 = \ln U_2 + \ln I_2 + \ln \cos \varphi_2$$

az (5.219) szerint

$$\frac{\Delta P_2}{P_2} = \frac{\Delta U_2}{U_2} + \frac{\Delta I_2}{I_2} - \Delta \varphi \operatorname{tg} \varphi_2,$$

ahol $\Delta U_2/U_2$ a feszültségváltó, $\Delta I_2/I_2$ pedig az áramváltó áttételi hibája, φ_2 az U_2 és I_2 közötti fázisszög, $\Delta \varphi$ pedig a mérőtranszformátorok szöghibáinak különbsége a 22.5. ábra szerint.

c) Ismert bizonytalanságú L és C elemekből rezgőkört állítunk össze. Mekkora lesz a rezonanciafrekvencia bizonytalansága?

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$\ln f = - \left[\ln 2\pi + \frac{1}{2} (\ln L + \ln C) \right].$$

Az (5.219) szerint

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2},$$

az (5.220) szerint pedig

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{2} \left[\left| \frac{\Delta L}{L} \right| + \left| \frac{\Delta C}{C} \right| \right].$$

d) Egy derékszögű háromszög a és b befogójából számítjuk az a -val szembenfekvő α szöget. Ha a , ill. b mérési bizonytalansága $\frac{\Delta a}{a}$, ill. $\frac{\Delta b}{b}$, mekkora a számított α szög $\Delta \alpha$ bizonytalansága?

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b},$$

$$\ln \operatorname{tg} \alpha = \ln a - \ln b.$$

Az (5.119) szerint

$$\Delta \alpha = \sin \alpha \cos \alpha \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2},$$

ill. (5.220) szerint

$$\Delta \alpha = \sin \alpha \cos \alpha \left[\left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right| \right].$$

Összefoglalás: Az 5. fejezetben áttekintettük a gyakorlati mérésadatfeldolgozás néhány alapvető módszerét. A vizsgált eljárások, az átlagolás, konfidenciaszámítás, hipotézis tesztek, regressziószámítás és hibaszámítás a méréstechnikai gyakorlat jól ismert módszerei, amik eredményesen alkalmazhatók mélyebb, méréselméleti megalapozás nélkül is. A fejezet célkitűzése az volt, hogy megmutassa ezen módszerek kapcsolódását az általánosabb méréselméleti témakörökhöz és ezzel bizonyos átvezetést nyújtson a méréstechnikai gyakorlat és a méréselmélet között.

Irodalom

Irodalom az 1. fejezethez

- [1.1] *Pfanzagl, J.*: Theory of Measurement. New York, Wiley, 1968.
- [1.2] *Finkelstein, L.*: Fundamental Concepts of Measurement. Measurement and Control, 8, p. 105. 1975.
- [1.3] *Kryntz, D. M.—Luce, R. D.—Suppes, D.—Tversky, A.*: Foundations of Measurement. Vol. 1, New York, 1971.
- [1.4] *Karplus, W. J.*: The Spectrum of Mathematical Modelling and Systems Simulation Mathematics and Computers in Simulation. Vol. XX, N° 1, March, 1977. pp. 3—10.
- [1.5] *Eykhoff, D.*: System Identification, London, Wiley, 1974.
- [1.6] *Fasol, K. H.—Jörgl, M. P.*: Modelling and Identification. Tutorials on System Identification. 5th IFAC-Symposium on Identification and System Parameter Estimation. Darmstadt, F. R. Germany, 1979.

Irodalom a 2. fejezethez

- [2.1] *Franks, L. E.*: Signal Theory. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. 1969.
- [2.2] *Desoer, C. A.—Vidyasagar, M.*: Feedback systems: input-output properties. New York, Academic Press, 1975.
- [2.3] *Papoulis, A.*: Probability, Random Variables, and Stochastic Processes. New York, McGraw-Hill, 1965.
- [2.4] *Papoulis, A.*: Signal Analysis. New York, McGraw-Hill, 1977.
- [2.5] *Randall, R. B.*: Application of B & K Equipment to Frequency Analysis. B & K, Copenhagen, September 1977.
- [2.6] *McCarthy, T. P.*: Stochastic Systems and State Estimations. New York, John Wiley & Sons, 1976.
- [2.7] *MacFarlane, A. G. J.*: Relationships between recent developments in linear control theory and classical design techniques. Measurement and Control, Vol. 8, May 1975.
- [2.8] *Manolsley, D.*: An approach to the mathematical modelling of dynamic systems. Measurement and Control, Vol. 11. May 1978.
- [2.9] *Mesarović M. D.—Takahara, Y.*: General Systems Theory: Mathematical Foundations. New York, Academic Press, 1975.
- [2.10] *Willsky, A. S.*: Relationships Between Digital Signal Processing and Control and Estimation Theory. Proceedings of the IEEE, Vol. 66, N° 9. September 1978. pp. 996—1017.
- [2.11] *Prékopa András*: Valószínűségelmélet. Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1974.
- [2.12] *Bendat, J. S.—Piersol, A. G.*: Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis. New York, John Wiley & Sons, 1980.
- [2.13] *Anderson, B. D. O.—Moore, J. B.*: Optimal Filtering. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1979.

Irodalom a 3. fejezethez

- [3.1] *Eykhoff, P.*: System identification. London, John Wiley and Sons, 1974.
- [3.2] *Anderson, B. D. O.—Moore, J. B.*: Optimal filtering. New Jersey, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, 1979.
- [3.3] *Goodwin, G. C.—Payne, R. L.*: Dynamic system identification. New York, Academic Press, 1977.
- [3.4] *Sage, A. P.—Melsa, J. L.*: Estimation theory with applications to communications and control. New York, Mc-Graw-Hill Book Company, 1971.
- [3.5] *Van Trees, H. L.*: Detection, estimation and modulation theory. Part I. New York, John Wiley and Sons, 1968.
- [3.6] *Isermann, R. (ed)*: Tutorials on system identification. Darmstadt, 5th IFAC-Symposium on identification and system parameter estimation, 1979.
- [3.7] *Swering, P.*: Modern state estimation methods from the viewpoint of the method of least squares. IEEE Trans. on Automat. Contr. Vol. AC—16 pp. 707—719. Dec. 1971.
- [3.8] *Jazwinski, A. H.*: Stochastic processes and filtering theory. New York, Academic Press 1970.
- [3.9] *Deutsch, R.*: Estimation theory. New Jersey, Prentice-Hall. Englewood Cliffs, 1965.

Irodalom a 4. fejezethez

- [4.1] *Anderson, B. D. O.—Moore, J. B.*: Optimal Filtering. Prentice-Hall, Inc. New Jersey Englewood Cliffs, 07632. 1979.
- [4.2] *Kailath, T.*: A View of Three Decades of Linear Filtering Theory. IEEE Trans. Inform. Theory, Vol. IT—20, N° 2. March, 1974, pp. 146—181.
- [4.3] *Kalman, R. E.*: A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. J. Basic Eng., Trans. ASME, Series D, Vol. 982, No. 1, March, 1960, pp. 35—45.
- [4.4] *Luenberger, D. G.*: Optimization by Vector Space Methods. New York, John Wiley & Sons, Inc. 1969.
- [4.5] *Taylor, A. E.*: Introduction to Functional Analysis. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1958.
- [4.6] *Wiener, N.*: Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. New York, John Wiley & Sons, Inc. 1949.

Irodalom az 5. fejezethez

- [5.1] *Cramér, H.*: Mathematical Methods of Statistics. Princeton, Princeton Univ. Press, 1951.
- [5.2] *Draper, N. R.*: Applied Regression Analysis, J. Wiley, N. Y., 1967.
- [5.3] *Korn, G. A., T. M.*: Matematikai kézikönyv műszakiaknak. Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1975.
- [5.4] *Papoulis, A.*: Signal Analysis, McGraw-Hill, 1977.
- [5.5] *Prékopa, A.*: Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal. Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1974.

Kedves Jegyzethasználó!

A jó jegyzet nagyon hatékony segítség a tanulásban. A legjobb jegyzeteket pedig még aktív mérnökként is használni lehet. Egyetemi tanulmányai alatt valószínűleg különböző színvonalú jegyzetekkel találkozott eddig, és fog találkozni ezután. ***Kérjük, hogy ennek a kérdőívnek a kitöltésével segítse alábbi törekvéseinket:***

- ennek a jegyzetnek a következő kiadásában kevesebb sajtóhiba legyen és indokolt esetben készüljön el az átdolgozott kiadása,
- a jegyzeteket értékelni lehessen, amelynek eredményeként a legjobb jegyzetek szerzői nívódíjat kaphatnak.

Kérjük, hogy a kiküldött kérdőívet a Jegyzetbolt bejárata (V₂ földszint) mellett elhelyezett gyűjtőládába dobja be.

Fáradozását köszöni az *Egyetemi Jegyzetbizottság*.

A jegyzet címe: **JELEK ÉS RENDSZEREK MÉRÉSTECHNIKÁJA I.**

A jegyzet szerkesztője: **Schnell László**

A jegyzet azonosítója: **51435**

Melyik tárgyhoz használta a jegyzetet:

Kar:

Félév:

Tárgy neve:

A jegyzet hány százalékát tudta használni (pl. 75 %):

A jegyzet a tárgy anyagának hány százalékát fedte le (pl. 50%):

A jegyzet minősítése:

(0: használhatatlan, 1: nagyon rossz, 2: rossz, 3: tűrhető, 4: jó, 5: nagyon jó)

Javaslat átdolgozásra:

A megtalált sajtóhibák:

(a túloldalon folytatható)

51435

