① Z_n Galton-Watson elágazó folyamat, melynek egylépéses utódszámeloszlása

k	0	1	2
$\mathbb{P}(k$ utód$)$	$1/4$	$1/4$	$1/2$

Így ennek generátorfüggvénye $g(z)=\frac{1}{4}\cdot z^0+\frac{1}{4}z^1+\frac{1}{2}z^2$

várható értéke $m=\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 2$:

$$g(z)=\frac{1+z+2z^2}{4}, \quad m=\frac{5}{4}$$

a.) $\boxed{g_{Z_1}(z)=g(z)=\frac{1+z+2z^2}{4}}$

b.) $r_n:=\mathbb{P}(Z_n=0)$ jelöléssel $r_0=0$

$$r_1=g(r_0)=g(0)=\frac{1}{4}$$

$$r_2=g(r_1)=g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}+2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{8+2+1}{8}=\frac{11}{32}$$

$$\boxed{r_2=\mathbb{P}(Z_2=0)=\frac{11}{32}}$$

c.) A kihalás valószínűségét keressük. Mivel $m>1$ (a folyamat szuperkritikus), $\mathbb{P}(\text{kihalás})<1$, és számolni kell: $z=g(z)$ egyenlet megoldását keressük.

$$z=\frac{1+z+2z^2}{4} \Rightarrow 4z=1+z+2z^2$$

$$0=2z^2-3z+1=(z-1)(2z-1)$$

$$z=1 \qquad z=\frac{1}{2}$$

A kihalás val.sége a legkisebb nemnegatív gyök: $\boxed{\mathbb{P}(\text{kihalás})=\frac{1}{2}}$

d.) $m>1$ miatt $\boxed{EN=\infty}$

(2.) Legyen X_i az i-edik csomag tömege kg-ban, ezek ftl. valószínűségi változók $i=1,\dots,n$-re

$n=3700$ a teljes csomag-szám

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ az össztömeg. A feladat $\mathbb{P}(S_n > 9700)$ becslése.

Az X_i-k nem azonos eloszlásúak, így a Cramér tétel nem használható,

viszont korlátosak, így a Hoeffding-egyenlőtlenség használható.

$a_i \le X_i \le b_i$, ahol $a_i = 0$ minden i-re, és

$$b_i = \begin{cases} 2, & 2500 \text{ db } i\text{-re} \\ 5, & 1000 \text{ db } i\text{-re} \\ 25, & 200 \text{ db } i\text{-re.} \end{cases}$$

A várható értékek is ismertek: $\mathbb{E}X_i = \begin{cases} 1, & 2500 \text{ db } i\text{-re} \\ 3, & 1000 \text{ db } i\text{-re} \\ 17, & 200 \text{ db } i\text{-re} \end{cases}$

Ezekből $\mathbb{E}S_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i = 2500\cdot 1 + 1000\cdot 3 + 200\cdot 17 =$

$= 2500 + 3000 + 3400 = 8900$

és $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2 = 2500\cdot(2-0)^2 + 1000\cdot(5-0)^2 + 200\cdot(25-0)^2 =$

$= 10000 + 25000 + 125000 = 160000$

ezért $t = 800$ választással $9700 = \mathbb{E}S_n + t$, és

$$\mathbb{P}(S_n > 9700) = \mathbb{P}(S_n > \mathbb{E}S_n + t) \overset{\text{Hoeffding}}{\le} \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}\right) = e^{-\frac{2\cdot 800^2}{160000}} = e^{-8}$$

vagyis $\boxed{\mathbb{P}(\text{túlterhelt}) \le e^{-8} \approx 0.000335}$

Info MSc MatD Sztochasztika 2 pótpótZH 3. feladat megoldókulcs 2014.05.29

X_t véges állapotterű születési-halálozási folyamat. Az időt percben mérjük, így a felfelé ugrás rátája (autó jön) mindig $\frac{1}{5}$, hacsak nem tele van a parkoló, a lefele ugrás rátája (autó megy) pedig az i állapotból $i \cdot \frac{1}{5}$, $i = 0, 1, 2, 3$.

a.) Az állapottér $S = \{0; 1; 2; 3\}$, a generátor

$$A = \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 1/5 & -2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & -3/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 3/5 & -3/5 \end{pmatrix}.$$

b.) A születési-halálozási folyamat stacionárius eloszlása a szomszédos állapotoknak olyan relatív súlyt ad, ami reciproka az egymásba való átugrások rátái arányának. Vagyis $\pi_0 : \pi_1 = 1 : 1$, $\pi_1 : \pi_2 = 2 : 1$, $\pi_2 : \pi_3 = 3 : 1$,. Összesítve $\pi_0 : \pi_1 : \pi_2 : \pi_3 = 6 : 6 : 3 : 1$. Az aránysort lenormálva

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{6}{16} & \frac{6}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

Persze ugyanez jön ki, ha megoldjuk az $A^T \pi^T = 0$ egyenletrendszert (**a transzponálás nagyon fontos**), vagyis azt, hogy (az átláthatóság kedvéért 5-tel végigszorozva)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

c.) Hosszú idő elteltével a kiindulási állapottól függetlenül a stacionárius eloszlással közelítünk: $\mathbb{P}(X_t = 0 \mid X_0 = 0) \approx \pi_0 = \frac{6}{16} = 37.5\%$.

d.) Az ergodtétel értelmében az időátlag a stacionárius eloszlás szerinti várható érték, vagyis

$$\sum_{i \in S} i \cdot \pi_i = 0 \cdot \frac{6}{16} + 1 \cdot \frac{6}{16} + 2 \cdot \frac{3}{16} + 3 \cdot \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \approx 0.94.$$

(Ha valaki mindenáron az állapottéren értelmezett valós értékű függvényre akarja az ergodtételt alkalmazni, tekintse az $f : S \to \mathbb{R}$, $f(i) = i$ függvényt.)

e.) A parkoló az idő $\pi_3 = \frac{1}{16}$-ában van tele, tehát az autósoknak pontosan azt az $\frac{1}{16}$-át azaz 6.25%-át veszítjük el, aki ezalatt jön. Másképpen számolva: percenként átlagosan $\frac{1}{5}$ autós jön arra, de a Markov lánc felfelé ugrásainak száma (vagyis a ténylegesen leparkoló autók száma) időátlagban csak $\pi_0 A_{01} + \pi_1 A_{12} + \pi_2 A_{23} = (\pi_0 + \pi_1 + \pi_2) \cdot \frac{1}{5} = \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{5}$, vagyis az arra járó autók $\frac{1}{16}$-oda nem parkol le.