INFOANALÍZIS2 4.SZIGORLAT

2016 december 02.

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
max. pontszám	10	10	10	10	10	50
elért pontszám						

NÉV
NEPTUN KÓD

1. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y) = \frac{x}{y-x}.$$

Legyen $f(0,0) = 0$. Milyen irányban létezik az iránymenti derivált az origóban?

2. Feladat. Határozzuk meg az f parciális deriváltjait ahol léteznek.

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2x^3 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3. Feladat. Keressük meg az adott felületnek azon pontjait, ahol az érintősík párhuzamos az adott síkkal, és írjuk fel az érintősík egyenletét ezekben a pontokban!

$$z = x^2 + y^2, \quad S : 2x + 3y - 4z = 0.$$

4. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$y'' - 5y' + 6y = 2xe^x.$$

5. Feladat. Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}, \qquad \text{ahol} \quad k > 0 \quad \text{adott.}$$

1. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y) = \frac{x}{y-x}.$$

Legyen $f(0,0) = 0$. Milyen irányban létezik az iránymenti derivált az origóban?

Megoldás. Első megoldás: Az y-tengely mentén a függvény azonosan nulla, így az ezzel párhuzamos iránymenti deriváltak nullák $\boxed{\mathbf{2p}}$. Ha az $y = mx$ ($m \neq 1$) egyenes $\boxed{\mathbf{1p}}$ mentén közelítünk $\boxed{\mathbf{3p}}$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f\left(\frac{h}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{mh}{\sqrt{1+m^2}}\right) - 0}{h} \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h(m-1)},$$

és ez a limesz nem véges $\boxed{\mathbf{1p}}$. Iránymenti derivált az origóban csak az y-tengellyel párhuzamos irányban létezik $\boxed{\mathbf{1p}}$.

Második megoldás: Közelítsünk az origóhoz a $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ $\boxed{\mathbf{2p}}$ irányból. $\boxed{\mathbf{3p}}$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\frac{h\cos\alpha}{h\cos\alpha - h\sin\alpha} - 0}{h} \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\cos\alpha}{h(\cos\alpha - \sin\alpha)},$$

amely limesz csak $\cos\alpha = 0$ $\boxed{\mathbf{2p}}$ esetén létezik. Iránymenti derivált az origóban csak az y-tengellyel párhuzamos irányban létezik $\boxed{\mathbf{1p}}$.

---

2. Feladat. Határozzuk meg az f parciális deriváltjait ahol léteznek.

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2x^3 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Megoldás. Ha $(x,y) \neq (0,0)$ akkor $\boxed{\mathbf{3+3p}}$

$$f'_x(x,y) = \frac{6x^2(x^2+y^2) - (2x^3 - y^2)2x}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f'_y(x,y) = \frac{-2y(x^2+y^2) - (2x^3 - y^2)2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Ha $(x,y) = (0,0)$ akkor $\boxed{\mathbf{2+2p}}$

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x^3}{x^2}}{x} = 2,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{-\frac{y^2}{y^2}}{y} = \nexists. \quad \blacksquare$$

---

3. Feladat. Keressük meg az adott felületnek azon pontjait, ahol az érintősík párhuzamos az adott síkkal, és írjuk fel az érintősík egyenletét ezekben a pontokban!

$$z = x^2 + y^2, \quad S : 2x + 3y - 4z = 0.$$

Megoldás. Ezt a felületet tekinthetjük egy $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ háromváltozós függvény nullához tartozó szintfelületének, így a felület (a, b, c) pontjában az érintősík normálvektorának koordinátái $f'_x(a, b, c) = 2a$ $\boxed{1p}$, $f'_y(a, b, c) = 2b$ $\boxed{1p}$, $f'_z(a, b, c) = -1$ $\boxed{1p}$. Az adott sík normálvektora $\mathbf{n}_S = (2, 3, -4)$ $\boxed{1p}$.
Ha két sík párhuzamos, normálvektoraik párhuzamosak, pl. egyik a másiknak számszorosa: $2a = \tau \cdot 2$, $2b = \tau \cdot 3$, $-1 = \tau \cdot (-4)$ $\boxed{1p}$. Így $\tau = \frac{1}{4}$, amiből $a = \frac{1}{4}$ $\boxed{1p}$, $b = \frac{3}{8}$ $\boxed{1p}$, és $c = (\frac{1}{4})^2 + (\frac{3}{8})^2 = \frac{13}{64}$ $\boxed{1p}$.
Két háromdimenziós vektor párhuzamosságát úgy is ellenőrizhetjük, hogy vektoriális szorzatuk a nullvektor. $(2a, 2b, -1) \times (2, 3, -4) = (-8b + 3, 8a - 2, 6a - 4b) = (0, 0, 0)$, és ebből ugyancsak $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{8}$ adódik.
Az érintősík egyenlete az $(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{13}{64})$ pontban $2x + 3y - 4z = \frac{13}{16}$ $\boxed{2p}$. $\blacksquare$

---

4. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$y'' - 5y' + 6y = 2xe^x.$$

Megoldás. A karakterisztikus egyenlet $\boxed{1p}$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Gyökei $\boxed{1p}$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3.$$

A homogén egyenlet általános megoldása $\boxed{1p}$

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $\boxed{2p}$

$$y_p(x) = (Ax + B)e^x$$

alakban keressük.

$$y_p'(x) = (A+B)e^x + Axe^x,$$
$$y_p''(x) = (2A+B)e^x + Axe^x.$$

Behelyettesítve az inhomogén egyenletbe $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$(\underbrace{A - 5A + 6A}_{=2})xe^x + (\underbrace{2A + B - 5A - 5B + 6B}_{=0})e^x = 2xe^x.$$

Az egyenletrendszert megoldva $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$A = 1, \quad B = \frac{3}{2}.$$

Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$\begin{aligned} y_{iá}(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= c_1 e^x + c_2 e^x + \left(x + \frac{3}{2}\right) e^x, \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

---

5. Feladat. Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}, \qquad \text{ahol} \quad k > 0 \quad \text{adott.}$$

Megoldás. A faktoriális miatt a hányados kritériummal érdemes próbálkozni $\boxed{\mathbf{2p}}$. A sor pozitív tagú, ha konvergens, akkor abszolút konvergens $\boxed{\mathbf{1p}}$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \frac{\frac{(n+1)^k}{(n+1)!}}{\frac{n^k}{n!}} \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \cdot 0 = 0 < 1, \quad \boxed{\mathbf{2p}}$$

így a sor abszolút konvergens $\boxed{\mathbf{1p}}$.
