

1. Mutassa be az elektromágneses tér forrásmennyiségeit, valamint azok megjelenési formait és matematikai leírását!

Töltés

A töltések lehetnek pozitívak és negatívak. Az elemi töltés az elektron, jele: e^- , töltése:

$$q_e^- = 1,6 \cdot 10^{-19} [C, As]$$

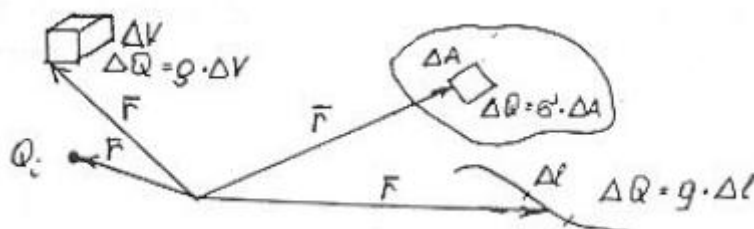
Töltésmodellek:

Térfogati töltésseloszlás: $\rho : [A \cdot s / m^3]$ $Q_V = \int_V \rho dV$

Felületi töltésseloszlás: $\sigma : [A \cdot s / m^2]$ $Q_A = \int_A \sigma dA$

Vonalmenti töltésseloszlás: $q : [A \cdot s / m]$ $Q_l = \int_l q dl$

Ponttöltés: $Q : [C, As]$ $Q = \sum_i Q_i$



A gyakorlatban a töltés mérését erőmérésre vezethetjük vissza.

A kapcsolatot a Coulomb-törvény írja le:

$$F_{21} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|^3}$$

Áram

Az A felületen átáramló áram:

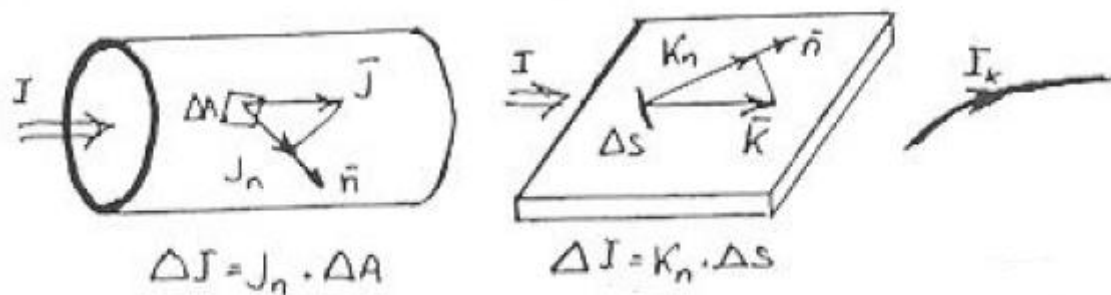
$$I_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} [A]$$

Árammodellek:

Térbeli árameloszlás: $\vec{J} : [A / m^2]$ $I_A = \oint_A \vec{J} dA$

Felületi árameloszlás: $\vec{K} : [A / m]$ $I_l = \int_l \vec{K} dl$

Vonaláram: $I : [A]$ $I = \sum_i I_i$



$$F_{21} = \frac{I_1 \cdot I_2}{2\pi d} \cdot \mu \cdot l$$

Két párhuzamos vezetékben folyó áram vonzza egymást, ha az áramok azonos irányúak, ellenkező esetben taszítják egymást.

d : a két vezeték távolsága

l : a vezetékek hossza

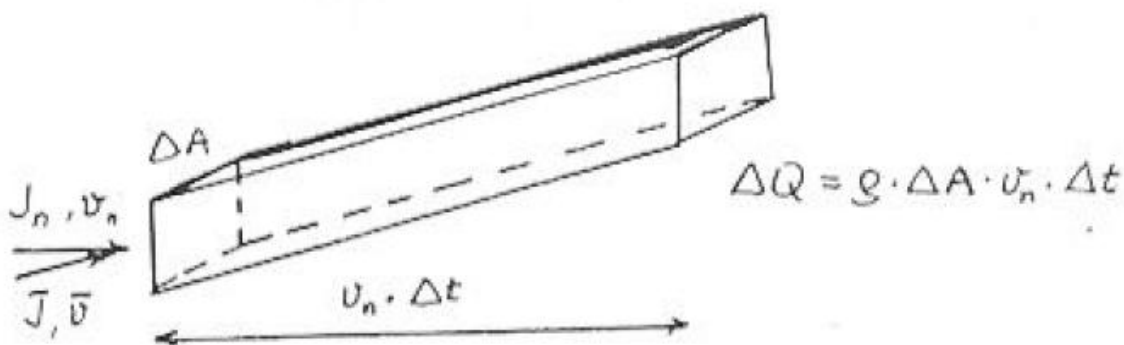
$$(\text{Ha } I_1 = I_2 = 1\text{A és } d = l \rightarrow F = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N})$$

2. Mutassa be a folytonossági egyenlet különböző alakjait!

Kapcsolatot ír le az áramsűrűség és a töltéssűrűség között. Induljunk ki a töltésmegmaradás elvéből:

$$\oint_S \vec{J} d\vec{A} = -\frac{dQ}{dt}$$

Jelentése: Egy térfogatba be- és kiáramló áramok összege, megadja az időegység alatt bekövetkezett töltésváltozást.



$$[1] \quad \oint_S \vec{J} d\vec{A} = \int_V \text{div } \vec{J} dV \quad \text{Gauss-Osztrogradszkij}$$

$$[2] \quad -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V -\frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

$$[1],[2] \rightarrow \int_V \operatorname{div} \bar{J} dV = \int_V -\frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Ebből pedig következik a folytonossági egyenlet:

$$\operatorname{div} \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

3. Mutassa be az elektromágneses tér intenzitásvektorait, és kapcsolatukat az erőhatással!

Elektromos térerősség

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{Q} \quad [\text{V/m}]$$

Ponttöltés esetén:

$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \bar{e}_r$$

Pozitív töltéseknél kifelé, negatív töltéseknél befelé mutatnak az erővonalak.
Az azonos előjelű töltések taszítják, az ellentétes előjelűek vonzzák egymást.

Mágneses indukció

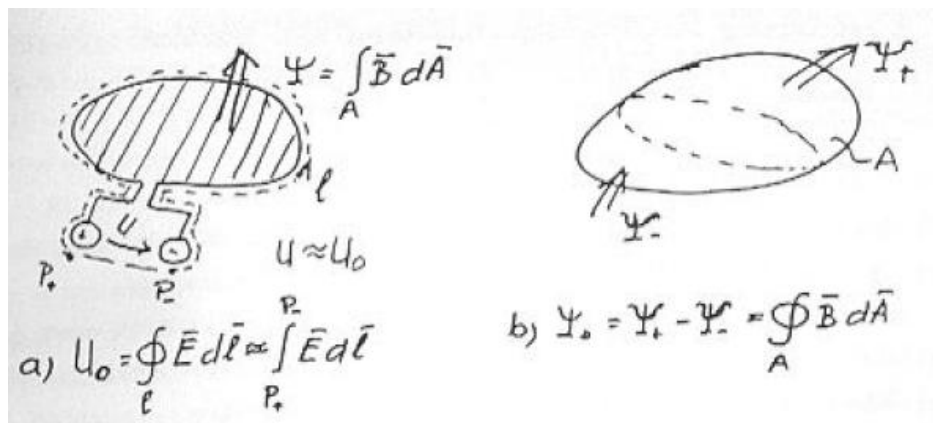
$$\bar{F} = Q(\bar{v} \times \bar{B}) \quad [\text{T}, \text{Vs/m}^2]$$

A Lorentz-törvény a mágneses térben mozgó töltésre ható erőt írja le.
A két intenzitásvektor között Faraday indukciótörvénye (M.II.) teremti kapcsolatot:

$$u_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Időben váltakozó mágneses fluxus feszültséget indukál.

$$u_i = \oint_l \bar{E} dl$$



Ahol l a felületet körülvevő zárt görbe.

$$\left. \begin{aligned} \oint_l \bar{E} dl &= -\frac{d}{dt} \int_A B dA = -\int_A \frac{\partial B}{\partial t} dA \\ \oint_l \bar{E} dl &= \int_A \text{rot} \bar{E} dA \end{aligned} \right\} \oplus$$

$$\int_A \left(\text{rot} \bar{E} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \right) dA = 0$$

$$\boxed{\text{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}}$$

4. Mutassa be az elektromágneses tér „gerjesztett” vektorait, és kapcsolatukat a forrásmennyiségekkel!

Elektromos eltolás

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E} \quad \left[\text{As} / \text{m}^2 \right]$$

Gauss-tv. (M.IV.):

$$\begin{aligned} \oint_A \bar{E} dA &= \frac{Q}{\epsilon} \quad \rightarrow \quad \oint_A \epsilon \bar{E} dA = \int_V \rho dV \\ \int_V \text{div} \bar{D} dV &= \int_V \rho dV \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{div} \bar{D} = \rho}$$

Gauss-Osztrogradszkij-tétel:

$$\oint_A \bar{v} dA = \int_V \text{div } \bar{v} dV \quad A: \text{Egy térfogatot körbezáró felület}$$

Stokes-tétel:

$$\oint_l \bar{v} dl = \int_A \text{rot } \bar{v} dA \quad l: \text{Egy síkot körbezáró görbe}$$

Mágneses térerősség

Gerjesztési-tv. (M.I.):

$$\oint_l \bar{H} dl = \int_A \bar{J}_{\text{össz}} dA = I + I_D \quad I_D: \text{az eltolási áram}$$

$$I_D = \varepsilon \int_A \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} dA = \int_A \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} dA \quad \rightarrow \quad J_D = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad \text{eltolási áramsűrűség}$$

Vagyis:

$$\int_A \text{rot } \bar{H} dA = \int_A \left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) dA \quad \leftarrow \quad \text{Stokes-tétel}$$

$$\boxed{\text{rot } \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}}$$

Közeg jelenléte nélkül, szabad térben, E és D illetve H és B csak egy skalárszorzóban különböznek, ezért fizikai tartalmuk azonos. Az intenzitásvektorok és gerjesztett vektorok eltérő fizikai tartalmat, csak közegek jelenléte esetén hordoznak.

5. Mutassa be röviden a makroszkopikus elektromos és mágneses anyagjellemzők bevezetésének módját és anyagszerkezeti hátterét!

Általános esetben (kristályos közeg, kemény mágnesek), az E és D illetve a B és H vektorok nem párhuzamosak. Ezért találták ki a következő két anyagjellemző állandót. A permittivitás annak a mértéke, hogy egy közeg mennyire áll ellen a rá ható elektromos térrel szemben. A permeabilitás pedig annak a mértéke, hogy egy közeg mennyire áll ellen a rá ható mágneses térrel szemben.

Permittivitás

Az elektromos eltolás vákuumban:

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} \quad [As / m^2]$$

Általános esetben:

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$$

Ahol $\bar{P}$ a polarizációs vektor vagy más néven dipólusmomentum sűrűség.

Bontsuk fel a töltéssűrűséget szabad (free) és kötött (bound) részekre:

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho_f + \rho_b \\
\rho_b &= -\operatorname{div} \bar{P} \quad !! \\
\operatorname{div} \bar{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_f + \rho_b) \quad \text{M.IV. } (\operatorname{div} \bar{D} = \rho) \\
\operatorname{div} \bar{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_f - \operatorname{div} \bar{P}) \\
\operatorname{div} (\varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}) &= \rho_f \quad \rightarrow \quad \rho_f = \operatorname{div} \bar{D}
\end{aligned}$$

Lineáris karakterisztikájú dielektrikumok esetében $\bar{P}$ és $\bar{E}$ arányosak:

$$\bar{P} = \varepsilon_0 \chi_e \bar{E} \quad \chi_e : \text{Az elektromos szuszceptibilitás}$$

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \underbrace{(1 + \chi_e)}_{\varepsilon_r} \bar{E} \quad \rightarrow \quad \bar{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \bar{E}$$

ε_r : A relatív permittivitás

$$\varepsilon_0 = (1/36\pi) \cdot 10^{-9} = 8,854 \cdot 10^{-12} [\text{A} \cdot \text{s} / \text{V} \cdot \text{m}]$$

Permeabilitás

A mágneses térerősség vákuumban:

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} \quad [\text{A} / \text{m}]$$

Általános esetben:

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M}$$

$\bar{M}$ a mágnesezettség vektor, azaz a mágneses dipólus momentumsűrűsége.
Az áramsűrűséget is felbonthatjuk szabad illetve kötött részekre:

$$\bar{J} = \bar{J}_f + \bar{J}_b \quad \text{ahol } \bar{J}_b = \operatorname{rot} \bar{M}$$

Lineáris mágneses tulajdonságú anyagok esetében $\bar{M}$ és $\bar{H}$ arányosak:

$$\bar{M} = \chi_m \bar{H} \quad \chi_m : \text{A mágneses szuszceptibilitás}$$

$$\bar{B} = \mu_0 \underbrace{(1 + \chi_m)}_{\mu_r} \bar{H}$$

μ_r : A relatív permeabilitás

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} [\text{V} \cdot \text{s} / \text{A} \cdot \text{m}]$$

6. Ismertesse a Maxwell-egyenletek integrális es differenciális alakját, valamint a köztük levő kapcsolatot!

A Maxwell egyenletek differenciálegyenletek, egy pont kicsiny környezetének viszonyait írják le. Ezért ezek az egyenletek feltételezik, hogy a hatások a közvetlen szomszédságban működnek, azaz közelhatási törvények. Evolúciós egyenletek is, a tér pillanatnyi értékeinek ismeretében leírják a tér alakulását, változását a jövőben.

I. Gerjesztési törvény:

A vezetési és eltolási áram mágneses teret kelt. Ez a törvény, az EM tér „gerjesztett” vektorai között teremt kapcsolatot:

$$\oint_l \vec{H} dl = \int_A \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dA \qquad \text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

II. Faraday-féle indukciós törvény:

A mágneses indukció időbeli változása elektromos teret indukál, melynek iránya (Lenz-tv.) ellenkező, mint az őt létrehozó változás. Ez a törvény, az EM tér intenzitásvektorai között teremt kapcsolatot:

$$\oint_l \vec{E} dl = - \frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} dA \qquad \text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

III. Mágneses Gauss-törvény:

Más néven a *Fluxus megmaradás törvénye*. A mágneses erővonalak zártak, nincs mágneses monopólus.

$$\oint_A \vec{B} dA = 0 \qquad \text{div} \vec{B} = 0$$

IV. Elektromos Gauss-törvény:

Zárt felület villamos fluxusa, a belül lévő összes töltéssel egyezik meg.

$$\oint_A \vec{D} dA = \int_V \rho dV \qquad \text{div} \vec{D} = \rho$$

V. Anyagjellemzők:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H} \qquad \vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_b)$$

VI. Energiasűrűség:

$$w = \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \vec{H}^2$$

7. Ismertesse az elektromágneses vektormezők anyaghatáron teljesülő folytonossági feltételeit!

Az EM feladatok nagy részénél a közeg nem homogén. A térjellemző vektorok meghatározásához a Maxwell egyenletek integrális alakját alkalmazzuk egy olyan zárt görbére vagy felületre, amely közvetlenül a határfelület két oldalán helyezkedik el.

I. Elektromos térerősség:

A Faraday-féle indukció-törvényből:

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} d\vec{A}$$

$$\vec{E}_{1t} \cdot l - \vec{E}_{2t} \cdot l = \frac{\partial B_m}{\partial t} \cdot l \cdot dl$$

Mivel $\frac{\partial B_m}{\partial t}$ korlátos, ezért a jobboldal 0-hoz tart.

$$\boxed{\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}}$$

Az elektromos térerősség tangenciális komponense közeghatáron folytonos.

Ha az I. közeg ideális vezető ($\sigma = \infty$), akkor $E_1 = J_1 / \sigma_1 = 0$ ideális vezető felületén.

$$\vec{E}_t = 0$$

I. Mágneses indukció:

Fluxus megmaradás törvényéből:

A henger felületére:

$$\int_V \text{div } \vec{B} dv = \oint_A \vec{B} d\vec{A}$$

$$\oint_A \vec{B} d\vec{A} = B_2 n_2 \Delta A - B_1 n_1 \Delta A + d\Phi$$

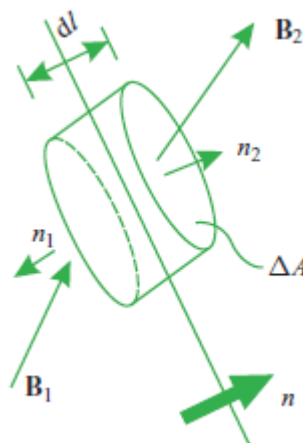
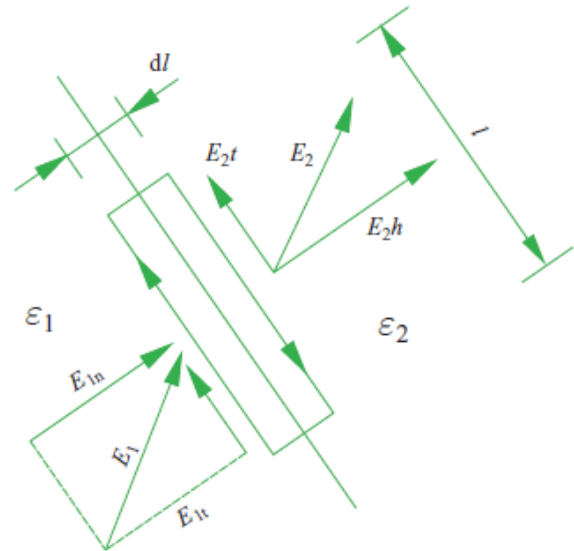
és mivel a dl tart a nullához, ezért a $d\Phi$ a henger palástján fellépő fluxus is tart a nullához:

$$\oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0$$

$$\boxed{\vec{B}_{1n} = \vec{B}_{2n}}$$

A mágneses indukció normális komponense közeghatáron folytonos.

A másik három a 8-as tételben!!!



8. Hogyan változnak a térjellemzők az anyaghatáron, ha ott felületi töltéssűrűség, illetve felületi áram van jelen? Mondjon példát arra, hogy a gyakorlatban milyen körülmények között valósulhatnak meg ezek!

I. Mágneses térerősség:

(Az elektromos tér határfeltételének számításához hasonló módon)

A Gerjesztési-törvényből:

$$\oint_l \vec{H} dl = \int_A \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dA$$

$$\vec{H}_{2t} \cdot l - \vec{H}_{1t} \cdot l = \vec{K} \cdot l$$

$$\boxed{\vec{H}_{2t} - \vec{H}_{1t} = \vec{K}}$$

A felület síkjában folyó áram ($\vec{K}$) esetén a felületi áramsűrűségnek megfelelően ugrik a mágneses tér tangenciális összetevője.

II. Elektromos eltolás:

(A mágneses indukció határfeltételének számításához hasonló módon)

Gauss- törvényéből:

$$\oint_A \vec{D} dA = \int_V \rho dV = Q$$

A henger palástjának a területe tart a 0-hoz ($\Delta n \rightarrow 0$), így csak a két fedlapot metszi az elektromos eltolás:

$$\int_V \rho dV = \underbrace{\rho \ell}_{\sigma} \Delta A = \sigma \Delta A$$

$$\vec{D}_{2n} \cdot \Delta A - \vec{D}_{1n} \cdot \Delta A = \sigma \cdot \Delta A$$

$$\boxed{\vec{D}_{2n} - \vec{D}_{1n} = \sigma}$$

A felület síkjában elhelyezkedő töltés (σ) esetén, a felületi töltéssűrűségnek megfelelően ugrik az elektromos eltolás normális összetevője.

III. Áramsűrűség:

$$\boxed{\vec{J}_{2n} - \vec{J}_{1n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}}$$

Az áramsűrűség normálisa az időegység alatt megváltozott felületi töltéssűrűség arányával változik.

Példa a gyakorlatban:

- Az első a tekercs felületén

- A második a kondenzátor lemezfelületén, vagy csak sima áramvezető felületén

9. Ismertesse az elektromágneses térben az energiasűrűségre és az energiaáramlásra vonatkozó általános összefüggéseket!

Az EM energia, ugyanúgy, mint a mechanikai energia, az energiának csak egy fajtája. (Pl. az ohmikus ellenálláson átfolyó áram hatására az EM energia belső energiává alakul az ellenálláson, amelyet mint hőt ad át az ellenállás a környezetének.)

Egy V térfogatban felhalmozott $W = W(t)$ elektromágneses energia két okból változhat meg időben. Egyrészt a térfogatban fellépnek olyan $P = P(t)$ teljesítményű folyamatok, amelyek a $P > 0$ esetén a tér energiáját csökkentik (pl. egy feltöltött kondenzátor kisül egy ellenálláson: az elektromos energia hővé válik) ill. a $P < 0$ esetén a térenergiát növeli (pl. egy akkumulátor feltölt egy kondenzátort).

Másrészt a térfogatot határoló A zárt felületen átáramló vagy átsugárzó $P_s = P_s(t)$ teljesítmény csökkenti a térenergiát, ha $P_s > 0$ ill. növeli azt, ha $P_s < 0$. Az energiamérleg ezek szerint a következő:

$$\frac{dW}{dt} + P + P_s = 0$$

Induljunk ki abból, hogy a p teljesítménysűrűség egy adott térfogatra vett integrálja, megadja a térben, az egységnyi idő alatt elvégzett munkát (az energiaátvitel sebessége).

$$P = \int_V p dV = \frac{dW}{dt} \quad p \text{ mértékegysége: } (W / m^3)$$

A w energiasűrűség egy adott térfogatra vett integrálja, megadja a térben tárolt összenergiát:

$$W = \int_V w dV \quad w \text{ mértékegysége: } (J / m^3) = (Ws / m^3)$$

Innen:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + p + p_s = 0$$

És miután a p_s kisugárzott teljesítménysűrűség a Poynting-vektor (teljesítményáram-sűrűség vagy energiaáram-sűrűség) divergenciája. Energiaáram-sűrűség (S): Megmutatja, hogy melyik irányba áramlik az elektromágneses energia, és hogy mennyi energia áramlik át az S -re merőleges egységnyi felületen időegység alatt. Innen:

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + p + \text{div} S = 0}$$

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \underbrace{\frac{\bar{J}^2}{\sigma}}_p - \underbrace{\bar{E}_b \bar{J}_b}_{p_s} + \underbrace{\text{div}(E \times H)}_{p_s}$$

Látszik, hogy a vezetési áram okozta disszipált hőenergia és az elsugárzott energia is veszteségként szerepel.

Innen pedig adódik az energiamérleg:

$$-\int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV = \int_V \frac{\bar{J}^2}{\sigma} dV - \int_V \bar{E}_b \bar{J}_b dV + \oint_A \bar{E} \times H dA$$

$\int_V \partial w / \partial t dV$: A térfogatban tárolt összes EM energia megváltozása

$\int_V \bar{J}_v^2 \sigma dV$: A hő teljesítmény, Joule-hő /csak +/

$\int_V \bar{E}_b \bar{J}_b dV$: A nem EM eredetű munka /+, -/

$\oint_A \bar{E} \times H dA$: Sugárzó teljesítmény /+, -/

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{S} &= \operatorname{div} [\bar{E} \times \bar{H}] = \nabla [\bar{E} \times \bar{H}] = \bar{H} [\nabla \times \bar{E}] - \bar{E} [\nabla \times \bar{H}] \\ \operatorname{div} \bar{S} &= \bar{H} \cdot \operatorname{rot} \bar{E} - \bar{E} \cdot \operatorname{rot} \bar{H} \end{aligned}$$

Gerjesztési törvény (M.I.):

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J}_v + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \xrightarrow{(-E)} -\bar{E} \cdot \operatorname{rot} \bar{H} = -\bar{E} \cdot \bar{J}_v - \bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

Faraday féle ind.tv.(M.II.):

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \xrightarrow{H} \bar{H} \cdot \operatorname{rot} \bar{E} = -\bar{H} \cdot \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

A kettőt összeadva megkapjuk a Poynting-tételt:

$$\bar{H} \cdot \operatorname{rot} \bar{E} - \bar{E} \cdot \operatorname{rot} \bar{H} = -\bar{E} \cdot \bar{J}_v - \underbrace{\left(\bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{H} \cdot \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \right)}_{\frac{\partial w}{\partial t}}$$

Mivel lineáris közeg homogén és lineáris ($\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$, $\bar{B} = \mu \bar{H}$), ezért a w kifejezhető a következő módon:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} w &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon \bar{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \bar{H}^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \bar{D} + \bar{E} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \bar{B} + \bar{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \right) = \bar{E} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \bar{S} &= -p - \frac{\partial}{\partial t} w \end{aligned}$$

Innen pedig kijön, hogy: $\frac{\partial w}{\partial t} + p + \operatorname{div} \bar{S} = 0$, amit állítottunk.

10. Ismertesse az elektromágneses térben az erőhatással kapcsolatos összefüggéseket!

Lorentz-erő:

$$\vec{F}_L = Q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Az erőnek két komponense van egy elektromos és egy mágneses.

Az elektromos erő:

$$\vec{F}_E = Q \cdot \vec{E}$$

Ha a töltés pozitív, akkor az elektromos erő iránya azonos az elektromos térével.

A mágneses erő:

$$\vec{F}_M = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Homogén mágneses térben mozgó töltésre a mágneses tér sebességre merőleges komponense erőt fejt ki. Mivel a Lorentz-erő mindig merőleges marad a részecske v sebességére, ezért munkát nem végez. Ez azt jelenti, hogy a mágneses tér egy mozgó töltött részecske kinetikus energiáját nem változtatja meg, a részecske csak oldalirányban térülhet el. A mágneses erő irányát a jobbkez-szabály határozza meg. Ez a formula gyakorlati számításra nem alkalmas.

11. Ismertesse az Ohm-törvény differenciális alakját, valamint a nem elektromágneses eredetű töltésmozgató hatás figyelembevételének módjait (példával is illusztrálva)!

Az Ohm-törvény differenciális alakja azt mondja ki, hogy a konduktív (azaz a vezetési) áramsűrűség egyenesen arányos az elektromos térerősséggel.

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_b)$$

$\vec{E}_b$: A nem elektromos hatásokat reprezentáló beiktatott térerősség, amely alkalmasint más nem fizikai pl. kémiai eredetű. Ez képes valamely külső energiaforrás rovására munkát végezni a töltéseken, s azokat magasabb potenciálú pontra emelni az alacsonyabb potenciálú pontról.

σ : a közeg vezetőképessége [$1/\Omega m$]

Gyakran használatos ennek a reciproka, azaz a fajlagos ellenállás: $\rho = 1/\sigma$

Példa a gyakorlatban:

A beiktatott térerősségre jó példa, a boltba vásárolható elem, aminek csak a két végén mérhető potenciál különbségét ismerjük. Ebből számítható az $\vec{E}_b$.

12. Ismertesse a Maxwell-egyenletek teljes rendszerét (csak differenciális alakban, de kiegészítve a konstitúciós egyenletekkel, folytonossági feltételekkel, valamint az erőhatást és az energiaviszonyokat leíró egyenletekkel)!

Maxwell egyenletek

I. Gerjesztési törvény:

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

II. Faraday indukciós törvény:

$$\text{rot } \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

III. Fluxus megmaradás törvénye:

$$\text{div } \bar{B} = 0$$

IV. Gauss- törvény:

$$\text{div } \bar{D} = \rho$$

Konstitúciós egyenletek:

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$$

$$\bar{B} = \mu_0 (\bar{H} + \bar{M})$$

$$\bar{J} = \sigma_0 (\bar{E}_v + \bar{E}_b)$$

Folytonossági feltételek:

$$\bar{n} \times (\bar{E}_2 - \bar{E}_1) = 0 \quad \bar{E}_{1t} = \bar{E}_{2t}$$

$$\bar{n} \times (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) = \bar{K} \quad \bar{H}_{2t} - \bar{H}_{1t} = \bar{K}$$

$$\bar{n} \cdot (\bar{D}_2 - \bar{D}_1) = \sigma \quad \bar{D}_{2n} - \bar{D}_{1n} = \sigma$$

$$\bar{n} \cdot (\bar{B}_2 - \bar{B}_1) = 0 \quad \bar{B}_{1n} = \bar{B}_{2n}$$

$$\bar{n} \cdot (\bar{J}_2 - \bar{J}_1) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad \bar{J}_{2n} - \bar{J}_{1n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

Erőhatás és energiaviszonyokat leíró egyenletek:

Az energiasűrűség időbeli megváltozása

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \bar{E} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

Az energiasűrűség:

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon \bar{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \bar{H}^2$$

Lorentz-erőtörvény:

$$\bar{F} = Q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B})$$

13. Ismertesse az elektrodinamika felosztását!

I. Elektrosztatika ($\partial / \partial t = 0$)

Statikus (állandó) elektromos tér. Ha az idő szerinti deriváltakat elhanyagoljuk, akkor a Maxwell egyenletrendszer két részre válik szét, elektrosztatikára és magnetosztatikára.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho \\ \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \end{aligned}$$

- Az elektromos tér örvénymentes.
- A forrás az elektromos töltés-
- A tér homogén

Fogalmak: Elektróda, kapacitás, potenciál
Alkalmazás: Nagyfeszültség technika

II. Magnetosztatika ($\partial / \partial t = 0$)

Statikus Mágneses tér, ahol áramok sem, folynak, jellemzően permanens mágnesek tere.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \end{aligned}$$

$\vec{M}$: a permanens mágnes mágnesezettsége

Fogalmak: mágneses skalárpotenciál
Alkalmazás: Villamos gépek

III. Stacionárius áramlási tér

Stacionárius áramok folynak ($\vec{J} \neq 0$), minden egyéb az időben állandó. ($\partial / \partial t \cong 0$)
A gerjesztési törvényből:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} &= 0 \end{aligned} \right\} \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div} \vec{J} = 0$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{J} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 \\ \vec{J} &= \sigma_0 (\vec{E} + \vec{E}_2) \end{aligned}$$

Fogalmak: ellenállás, áramkörök
Alkalmazás: Földelésbiztosítások, orvosi mérőeszközök

IV. Stacionárius áramok mágneses terek

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \end{aligned}$$

Fogalmak: Induktivitás, vektorpotenciál
Alkalmazás: Villamos gépek, villamos energia átalakítók

V. Kvázistacionárius tér

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned}$$

Fogalmak: Örvényáram, szkinneffektus, behatolási mélység
Alkalmazás: Villamos gépek, roncsolás mentes anyagvizsgálat, indukciós hevítés

VI. EM hullámok

Forrástól függetlenül vizsgáljuk a teret, tehát:

$$\vec{J} = 0, \quad I = 0$$

Időben szinuszos változás, lineáris közeg.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \\ \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \end{aligned}$$

Fogalmak: Síkhullám, reflexió, polarizáció
Alkalmazás: Antennák

14. Ismertesse es értelmezze az elektrosztatika alapegyenleteit, es jelölje meg néhány alkalmazási területet!

Elektrosztatika ($\partial / \partial t = 0$)

Statikus (állandó) elektromos tér. Ha az idő szerinti deriváltakat elhanyagoljuk, akkor a Maxwell egyenletrendszer két részre válik szét, elektrosztatikára és magnetosztatikára.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 && \text{Az elektromos tér örvénymentes} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho && \text{A forrás az elektromos töltés} \\ \vec{D} &= \epsilon \vec{E} && \text{A tér homogén} \end{aligned}$$

Fogalmak: Elektróda, kapacitás, potenciál

Alkalmazás: Nagyfeszültség technika, nagyfrekvenciás (pl. kondenzátor)

15. Ismertesse az elektrosztatikus skalárpotenciál fogalmat, bevezetésének módjait, valamint kapcsolatát a feszültséggel és a térerősséggel!

A skalárpotenciál segédmenyiség. A vektoranalízis integrálfajtáinak egyike. Azt a skalármezőt határozza meg, aminek az adott vektormező a gradiense. Feltételezzük, hogy a töltések mozdulatlanok. Mivel $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$, ezért $\vec{E}$ leírható egy skalár gradienseként:

$$\boxed{\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi} \qquad \operatorname{grad} : \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right)$$

pl. ha $\Phi = 3(x^2 - y^2)$, akkor $\vec{E} = -6x\vec{i} + 6y\vec{j}$

Ez onnan jön, hogy ha képezzük mindkét oldal rotációját:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{rot}(-\operatorname{grad} \Phi) = -\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi \equiv 0$$

Φ egy additív K állandó erejéig határozatlan. K konstans, és helyfüggetlen, ezért gradiense 0.

$$\operatorname{grad}(\Phi + K) = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{grad} K = \operatorname{grad} \Phi$$

Kapcsolat a feszültséggel:

$$U = \int_l \vec{E} dl = \int_l (-\operatorname{grad} \Phi) dl = \Phi_B - \Phi_A$$

A feszültség nem más, mint potenciálkülönbség. Egy pont feszültségét egy referencia potenciálhoz (r_0) képest nézzük.

16. Írja fel és értelmezze az elektrosztatika Poisson-egyenletét, és adja meg a homogén közegben érvényes, általános megoldását! Miért körülményes ennek a formulának a használata a gyakorlati esetek nagy részében?

Felírva a Gauss-törvényt (M.IV.), és $\vec{E}$ helyére behelyettesítve a skalárpotenciál definícióját:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{D} &= \rho \\ \operatorname{div}(\varepsilon \vec{E}) &= \rho \\ \operatorname{div}(\varepsilon (-\operatorname{grad} \Phi)) &= \rho\end{aligned}$$

Megkapjuk a Poisson egyenlet általános alakját:

$$\boxed{-\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \Phi) = \rho}$$

Ha $\varepsilon = \text{állandó}$, a közeg homogén és izotrop,

$$-\varepsilon \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \rho$$

A $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$ a Laplace operátort, ami Descartes-rendszerben:

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

Az így kapott Laplace-Poisson egyenlet homogén, izotrop közegre:

$$\boxed{-\Delta \Phi = \frac{\rho}{\varepsilon}}$$

Azért körülményes a használata, mert az egyenlet megoldásához szükséges feltételek, hogy legyen végtelen kiterjedésű homogén és lineáris közeg, valamint, hogy ismert legyen a töltéseloszlás.

A Poisson egyenlet általános megoldása:

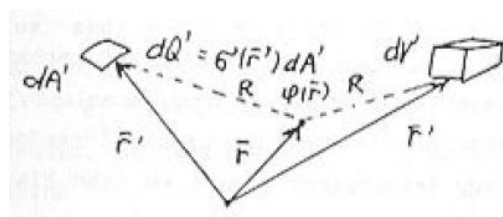
A pontszerű töltés terének ismeretében, a Q töltés potenciálja ($r_0 = \infty$):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Egy elemi kicsi dV' térfogatban elhelyezkedő töltést ponttöltésnek tekinthetünk, így hozzájárulása egy kiterjedt töltéseloszlás potenciáljához:

$$dQ = \rho(\vec{r}') dV'$$

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r}' - \vec{r}|}$$



Fizikai megfontolások alapján a megoldás a következőképpen állítható elő. Az $\vec{r}'$ helyen lévő dV' térfogatban helyet foglaló $dQ' = \rho(\vec{r}') dV'$ pontszerűnek tekinthető töltés az $\vec{r}$ helyen

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV', \quad \text{, ahol } R = |\vec{r}' - \vec{r}|$$

17. Mutassa be néhány egyszerű töltéselrendezés (ponttöltés, egyenes vonaltöltés, töltött síkfelület) sztatikus elektromos terét és potenciálterét! Milyen módszerrel lehet, illetve célszerű ezeket számolni?

Töltéseloszlások elektromos terét a Gauss-tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon} \int_V \rho dV = \frac{Q}{\epsilon}$$

A potenciálteret pedig úgy, hogy az elektromos térre kapott összefüggést integráljuk a forrástól r tetszőleges távolságban lévő ponttól, az r_0 referenciapontig:

$$\varphi = \int_r^{r_0} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Ponttöltésre:

A tér geometriája gömbszimmetrikus és sugárirányú.

$$\begin{aligned} E(r)\epsilon 4\pi r^2 &= Q & E(r) &= \frac{Q}{\epsilon 4\pi r^2} \\ \varphi &= \int_r^{r_0} \frac{Q}{\epsilon 4\pi r^2} \cdot dr & \varphi &= \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} \end{aligned} \quad \text{, ahol } r_0 = \infty$$

Egyenes vonaltöltésre:

A tér geometriája hengersizmetrikus.

$$\begin{aligned} E(r)2r\pi l &= \frac{1}{\epsilon} lq & E(r) &= \frac{q}{2r\pi\epsilon} \frac{1}{r} \\ \varphi &= \int_r^{r_0} \frac{q}{2r\pi\epsilon} \frac{1}{r} \cdot dr & \varphi &= \frac{q}{2r\pi\epsilon} \ln \frac{r_0}{r} \end{aligned} \quad \text{, ahol } r_0 = 1$$

Töltött síkfelület:

Érdekessége, hogy a térerősség nem függ a távolságtól.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} \int_V \rho dV &= \frac{1}{\epsilon} F\sigma \\ \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} &= 2F\vec{E} \end{aligned} \right\} \rightarrow 2F\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} F\sigma$$

Ebből adódik a térerősség térrésztől függően

$$\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon} \quad (+) z > 0, \text{ ill. } (-) z < 0$$

Számítási módszerek:

A szuperpozíció módszerét felhasználva alkalmazhatjuk a villamos tükrözés.

Az elektrosztatikus feladatok megoldása egyértelmű adott töltéselrendezés és peremfeltételek mellett.

Olyan elrendezést kell találnunk, amely ugyanazt a peremfeltételt biztosítja, mint az eredeti eset.

Tetszőleges töltés/áram elrendezést visszavezetni szuperpozíció módszerével pontszerű/ vonalszerű töltések elektromos terére.

18. Mutassa be a sztatikus töltés dipólus elektromos teret és potenciálterét!

Dipólus: Két egymáshoz nagyon közel elhelyezkedő, azonos nagyságú, de ellentétes előjelű töltés.

Mérnöki közelítés szerint dipólusról beszélünk, ha a teret elég távolról vizsgáljuk.

A forgásszimmetria miatt a gömbi koordinátarendszerben:

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \Phi(r, \vartheta)$$

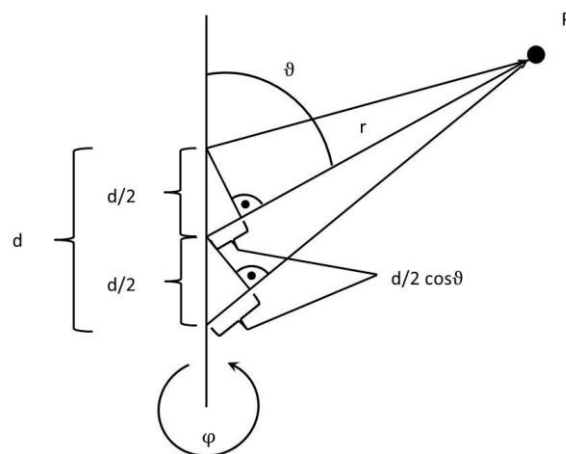
Két ponttöltés elektromos terének szuperpozíciója.

Ha $d \ll r$

$$\Phi \cong \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r - \frac{d}{2} \cos \vartheta} - \frac{1}{r + \frac{d}{2} \cos \vartheta} \right)$$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

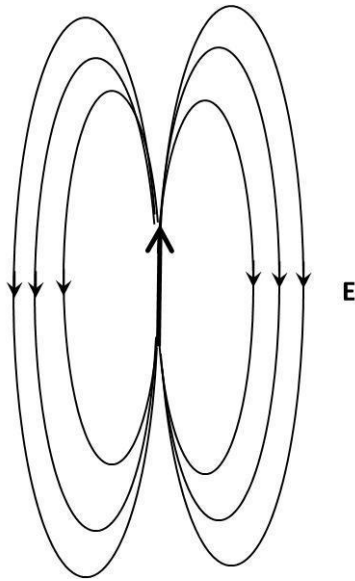
$$\Phi \cong \frac{Q \cdot d \cos \vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



A dipólusmomentum: $p = Q \cdot d$, és a $\oplus$ töltés irányába mutat.

$$\vec{E} = -\text{grad}\Phi = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial \vartheta} e_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial\Phi}{\partial \varphi} e_\varphi \right)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_r(r, \vartheta) &= \frac{p}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\cos \vartheta}{r^3} \\ \vec{E}_\vartheta(r, \vartheta) &= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sin \vartheta}{r^3} \\ \vec{E}_\varphi(r, \vartheta) &= 0 \end{aligned}$$



A dipólusmomentum tere

A térerősség vonalak párhuzamosan indulnak és végződnek a dipólus momentummal.

A dipólus momentum jelentősége:

- dielektrikumok
- kettősrétegek
- polarizáció vektor:

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$$

$$\bar{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum p_i}{\Delta V}$$

19. Fogalmazza meg az elektrosztatika peremérték-feladatát, és illusztrálja példákkal a vonatkozó peremfeltételeket!

Egy peremérték-feladatnak három alkotórésze van: egy V tér tartomány, egy egyenlet, amit a keresett függvénynek ki kell elégítenie V belsejében; és egy másik egyenlet, amit a keresett függvénynek ki kell elégítenie V határán (peremén). A megoldását kereshetjük zárt térrészben, vagy nyitott (végtelen) térben. Az első esetben a zárt térrészen kívül a „külvilágban” szereplő gerjesztések hatását úgy vesszük figyelembe, hogy a térrészüket határoló zárt felületen peremfeltételeket írunk elő.

A Maxwell egyenletek megoldása zárt térfogatban egyértelmű, ha a térfogat határoló felületén a potenciál vagy a térerősség normális komponense (ez a töltéssűrűségnek felel meg) adott. A bizonyítás homogén közeget feltételez.

Dirichlet-peremfeltétel: A vizsgált peremenrészen S_D felületre $\varphi|_{S_D} = f(s)$ adott.

Neumann-peremfeltétel: A vizsgált peremenrészen S_N felületre: $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{S_N} \equiv n \cdot \text{grad} \Phi = g(s)$ adott.

A felület egy részén elő lehet írni a potenciált, a felület egy másik részén a potenciál normális irányú deriváltját, és ha ezeket az előírásokat a teljes felületen mindenütt megtesszük akkor egyértelműen megoldható feladatot kapunk.

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

A Laplace egyenletnek a peremfeltételeknek eleget tevő megoldását kell megtalálni.

A gyakorlatban ezt használjuk fel a helyettesítő töltések módszerénél.

20. Ismertesse a helyettesítő töltések módszerét es a töltéstükrözés elvét! Hogyan épül ez a módszer a Poisson-egyenlet egyértelmű megoldhatóságára?

Az elektródák terét úgy számítjuk (az elektródákon kívül), mintha a helyettesítő töltések hozták volna létre. Azt várjuk el a helyettesítő töltések elrendezéstől, hogy a helyettesítő töltések együttes potenciálja, valamennyi elektródát ekvipotenciálissá tegye (a potenciál konstans legyen minden elektródán). Bizonyítás, a helyettesítő töltések potenciálja eleget tesz a Laplace egyenletnek. A helyettesítő töltés eleget tesz a Laplace egyenletnek, kivéve a töltés helyét, de ez nem zavar minket, mert a helyettesítő töltés az elektródán belül van és ott úgyse érvényes a perem, csak az elektródán kívül. Másrészt, a konstrukcióból következően eleget tesz a peremfeltételeknek is, mert konstans potenciált hoz létre. A helyettesítő töltések potenciálja konstans az elektródákon.

Pontszerű helyettesítő töltés (gömbi szimmetria):

Olyan zárt felületekre nézzük, amelyek mentén a $\mathbf{D}$ elektromos eltolás, ill. a $\mathbf{J}$ áramsűrűség vagy állandó, vagy a felület egy A részén állandó, a felület többi részén pedig nullának tekinthető, továbbá a $\mathbf{D}$, ill. a $\mathbf{J}$ vektor a felületre merőleges. Ekkor a Gauss törvény, ill. az áramsűrűség és az áram kapcsolata a következő alakra egyszerűsödik:

$$Q = \oint_A \bar{\mathbf{D}} \cdot d\mathbf{A} = \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{A} \qquad I = \int_A \bar{\mathbf{J}} \cdot d\mathbf{A} = \bar{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{A}$$

Ahol Q az A felület által körülzárt töltés, ill. I az (eredő) áram

(A továbbiakban a stacionárius áramlás esetére: $\sigma \rightarrow \varepsilon$, $\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{D}$ helyettesítéssel ugyanígy)

$$D_r(r) = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

A $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, ill. a $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ összefüggés felhasználásával,

$$E_r(r) = \frac{D_r(r)}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

$$\varphi(r) = \int_r^\infty E_r(r) dr = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$$

A két elektróda közötti feszültség:

$$U_{12} = \varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Egy Q töltésű, gömbalakú elektróda erőtere úgy számolható, mintha az eredeti töltésen kívül jelen lenne a tükröképébe helyezett $-Q$ nagyságú töltés is (megjegyzés: akkor tükrözzünk, ha a töltés végtelen vezető fölött van.)

Egy r_0 sugarú, a földtől h magasságú, gömbalakú elektróda feszültsége:

$$U = \varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{2h} \right)$$

Vonalszerű helyettesítő töltés:

Tekintsük egy ϵ permittivitású szigetelőben lévő, végtelen hosszúnak tekinthető, q vonalmenti töltéssűrűséggel bíró körhenger alakú elektródát:

A térerősség radiális és:

$$E_r(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon r} \quad (\text{az elektródán kívül})$$

A $r_0 = 1$ referenciapont választással:

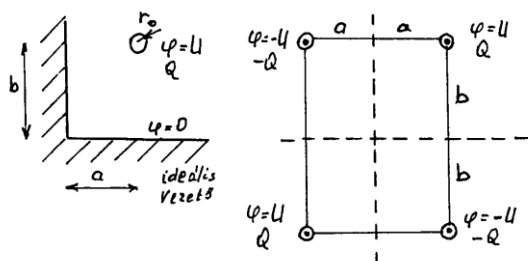
$$\varphi(r) = \int_r^{r_0} E_r(r) dr = \int_r^{r_0} \frac{q}{2\pi\epsilon r} dr = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_0}{r}$$
$$\varphi(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{1}{r}$$

Tekintsünk most két, körhenger alakú, végtelen hosszúnak tekinthető elektródát, amelyek tengelye párhuzamos, sugaruk kicsi a távolságukhoz képest, vonalmenti töltéssűrűségük $+q$, ill. $-q$. Ekkor a köztük eső potenciál:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

A síkon való tükrözés módszere alkalmazható olyan esetekben is, amikor a nullapotenciálú felületek $\vartheta = \pi/n$ szöget bezáró síkok ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Pl. $n = 2$



A szimmetriából következik, hogy a két sík nullapotenciálú, tehát a négy töltés együttes tere kielégíti a peremfeltételt. $\vartheta = \pi/n$, akkor minden valódi töltéshez $n-1$ tükrözött töltés tartozik

Visszavezetés a Poisson-egyenletre:

Válasszunk egy önkényes töltéseloszlást, majd meghatározzuk a potenciálfüggvényt,

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(r')}{|r' - r|} dV$$

Majd a $\Phi(r) = \Phi_i$ ekvipotenciális felületet. Ezzel rendelkezésünkre áll egy olyan, a Laplace egyenletet kielégítő potenciálfüggvény, amely ismert felületeken állandó. Kellő számú ilyen megoldást összegyűjtve, adott alakú elektródák esetén van olyan potenciálfüggvényünk, amely az elektródákon állandó, vagyis az elektrosztatikus vagy stacionárius elektromos probléma megoldását adja.

21. Fogalmazza meg az elektromos teret leíró vektormezők anyaghatáron érvényes folytonossági feltételeit a skalárpotenciál segítségével!

Legyen a Γ (nagy gamma) a határfelület két eltérő permittivitású közeg határán.

$$E_{1t} = E_{2t} \rightarrow \Phi_1(r) = \Phi_2(r) + K$$

,ahol $K = 0$ konstans és helyfüggetlen.

Praktikusan $[\Phi]_{\Gamma} = 0$, folytonosan megy át.

$$D_{2n} = D_{1n} + \sigma$$

A skalárpotenciál definíciójából ($\vec{E} = -\text{grad}\Phi$):

$$n \cdot \varepsilon_2 (-\text{grad}_2 \Phi_2) = n \cdot \varepsilon_1 (-\text{grad}_1 \Phi_1) + \sigma$$

grad_2 jelentése, hogy a kettes közegben végezzük a gradiens képzést.

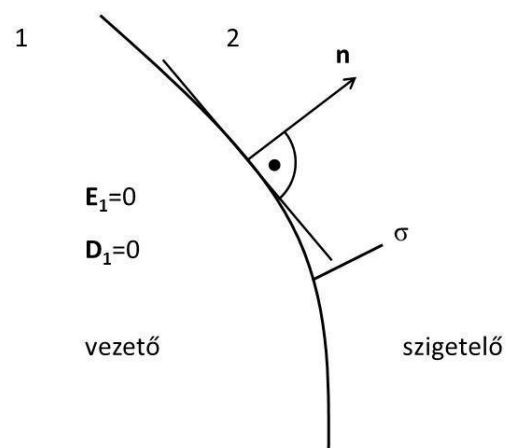
$$n \cdot \text{grad} = \frac{\partial}{\partial n} \text{ (normál irányú derivált)}$$

$$\varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} + \sigma$$

$$\left[\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] = \sigma$$

22. Ismertesse a vezető anyagok viselkedését elektrosztatikus térben, valamint a vezető-szigetelő határon érvényes folytonossági feltételeket; definiálja az elektróda fogalmat!

Az elektróda fogalmán vezető anyagot értünk. Vezetőket, szigetelőket szabad illetve helyhez kötött töltések alapján választhatjuk szét. A tér hatására a semleges töltések szétválnak, belső teret hoznak létre, ami a külsőt kompenzálja. Viszonyítás kérdése, hogy mikor vezető vagy szigetelő az anyag. Ez függhet alkalmazási területtől, frekvenciától, a töltések szétválásának gyorsaságától (relaxációs idő). Tegyük fel, hogy a töltésmozgás megtörtént!



Határfeltételek:

A felület irányában nincsen indukált töltéssűrűség, ezért a térerősség ilyen irányú komponensének nincsen ugrása.

$$E_{2t} = E_{1t}$$

A határfeltételeket potenciálra megfogalmazva: ha a potenciál mindenütt értelmezett, akkor a térerősség végességéből a potenciál folytonossága következik. E_n ugrása a felületre merőleges derivált ugrását jelenti:

$$\Phi_2 = \Phi_1, \quad \epsilon_2 \frac{\partial \Phi}{\partial n_2} = \epsilon_1 \frac{\partial \Phi}{\partial n_1}$$

Vagyis részben folytonos közegeknél:

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \text{ és a felületeken } \Phi \text{ és } \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} \text{ folytonos.}$$

Mivel itt is a Poisson egyenlet megoldását keressük, ugyanazok a módszerek alkalmazhatók, mint a fémek esetében.

Megjegyzés ha $\epsilon \rightarrow \infty$, akkor:

$$\begin{aligned} D_{2n} = D_{1n} &\Rightarrow E_{2n} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_{1n} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ a határon a felület belseje felől.} \\ &\Rightarrow \Phi|_{\text{belül}} = \text{konst.} \Rightarrow E|_{\text{belül}} = 0, \Rightarrow \Phi|_{\text{határon}} = \text{konst.} \end{aligned}$$

Ez felel meg a fémeknek.

Következmények:

Az elektróda ekvipotenciális.

Az elektróda felületére merőlegesek az erővonalak: $\vec{E}, \vec{D}$

23. Ismertesse a kapacitás fogalmát és energetikai hátterét; fejezze ki a kapacitást a térjellelmező mennyiségekkel! Térjen ki az „önmagában álló elektróda” esetére is!

Energetikai háttér:

Az elektródarendszer energiája:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V \Phi \cdot \rho \, dV = \frac{1}{2} \sum_k \Phi_k \underbrace{\oint_{S_k} \sigma \, ds}_{Q_k} \\ W &= \frac{1}{2} \sum_k \Phi_k Q_k = \frac{1}{2} (\Phi^+ Q + \Phi^- (-Q)) = \frac{1}{2} Q (\Phi^+ - \Phi^-) \end{aligned}$$

$$W = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

(Itt érdemes a négyzetekre figyelni!!)

A kapacitás kifejezése a térjellemző mennyiségekkel:

Két elektróda kapacitása definíció szerint:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint \bar{D} dA}{\int \bar{E} dl} = \frac{\epsilon \oint \bar{E} dA}{\int \bar{E} dl} = \frac{\epsilon \oint \bar{E} dA}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

ahol φ_1, φ_2 az elektródák potenciáljai, tehát U az elektródák között eső feszültség.

Önmagában álló elektróda esete

Egy Q töltésű, gömb alakú elektróda erőtere úgy számolható, ha $r > R$ és R a gömb sugara, hogy:

$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2}$$

$r_0 = \infty$ nullreferenciapont távolsággal számolva, a feszültsége (sima integrálás $r \rightarrow r_0$):

$$U = \varphi_0 - \varphi_r = 0 - \left(-\frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r}$$

A kapacitása:

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon \frac{1}{\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{2h} \right)} = 4\pi\epsilon \frac{2hr_0}{2h - r_0}$$

Vonalszerű helyettesítő töltés:

Tekintsük egy ϵ permittivitású szigetelőben lévő, végtelen hosszúnak tekinthető, q vonalmenti töltéssűrűséggel bíró körhenger alakú elektródát:

A térerősség radiális és:

$$E_r(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon r} \quad (\text{az elektródán kívül})$$

$$\varphi(r) = \int_r^{r_0} E_r(r) dr = \int_r^{r_0} \frac{q}{2\pi\epsilon r} dr = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_0}{r}$$

Az $r_0 = 1$ referenciapont választással:

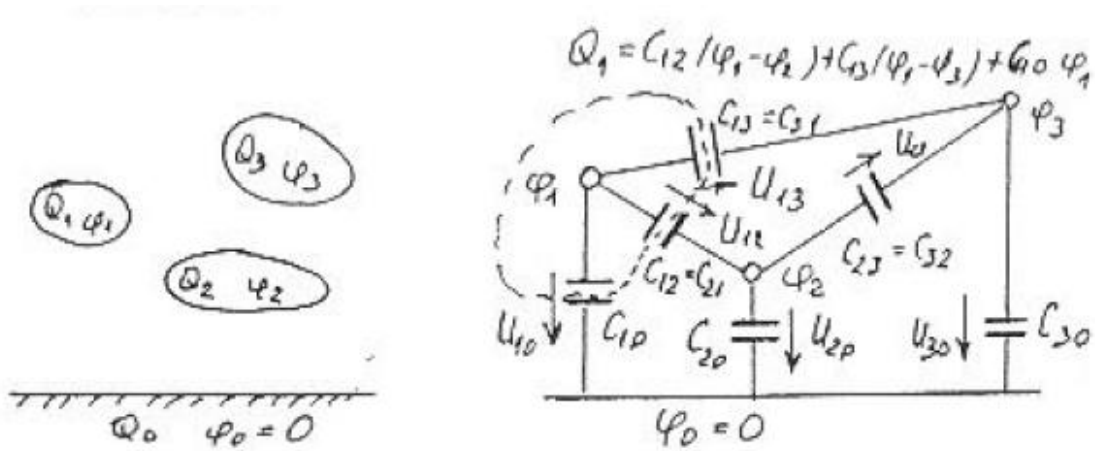
$$\varphi(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{1}{r}$$

Tekintsünk most két, körhenger alakú, végtelen hosszúnak tekinthető elektródát, amelyek tengelye párhuzamos, sugaruk kicsi a távolságukhoz képest, vonal menti töltéssűrűségük $+q$, ill. $-q$. Ekkor a közt eső potenciál:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$C = \frac{ql}{U} = \frac{ql}{\frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

24. Ismertesse az elektródarendszert jellemző együtthatókat, különös tekintettel a részkapacitásokra! Adjon az utóbbiakra szemleletes értelmezést!



Az elektródarendszert jellemző együtthatók:

φ_i : Az elektródák potenciáljai

Q_i : Az elektródák töltései

A p_{ik} potenciál együtthatók bevezetésével:

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^n p_{ik} Q_k \quad p_{ik} = p_{ki}$$

A fenti egyenletet a töltésekre kifejezve:

$$Q_i = \sum_{k=1}^n c_{ik} \varphi_k \quad c_{ik} = c_{ki}$$

Ezután kicsit alakítsuk át a következőképpen:

$$Q_i = \sum_{k=1}^n c_{ik} (\varphi_k + \varphi_i - \varphi_i) = \sum_{k=1}^n -c_{ik} (\varphi_i - \varphi_k) + \sum_{k=1}^n c_{ik} \varphi_i$$

$$Q_i = \sum_{k=1}^n C_{ik} (\varphi_i - \varphi_k) + C_{i0} \varphi_i \quad , \text{ ahol } C_{i0} = \sum_{k=1}^n c_{ik} \text{ és } C_{ik} = -c_{ik}$$

Az ábrán látható módon úgy értelmezhető, hogy az i -dik és a k -adik elektróda közé egy C_{ik} kapacitású kondenzátor van kapcsolva, melynek töltése $Q = C_{ik} (\varphi_i - \varphi_k) = C_{ik} U_{ik}$, az i -edik elektróda és a föld közé egy C_{i0} kapacitású kondenzátor van kapcsolva, amelynek töltése:

$$Q = C_{i0} \varphi_i = C_{i0} U_{i0}$$

A nagybetűvel jelölt C_{ik} kapacitások a részkapacitások. A két elektróda között elhelyezkedőt hívjuk főkapacitásnak, az elektróda és a föld között elhelyezkedő C_{i0} pedig földkapacitásnak.

25. Hogyan számítható ki a sztatikus elektromos térben tárolt energia? Ismeresse az elektródarendszer energiájára vonatkozó formulákat is!

Egy térrészben tárolt elektromos energiát általánosan az elektromos energiasűrűség térfogati integráljaként határozhatjuk meg.

Sztatikus elektromos térben tárolt energia:

$$W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}Q \int_{r_0}^{\infty} \vec{E} dr$$

Elektródarendszer energiája:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k Q_k$$

n=2 esetre:

$$W = \frac{1}{2} \varphi_1 Q_1 + \frac{1}{2} \varphi_2 Q_2 = \frac{1}{2} p_{11} Q_1^2 + \frac{1}{2} p_{22} Q_2^2 + p_{12} Q_1 Q_2$$

$$W = \frac{1}{2} C_{10} \varphi_1^2 + \frac{1}{2} C_{20} \varphi_2^2 + \frac{1}{2} C_{12} (\varphi_1 - \varphi_2)^2$$

26. Ismeresse és értelmezze a stacionárius áramlási tér alapösszefüggéseit! Mely területeken alkalmazható ez a problématípus?

Írjuk fel a gerjesztési törvényt:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \text{div rot } \vec{H} = \text{div } \vec{J} + \text{div } \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

De mivel $\text{div rot } \vec{H} = 0$ és $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, azaz minden időben állandó, nincs deriválás, és csak a töltések mozognak, ezért állandó áram folyik a stacionárius térbeli áramlás egyenletei:

$$\text{div } \vec{J} = 0 \qquad \text{rot } \vec{E} = 0 \qquad \vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_b)$$

Stacionárius áramlási feladatnál legyenek adottak az ideális vezetőnek tekintett elektródák alakja, és árama, továbbá rossz vezetőnek vagy szigetelőnek tekintett közeg konduktivitása.

Olyan zárt felületekre nézzük, amelyek mentén a $\vec{J}$ áramsűrűség vagy állandó, vagy a felület egy A részén állandó, a felület többi részén pedig nullának tekinthető, továbbá a $\vec{J}$ vektor a felületre merőleges. Ekkor az áramsűrűség és az áram kapcsolata a következő alakra egyszerűsödik:

$$I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = J \cdot A \quad (I \text{ az eredő áram})$$

Pont (gömb) források esetén:

$$J \cdot 4\pi r^2 = I$$

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{4\pi\sigma r^2}$$

$$J = \frac{I}{4\pi r^2}$$

A potenciál sugártól való függése:

$$\varphi(r) = \int_r^\infty E_r(r) dr = \int_r^\infty \frac{I}{4\pi\sigma r^2} dr = \frac{I}{4\pi\sigma r}$$

Két elektróda közötti feszültség:

$$U_{12} = \varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \frac{I}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Az erőtér két gömb között megegyezik azzal az erőtérrel, amelyet a középpontban levő I pontszerű áram hoz létre (helyettesítő áram). Abban az esetben, amikor csak két elektródának van +I, ill. -I árama, a többi elektróda árama nulla, akkor a két elektróda közötti U feszültség meghatározásával kifejezhető az elektródapár G konduktanciája:

$$G = \frac{I}{U}$$

Vonalforrások esetén:

$$J \cdot 2\pi l = I \quad \rightarrow \quad J = \frac{I}{2\pi r \cdot l}$$

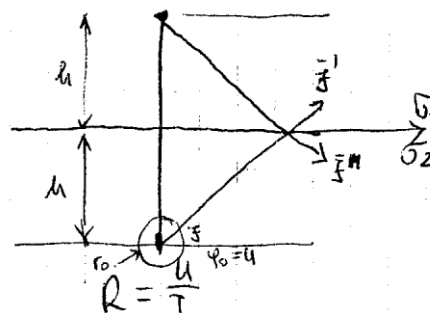
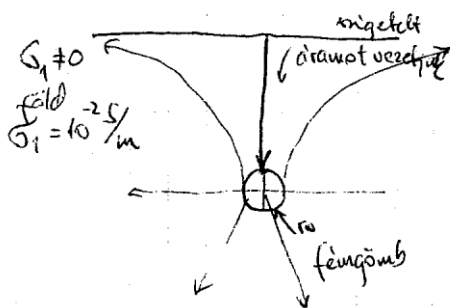
$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{i}{2\pi\sigma r} \quad , \text{ ahol } I = i \cdot \ell$$

A potenciálfüggvény $r_0 = 1$ választással:

$$\varphi(r) = \int_r^{r_0} E_r(r) dr = \int_r^{r_0} \frac{i}{2\pi\sigma r} dr = \frac{i}{2\pi\sigma} \ln \frac{r_0}{r}$$

$$\varphi(r) = \frac{i}{2\pi\sigma} \ln \frac{1}{r}$$

Gömb-földelő esetén:



$$\varphi = \frac{I}{4\pi\sigma_1 r_0} + \frac{I}{4\pi\sigma_1 2h}$$

$$R = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{2h} \right)$$

Ez a problémátípus alkalmazható a földelésbiztosítások és pl orvosi mérőeszközök területén.

27. Ismertesse a stacionárius áramlási tér Laplace-egyenletét! Sorolja fel, és illusztrálja példával az egyenlet egyértelmű megoldhatóságát biztosító peremfeltételeket!

Alapegyenletek:

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad \mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_b)}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi$$

$$\text{ha, } \mathbf{E}_b = 0 \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_v$$

$$\operatorname{div}(-\sigma \cdot \operatorname{grad} \Phi) = 0$$

$$\boxed{\operatorname{div}(\sigma \cdot \operatorname{grad} \Phi) = 0}$$

Speciális esetben homogén közeg, ($\sigma = \text{konst.}$):

$$\sigma \cdot \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = 0$$

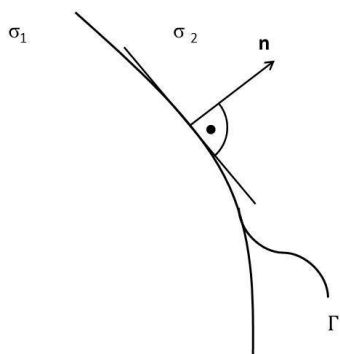
$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = 0 \quad \Delta \Phi = 0$$

$$\boxed{\Delta \Phi = 0 \quad \sigma = \text{konst.}}$$

ahol Δ a Laplace operátor:

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

Az egyértelmű megoldhatóságot biztosító peremfeltételek:



$$J_{2n} = J_{1n} - \frac{\partial \rho_\Gamma}{\partial n}$$

ρ_L : a felületi töltéssűrűség jele, mert a σ már foglalt. Ha a J normálisai közt különbség van, akkor töltés halmozódik fel a felületen vagy töltés távozik a felületről. Speciális esetben ($\rho_\Gamma = 0$):

$$J_{2n} = J_{1n}$$

$$\begin{aligned} E_{2t} &= E_{1t} \\ \Phi_2 &= \Phi_1 + \underbrace{\text{konstans}}_0 \\ [\Phi]_\Gamma &= 0 \end{aligned}$$

$$\sigma_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = \sigma_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \rightarrow \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right]_\Gamma = 0$$

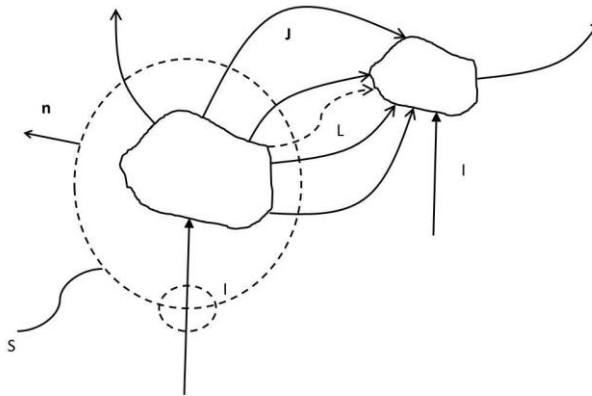
A potenciál ugrása a gamma felületen 0.

28. Ismertesse az ellenállás fogalmát, és fejezze ki a térjellemző mennyiségekkel!

Az **elektromos ellenállás** (rezisztencia, jele: **R**) az anyag azon tulajdonsága, hogy az áram folyását gátolja, és az $I^2 \cdot R$ villamos teljesítményt hővé alakítja.

$$R = \rho \frac{l}{A} [\Omega] \quad \rho = \frac{E}{J}$$

ahol $\rho \left[\Omega m = \frac{Vm}{A} \right]$ az anyag fajlagos ellenállása, l a hossza és A a keresztmetszete



$$U = \int_L E dl \sim I$$

$$R = \frac{U}{I} [\Omega] \text{ ill. } G = \frac{I}{U} [S]$$

$$I = \oint_s J ds = \oint_s \sigma E ds$$

$$R = \frac{\int_L E dl}{\oint_s \sigma E ds}$$

Ahol legyen L tetszőleges görbe. S tetszőleges felület, melyen 0-hoz közelítő területű lyukat hagyunk a bemenő áram számára.

29. Hogyan számítható a térbeli áramlás által vezető anyagban keltett hőteljesítmény (Joule-veszteség)?

A teljesítménysűrűség az áramsűrűségből és az elektromos térősségből számítható:

$$p = \overline{J \cdot E} = J \frac{J}{\sigma} = \frac{J^2}{\sigma} \quad (E_b = 0)$$

$$p = \frac{J^2}{\sigma} \left[\frac{W}{m^3} \right]$$

A teljesítmény, pedig teljesítménysűrűség térfogat szerinti integrálja

$$P = \int_V p dV = I^2 R$$

Ez az ellenálláson hő formájában távozik, az energiamérlegben negatív előjellel vesszük figyelembe.

30. Miben áll, és meddig terjed a stacionárius áramlás és az elektrosztatika analógiája? Mikor és hogyan alkalmazható a tükrözés módszere áramlási tereknél?

Stacionárius áramlás:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{rot} E = 0 & E_b = 0 \\ \operatorname{div} J = 0 & E = -\operatorname{grad} \Phi \\ J = \sigma E & \Delta \Phi = 0 \end{array}$$

Elektrosztatika:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{rot} E = 0 & \rho = 0 \\ \operatorname{div} D = 0 & E = -\operatorname{grad} \Phi \\ D = \varepsilon E & \Delta \Phi = 0 \end{array}$$

Analógia: két jelenség analóg, ha azonos alakú differencia egyenletnek és azonos peremfeltételeknek tesznek eleget.

A következő megfeleltetések értelmezhetők az áramlási tér és az elektrosztatika között:

Elektrosztatika:	Q	φ	ε	D	E	C
Stac. áramlás:	I	φ	σ	J	E	G

DE: $\sigma = 0$ jellemzőjű anyag van (ideális szigetelő), de $\varepsilon = 0$ jellemzőjű anyag nincs azoknak a térbeli áramlásos példákban, amelyekben $\sigma = 0$, nincs elektrosztatikus megfelelőjük, ha az egyik feladatot megoldottuk, akkor betűcserével megkapjuk a másik feladat megoldását is az analógia következménye:

$$C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{\oint \bar{D} d\bar{A}}{U_{12}} = \frac{\varepsilon \oint \bar{E} d\bar{A}}{U_{12}} \quad G = \frac{I}{U_{12}} = \frac{\oint \bar{J} d\bar{A}}{U_{12}} = \frac{\sigma \oint \bar{E} d\bar{A}}{U_{12}} \quad \frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

A tükrözés módszere úgy alkalmazható, hogy az adott homogén, σ vezetőképességű közegben az eredeti peremfeltételeket kielégítő áramlási teret eredményez.

$$J_{2n} = J_{1n} \quad E_{2t} = E_{1t}$$

31. Ismertesse a stacionárius áram mágneses terére vonatkozó alapegyenleteket, és a problémátípus főbb alkalmazási területeit!

A Maxwell egyenletekből kiindulva:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J} \quad \operatorname{div} \bar{B} = 0 \quad \bar{B} = \mu_0 \bar{H}$$

Itt feltételezzük, hogy nincs jelen ferromágneses közeg, ekkor a közeg permeabilitása mindenütt állandó, továbbá hogy a vizsgált térrész mindenütt a végtelenbe nyúlik.

A folytonossági feltételek két közeg határán:

$$\begin{array}{l} H_{1t} = H_{2t} \\ B_{1n} = B_{2n} \end{array}$$

Vektorpotenciál:

Azt a vektormezőt határozza meg, aminek az adott vektormező a rotációja.

Mivel H nem örvénymentes, ezért általában nem állítható elő egy egyértékű skalár potenciál gradienseként. Ismeretes azonban, hogy bármely divergencia mentes $B = B(r)$ vektor előállítható egy alkalmas $A = A(r)$ vektor, a vektorpotenciál divergenciájaként (a vektorpotenciál SI egysége T/m), hiszen $\text{div rot } A = 0$. ezek szerint:

$$\bar{B} = \text{rot } \bar{A}$$

A vektorpotenciál divergenciája szabadon megválasztható. A legegyszerűbb és legcélszerűbb választás az ún. Coulomb mérték: $\text{div } A = 0$. A vektorpotenciál ismeretében meghatározható bármely ℓ zárt görbe által határolt A' felület fluxusa a Stokes tétel felhasználásával:

$$\Phi = \int_{A'} B \, dA' = \int_{A'} \text{rot } A \, dA' = \oint_l A \, dl$$

ahol a görbe irányítása jobbszavar szabály szerint van a felületi normálishoz rendelve (ez gyakran egyszerűbben számítható, mint B felület menti integrálja)

A vektorpotenciálra vonatkozó egyenlet előállításához:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{B} = \text{rot } \bar{A} \\ \text{rot}(\bar{B} / \mu) = \bar{J} \end{array} \right\} \mu_0 \bar{J} = \text{rot } \bar{B} = \text{rot rot } \bar{A} = \text{grad div } \bar{A} - \Delta \bar{A}$$

$$\Delta = \text{grad div} - \text{rot rot}$$

Mivel $\text{div } \bar{A} = 0$, ezért a vektorpotenciálnak a $\Delta \bar{A} = -\mu_0 \bar{J}$ vektoriális Poisson egyenletet kell kielégítenie. Ha a permeabilitás csak térrészenként állandó, akkor minden térrészben meg kell oldani a $\Delta A_i = -\mu_0 J_i$, vektoriális Poisson egyenletet, továbbá két közeg határfelületénél ki kell elégíteni a folytonossági feltételeket. Célszerű a vektorpotenciált folytonosnak választani, vagyis kielégíteni az $A_{it} = A_{jt}$, $A_{in} = A_{jn}$ folytonossági feltételeket is.

Általános megoldás:

Mint az előbb láttuk lineáris és homogén közeg esetén a vektorpotenciál a $\Delta A = -\mu_0 J$ a vektoriális Poisson egyenlet megoldása. Azonban már ismerjük a $\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$ skaláris Poisson egyenlet megoldását, ennek alapján például a $\Delta A_x = -\mu_0 J_x$ egyenlet megoldása:

$$A(r) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{J_x \bar{e}_x + J_y \bar{e}_y + J_z \bar{e}_z}{R} dV' \quad \text{ahol } R = |r' - r|$$

A vektorpotenciál helyfüggésének ismeretében a mágneses indukció és térerősség rotáció képzéssel számítható.

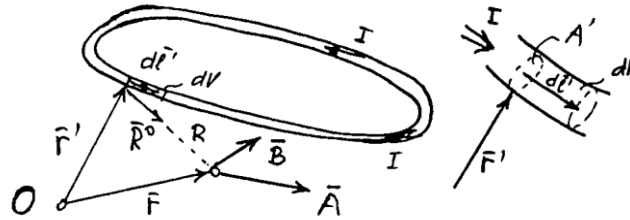
Főbb alkalmazási terület:

Áramjárta vezető mágneses terének számítása, amiből például a tekercsek, ill. transzformátorok ön ill. kölcsönös induktivitása meghatározható.

32. Ismertesse es értelmezze a Biot-Savart-törvényt! Illusztrálja egy egyszerű példával!

A Biot-Savart-törvény áramjárta hurkok által keltett mágneses indukció számítására használjuk.

Induljunk ki abból, hogy a mágneses indukció kifejezhető a vektorpotenciál rotációjával.



$$J dV' = J A' dl' = I dl' \rightarrow A(r) = \frac{\mu}{4\pi} I \oint \frac{dl'}{R}, \text{ ahol } R = |r' - r|$$

A mágneses indukció általános kifejezése értelmében ($\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$):

$$\vec{B} = \text{rot } \frac{\mu}{4\pi} I \oint \frac{dl'}{R} = \frac{\mu}{4\pi} I \oint \text{rot } \frac{dl'}{R}$$

Felhasználva a $\text{rot}(a \cdot b) = (\text{grad } a) \times b + a \cdot \text{rot } b$ vektoranalitikai összefüggést $a = 1/R$ $b = dl'$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy:

$$\text{rot } \frac{dl'}{R} = (\text{grad } \frac{1}{R}) \times dl' = -\frac{R^0}{R^2} \times dl' = dl' \times \frac{R^0}{R^2}$$

ahol $R^0 = \frac{r' - r}{R}$ az r' pontból az r pontba mutató egységvektor

$$H(r) = \frac{1}{4\pi} I \oint \frac{dl' \times (r' - r)}{|r' - r|^3}$$

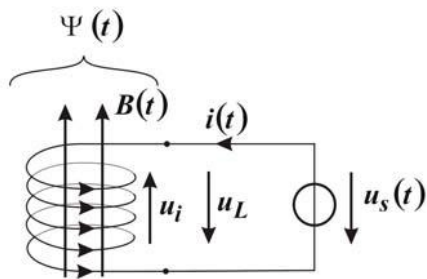
Ezt visszairva a fenti egyenletbe, és leosztva a permeabilitással, megkapjuk a Biot-Savart törvényt:

$$H(r) = \frac{1}{4\pi} I \oint \frac{dl' \times R_0}{R^2} \text{ ahol } R = |r' - r| \text{ és } R_0 = \frac{r' - r}{R}$$

Ez egy újabb példa arra, hogy a Maxwell egyenletekből matematikai úton tapasztalati összefüggések vezethetők le. Vezetékek mágneses terét sokszor csak azért számítjuk, hogy ennek alapján meghatározhassuk például egy tekercs öninduktivitását, vagy egy transzformátor tekercsei között a kölcsönös induktivitást.

33. Ismertesse az ön- és kölcsönös indukció fogalmát es energetikai hátterét! Térjen ki a külső és belső induktivitás fogalmára!

Öninduktivitás:



Ha az áramerősséget változtatjuk, változik a fluxus magában a tekercsben, így Faraday indukciótörvényének értelmében a tekercs két végpontja között feszültség keletkezik (önindukciós feszültség)

$$U_L = N \frac{\Delta \Psi}{\Delta t}$$

Önindukciós együttható számítása:

$$L = \frac{\Psi}{I} [H]$$

A gerjesztési törvény alapján:

$$\frac{1}{\mu_l} \oint B \, dl = I$$

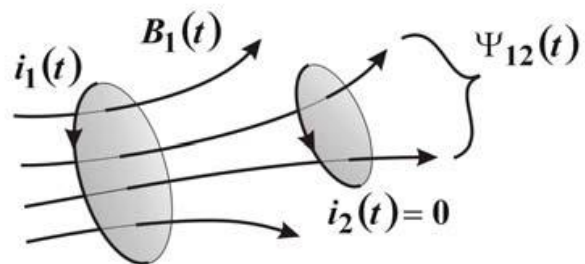
A mágneses fluxus kiszámítása:

$$\Psi = \int_A B \, dA$$

Kölcsönös induktivitás:

Adott két tekercs és csak az elsőben folyik áram. ($I_2 = 0$)

Az első tekercsben folyó áram a második tekercs belsejében fluxusváltozást idéz elő, ezért abban feszültség indukálódik.



Az L_{21} indukciós együttható számítása:

$$L_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} [H]$$

A gerjesztési törvény alapján:

$$\frac{1}{\mu_l} \oint B \, dl = I_1$$

A mágneses fluxus kiszámítása:

$$\Psi_{21} = \int_{A_2} B \, dA_2$$

Energetikai háttér:

Általános esetben, n darabból álló tekercsrendszere:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Psi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n L_{kj} I_k I_j$$

ahol L_{kj} a k és j tekercs kölcsönös induktivitása.

A külső és belső induktivitás fogalmát:

A valóságban egy vezeték konkrét keresztmetszettel rendelkezik, amit a fenti számítások során figyelmen kívül hagyunk jelentős egyszerűsítést téve ezzel.

Az induktivitás felbontható egy külső és egy belső indukciós együtthatóra:

$$L_{\text{ön}} = L_k + L_b$$

Külső indukciós együttható (L_k):

Az áramvezetőn kívüli mágneses térből származik

Belső indukciós együttható (L_b):

A fluxusból nem, de az energiából számolható:

$$\frac{1}{2} L_b I^2 = \int_V \frac{1}{2} \mu H^2 dV = W_m$$
$$L_b = \frac{1}{I^2} \int_V \mu H^2 dV$$

34. Hogyan számítható a stacionárius mágneses térben tarolt energia? Ismertesse a tekercsrendszer energiájára vonatkozó formulát is!

Tekercs energiája:

Mint ahogy az áram változásával változik a tekercsben a fluxus, és a tekercs pólusain mérhető feszültség ami:

$$u_i = - \frac{d\Psi}{dt}$$

Úgy változik az időegység alatt a tekercs által felvett energia is:

$$dW = u_L idt = u_i idt = \frac{d\Psi}{dt} idt = i d\Psi$$

Ebbe behelyettesítve a $\Psi = LI$ kifejezést kapjuk az energiára vonatkozó összefüggést:

$$W = \frac{1}{2} LI^2$$

A tekercsrendszer energiája

$$W = \frac{1}{2} (\Psi_1 I_1 + \Psi_2 I_2 + \dots + \Psi_n I_n)$$

Ahol a tekercsek fluxusai:

$$\Psi_i = L_{11} I_1 + L_{12} I_2 + \dots + L_{1n} I_n$$

Pl. két tekercsből álló rendszerre:

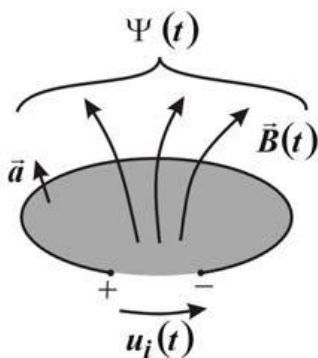
$$W = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2$$

35. Mutassa be az indukálási jelenségeket (nyugalmi es mozgási), valamint az indukált feszültség számítását! Mondjon példákat gyakorlati alkalmazásra!

Nyugalmi indukció:

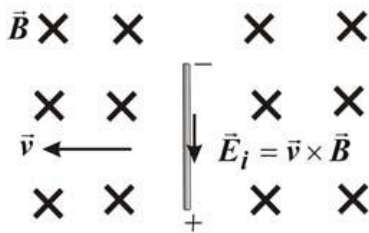
Ebben az esetben sem a vezető, sem a mágneses mező nem mozog. Az indukciót az időben változó fluxus hozza létre (M.II. – Faraday-tv.), amit az időben változó áram kelt (M.I. – Gerjesztési-tv.). Ez az indukált feszültség N menetszámú tekercs esetén:

$$u_i = -N \frac{d\Psi}{dt}$$



Mozgási indukció:

Ha egy időben állandó mágneses tér illetve egy benne elhelyezkedő vezető darabot egymáshoz viszonyítva mozgatunk, akkor a vezető két végpontja között feszültség mérhető.



Ezt a Lorentz-törvény írja le:

$$F_L = Q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B})$$

Itt most csak a mágneses tér okozta beiktatott vagy indukált térerősséggel kell számolunk:

$$\bar{E}_i = \bar{v} \times \bar{B} \quad \text{így} \quad F_L = QE_i$$

Innen a mozgási indukcióból származó feszültség:

$$u_i^m(t) = \int_l \bar{E}_i \cdot d\bar{l} = \int_l (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l}$$

A jelenség úgy is magyarázható, hogy a v sebességgel mozgó vezető l hosszúságú darabja dt idő alatt $da = l v dt$ felület a $-d\psi = B l v dt$ fluxus vonalait metszi, ahonnan az indukált feszültség:

$$-\frac{d\psi}{dt} = B l v = u_i$$

Habár a nyugalmi és a mozgási indukció fizikai alapja más, a két jelenség egységesen kezelhető abban az értelemben, hogy a vezető hurok fluxusának megváltozása, egyrészt a mágneses indukció

idő szerinti megváltozása miatt, másrészt a vezető keresztmetszetének megváltozása miatt jön létre, azaz

$$u_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B}(r,t) d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B}(r,t) \frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{d}{dt} \int_A \frac{\vec{B}(r,t)}{dt} d\vec{A}$$

Gyakorlati példák:

Generátor:

Mechanikai energiát (mozgási energiát) elektromos energiává átalakító eszköz, a mozgási indukció gyakorlati alkalmazását jelenti. A generátor forgásának megfelelően váltakozó áramot állít elő.

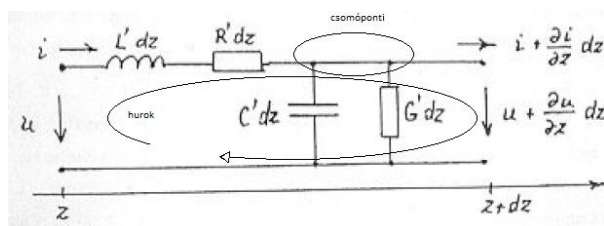
Transzformátor:

Váltakozó elektromos áram átalakítására szolgáló készülék, működési alapelve a nyugalmi indukció. Általában közös vasmagra helyezett két tekercsből áll. Az egyik tekercsbe (**primer**) váltakozó áramot vezetve, annak változó mágneses mezeje a másik tekercsben (**szekunder**) váltakozó áramot indukál.

36. Ismertesse a távvezeték elosztott paraméterű modelljét és a távíró egyenleteket! Meddig terjed a modell érvényességi köre, azaz milyen feltételek mellett írható le egy hullámvezető viselkedése az ismertetett modellel?

A távvezeték elosztott paraméterű modellje:

Az elrendezés egy differenciálisan rövid szakaszát koncentrált paraméterű kétkapuként kezeljük.



A távvezeték paramétereit hosszegységre vonatkoztatjuk:

$$\begin{aligned} L' &= L/h & [\text{H/m}] \\ R' &= R/h & [\text{ohm/m}] \\ C' &= C/h & [\text{F/m}] \\ G' &= G/h & [\text{S/m}] \end{aligned}$$

Alkalmazzuk a dz hosszúságú szakasz, helyettesítő-kapcsolására Kirchhoff feszültség- és áramtörvényét. A másodrendűen kicsiny tagok elhanyagolásával:

$$\begin{aligned} -u + L' dz \frac{\partial i}{\partial t} + R' dz i + (u + \frac{\partial u}{\partial z} dz) &= 0 \\ -i + C' dz \frac{\partial u}{\partial t} + G' dz u + (i + \frac{\partial i}{\partial z} dz) &= 0 \end{aligned}$$

Rendezve és dz -vel egyszerűsítve megkapjuk a távíró egyenleteket:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= -L' \frac{\partial i}{\partial t} - R' i \\ \frac{\partial i}{\partial z} &= -C' \frac{\partial u}{\partial t} - G' u \end{aligned}$$

Az első egyenletet differenciálva z szerint és a második egyenlet szerinti $\partial/\partial z$ -t behelyettesítve:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = L' C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (L' G' + R' C') \frac{\partial u}{\partial t} + R' G' u$$

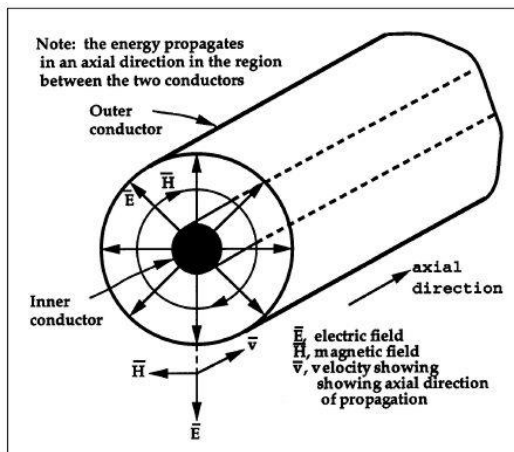
A modell Feltétele:

Egyetlen, a hosszkoordinátától függő feszültség illetve áramadattal leírható

TEM (Transzverzális Elektromos és Mágneses) típusú terjedés.

Transzverzális: $\mathbf{E}$ és $\mathbf{H}$ a terjedésre merőleges síkban fekszik.

37. Mutasson be néhány gyakori távvezeték-konstrukciót, jellemezze azok elektromos és mágneses terét! Hogyan befolyásolja a távvezeték geometriája a vezetékparamétereket?



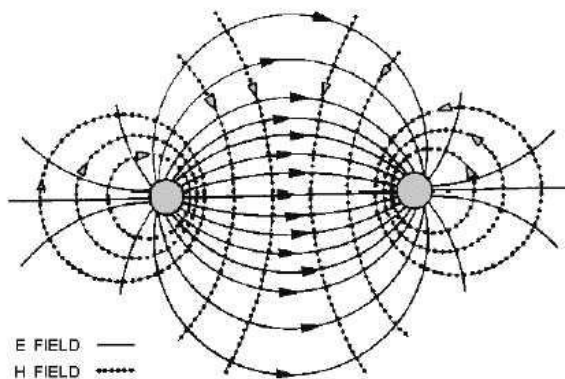
Koaxiális kábel:

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\mu_r}{4} \right]$$

$$R' = \frac{1}{\sigma_1 A_1} + \frac{1}{\sigma_2 A_2}$$

$$C' = 2\pi\epsilon \frac{1}{\ln(r_2/r_1)}$$

$$G' = 2\pi\sigma_0 \frac{1}{\ln(r_2/r_1)}$$



Kettős (Lecher-) vezeték:

$$L' = \frac{\mu_0}{\pi} \left[\ln \frac{d}{r_0} + \frac{\mu_r}{8} \right]$$

$$R' = 2 \frac{1}{\sigma A}$$

$$C' = \pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{1}{\ln(d/r_0)}$$

$$G' = \pi\sigma_0 \frac{1}{\ln(d/r_0)}$$

38. Ismertesse a távvezetékre vonatkozó Helmholtz-egyenletet; mutassa be és értelmezze annak általános megoldását!

A Helmholtz-egyenletet a távíró egyenlet szinuszos, időbeli változására vonatkozó alakja. Az időben szinuszos állandósult állapotot a feszültség és az áram komplex alakjával írjuk le:

$$u(z,t) = \operatorname{Re}\{U(z)e^{j\omega t}\} \quad i(z,t) = \operatorname{Re}\{I(z)e^{j\omega t}\}$$

ahol $U = U(z)$ és az $I = I(z)$ komplex amplitúdók. A differenciálás $j\omega$ -val való szorzásra egyszerűsödik, a $\operatorname{Re}\{\}$ műveletet elhagyhatjuk és $e^{j\omega t}$ -vel egyszerűsíthetünk:

$$\frac{dU}{dz} = -(R' + j\omega L')I \quad \frac{dI}{dz} = -(G' + j\omega C')U$$

Az első egyenletből az áramot kifejezve:

$$I = -\frac{1}{R' + j\omega L'} \frac{dU}{dz} \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2 U}{dz^2} \left(-\frac{1}{R' + j\omega L'} \right) = -(G' + j\omega C')U$$

Bevezetve a terjedési együtthatót illetve a hullámimpedanciát:

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

A Helmholtz-egyenletet

$$\boxed{\frac{d^2 U}{dz^2} - \gamma^2 U = 0}$$

Ez egy közönséges másodrendű differenciálegyenlet, két sajátértéke $+\gamma$ és $-\gamma$.

Az általános megoldás ennek megfelelően:

$$\boxed{U(z) = U_1^+ e^{-\gamma z} + U_1^- e^{+\gamma z}}$$

Az áramfüggvény általános alakja pedig:

$$I(z) = \frac{U_1^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{U_1^-}{Z_0} e^{+\gamma z}$$

$$\boxed{I(z) = I_1^+ e^{-\gamma z} - I_1^- e^{+\gamma z}}$$

Értelmezése:

A fenti egyenlet egy, a z -tengely pozitív irányában terjedő, csillapított szinuszos feszültség, - ill. áramhullámot ír le. A pozitív, illetve a negatív z irányba haladó hullámok összegeként állítható elő a kialakuló feszültség illetve árameloszlás. $U_1^+, U_1^-, I_1^+, I_1^-$ konstansok a vezeték végein elhelyezett lezárások (peremfeltételek) ismeretében határozhatóak meg.

39. Mutassa be a távvezeték hullámparamétereit, ill. kapcsolatukat a fázissebességgel és a hullámhosszal! Térjen ki az ideális távvezeték speciális esetére is!

Legyen α a csillapítási együttható, β a fázisegység, $v = \omega/\beta$ pedig a fázissebesség. Így a terjedési együttható:

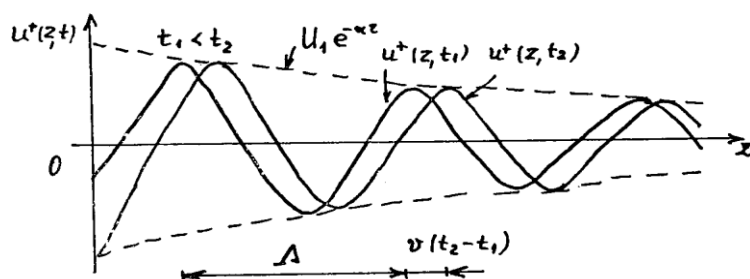
$$\gamma = \alpha + j\beta = \alpha + j\frac{\omega}{v}$$

A feszültségfüggvény pedig:

$$u(z, t) = \text{Re}\{U_1^+ e^{-\alpha z} e^{j\omega(t-z/v)} + U_1^- e^{+\alpha z} e^{j\omega(t+z/v)}\}$$

Ha $U_1^- = 0$, akkor az $e^{-\alpha z}$ tényező azt jelenti, hogy a feszültség amplitúdója z függvényében exponenciálisan csökken. α fejezi ki a csökkenés mértékét, β a feszültség késését a $z = 0$ helyen felvett fázishoz képest.

Legyen $\Lambda = 2\pi/\beta$ a vezetéken mért hullámhossz, $\lambda = c/f$ a szabadtéri hullámhossz, ekkor:



$$u^+(z, t) = U_1^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) = U_1^+ e^{-\alpha z} \cos \omega(t - \frac{z}{v})$$

$$u^-(z, t) = U_1^- e^{+\alpha z} \cos(\omega t + \beta z) = U_1^- e^{+\alpha z} \cos \omega(t + \frac{z}{v})$$

Ez a z -tengely negatív irányában terjed v sebességgel, exponenciálisan csillapodik. Az egy irányba terjedő feszültség- és áramhullám komplex amplitúdójának viszonya tetszőleges helyen:

$$Z_0 = \frac{U^+(z)}{I^+(z)} = -\frac{U^-(z)}{I^-(z)}$$

Végeredményben a vezetéken kialakuló feszültség és áram szinuszos időbeli változás esetén úgy írható le, mint két, ellentétes irányban a fázissebességgel haladó és a terjedés irányában csillapított hullám szuperpozíciója.

Ideális vezeték esetén ($R' = 0$, $G' = 0$, $\alpha = 0$):

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{\frac{L'C'}{\beta}}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

40. Definiálja a reflexiós tényezőt; ismertesse speciális lezárások (illesztett, nyitott végű, rövidre zárt) esetén, az ideális távvezetéken kialakuló áram- és feszültségviszonyokat!

Reflexiós tényező:

A visszavert és a beeső feszültség hullámnak a vezeték végén fellépő amplitúdó- viszonya:

$$\Gamma = \frac{U_2^-}{U_2^+}$$

Ha a lezáró impedanciát felírjuk a komplex Ohm-törvénnyel:

$$Z_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{U_1^+ e^{-\gamma h} + U_1^- e^{+\gamma h}}{\frac{U_1^+}{Z_0} e^{-\gamma h} - \frac{U_1^-}{Z_0} e^{+\gamma h}} = Z_0 \frac{U_2^+ + U_2^-}{U_2^+ - U_2^-}$$

$$Z_2 = Z_0 \frac{U_2^+ + U_2^-}{U_2^+ - U_2^-}$$

U_2^- kifejezve a reflexiós tényező definíciójából: $U_2^- = \Gamma \cdot U_2^+$, és ezt behelyettesítve:

$$Z_2 = Z_0 \frac{U_2^+ + \Gamma U_2^+}{U_2^+ - \Gamma U_2^+}$$

$$Z_2 = Z_0 \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$$

Innen Γ másik definíciója Z_0 -al és Z_2 -vel kifejezve:

$$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}$$

Kifejezhető a feszültség illetve áram z szerinti függése a reflexiós tényezővel:

$$\begin{aligned} U(h) &= U_2^+ (e^{\gamma h} + \Gamma e^{-\gamma h}) \\ I(h) &= \frac{U_2^+}{Z_0} (e^{\gamma h} - \Gamma e^{-\gamma h}) \end{aligned}$$

Speciális lezárások, ideális távvezeték ($\gamma = j\beta$) esetén:

Illesztett lezárás: Ha a vezetéket $Z_2 = Z_0$ hullámimpedanciával zárjuk le, nem lép fel visszaverődés ($\Gamma = 0$) az illesztésnél, így kiküszöbölhető a visszavert áramhullám által okozott veszteség.

$$\left. \begin{aligned} U(h) &= U_2^+ (e^{j\beta h} + 0 \cdot e^{-j\beta h}) = U_2^+ e^{j\beta h} \\ I(h) &= \frac{U_2^+}{Z_0} (e^{j\beta h} - 0 \cdot e^{-j\beta h}) = \frac{U_2^+}{Z_0} e^{j\beta h} \end{aligned} \right\} \text{ tisztán } \underline{\text{haladó hullám}}$$

Nyitott végű lezárás(szakadás): Minden időpontban a feszültség és az áram eloszlása a vezetéken szinuszos, de ezek most állóhullámok.

$$Z_2 = \infty \quad \rightarrow \quad \Gamma = \lim_{Z_2 \rightarrow \infty} \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = 1$$

$$U(h) = U_2^+ (e^{j\beta h} + 1 \cdot e^{-j\beta h}) = 2U_2^+ \cos(\beta h)$$

$$I(h) = \frac{U_2^+}{Z_0} (e^{j\beta h} - 1 \cdot e^{-j\beta h}) = 2 \frac{U_2^+}{Z_0} j \sin(\beta h)$$

$$\text{Euler formula: } \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

Rövidre zárt lezárás

Szintén állóhullámok alakulnak ki.

$$Z_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \Gamma = \lim_{Z_2 \rightarrow 0} \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = -1$$

$$U(h) = U_2^+ (e^{j\beta h} + (-1) \cdot e^{-j\beta h}) = 2U_2^+ j \sin(\beta h)$$

$$I(h) = \frac{U_2^+}{Z_0} (e^{j\beta h} - (-1) \cdot e^{-j\beta h}) = 2 \frac{U_2^+}{Z_0} \cos(\beta h)$$

41. Ismertesse a tetszőleges impedanciával lezárt ideális távvezeték feszültség- és áramviszonyait, valamint az állóhullám-haladóhullám felbontást! Mi az energetikai tartalma a reaktanciával lezárt ideális távvezetéken kialakuló hullámképnek?

Tetszőleges lezárás esetén, ideális esetben ($\gamma = j\beta$):

$$Z_2 = R + jX \quad \rightarrow \quad \Gamma = \frac{R + jX - Z_0}{R + jX + Z_0} = |\Gamma| e^{j\varphi} \quad 0 \leq |\Gamma| \leq 1$$

Ezt behelyettesítve:

$$U(h) = U_2^+ (e^{j\beta h} + |\Gamma| e^{j\varphi} e^{-j\beta h})$$

$$U(h) = U_2^+ e^{j\varphi/2} (e^{j(\beta h - \varphi/2)} + |\Gamma| e^{-j(\beta h - \varphi/2)}) \quad / \text{kiemeltünk } e^{j\frac{\varphi}{2}}$$

Kivonunk, majd hozzáadunk $|\Gamma| e^{j(\beta h - \varphi/2)}$ -t:

$$U(h) = U_2^+ e^{j\varphi/2} \left(\underbrace{e^{j(\beta h - \varphi/2)} - |\Gamma| e^{j(\beta h - \varphi/2)}}_{(1-|\Gamma|)e^{j(\beta h - \varphi/2)}} + \underbrace{|\Gamma| e^{j(\beta h - \varphi/2)} + |\Gamma| e^{-j(\beta h - \varphi/2)}}_{2|\Gamma| \cos(\beta h - \varphi/2)} \right)$$

$U(h) = \underbrace{U_2^+ (1 - \Gamma) e^{j\beta h}}_{\text{pozitív irányba haladó hullám}} + \underbrace{U_2^+ e^{j\varphi/2} 2 \Gamma \cos(\beta h - \varphi/2)}_{\text{állóhullám}}$
--

A vezetéken kialakuló hullámot egy pozitív irányba haladó és egy állóhullám összegeként írja fel. Áram esetén hasonló módon járunk el:

$$I(h) = I_2^+ e^{j\varphi/2} \left(e^{j(\beta h - \varphi/2)} - |\Gamma| e^{-j(\beta h - \varphi/2)} \right)$$

$$I(h) = I_2^+ e^{j\varphi/2} \left(\underbrace{e^{j(\beta h - \varphi/2)} + |\Gamma| e^{j(\beta h - \varphi/2)}}_{(1+|\Gamma|)e^{j(\beta h - \varphi/2)}} - \underbrace{|\Gamma| e^{j(\beta h - \varphi/2)} - |\Gamma| e^{-j(\beta h - \varphi/2)}}_{-2|\Gamma| \cos(\beta h - \varphi/2)} \right)$$

$$I(h) = \underbrace{I_2^+ (1+|\Gamma|) e^{j\beta h}}_{\text{pozitív irányba haladó hullám}} - \underbrace{I_2^+ e^{j\varphi/2} 2|\Gamma| \cos(\beta h - \varphi/2)}_{\text{állóhullám}}$$

Reaktanciával való lezárás azt jelenti, hogy a vezeték vége olyan kétpólussal van lezárva, amely nem vesz fel hatásos teljesítményt.

42. Hogyan határozhatók meg a feszültségamplitúdó minimum- és maximumhelyei a távvezeték mentén, a lezárás ismeretében?

A lezárás és a hullámimpedancia ismeretében számolható a reflexió tényező, így induljunk ki ebből a kifejezésből:

$$U(h) = \underbrace{U_2^+ (1-|\Gamma|) e^{j\beta h}}_{\text{pozitív irányba haladó hullám}} + \underbrace{U_2^+ e^{j\varphi/2} 2|\Gamma| \cos(\beta h - \varphi/2)}_{\text{állóhullám}}$$

A fenti egyenlet a vezetéken kialakuló hullámot egy pozitív irányba haladó és egy állóhullám összegét írja le. Az állóhullám következtében az amplitúdó a vezeték mentén változik, maximuma az állóhullám legnagyobb kitérésénél, minimuma az állóhullám csomópontjánál lesz:

$$\begin{aligned} |U|_{\max} &= (1+|\Gamma|) |U_2^+| \\ |U|_{\min} &= (1-|\Gamma|) |U_2^+| \end{aligned}$$

A feszültség abszolút értéke maximumánál az áram abszolút értéke minimális és fordítva.

43. Definiálja az állóhullámarányt, és ismertesse számítását! Hogyan használható ez a mennyiség nagyfrekvenciás impedancia-mérésre?

Az állóhullám-intenzitás mértékét a tápvonal mentén mérhető maximális és minimális feszültség hányadosaként definiáljuk, és állóhullámaránynak nevezzük. Jele az angol „voltage standing wave ratio” kezdőbetűiből VSWR vagy σ .

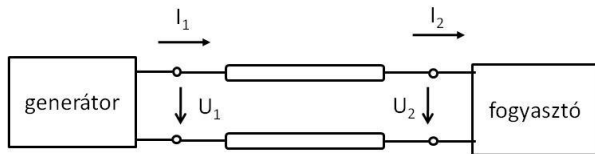
$$VSWR = \frac{|U|_{\max}}{|U|_{\min}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$$

A feszültség abszolút értéke maximumánál az áram abszolút értéke minimális és fordítva, és ezeken a helyeken az áram és a feszültség fázisban vannak. Ezért kimondhatjuk, hogy ideális vezetéken a maximális és minimális abszolút értékű impedancia egyúttal tiszta valós, és az állóhullámaránnyal a következőképpen fejezhető ki. A két impedancia helyének távolsága éppen negyedhullám hosszúságú.

$$Z_{\max} = Z_0 \cdot VSWR \quad Z_{\min} = \frac{Z_0}{VSWR}$$

44. Ismertesse a távvezeték kétkapuként történő leírását, a láncparamétereiket, valamint a T- és Π - helyettesítőképeket! Tekinthesz-e ez utóbbiak koncentrált paraméterű hálózati megvalósításnak?

A távvezeték legkézenfekvőbb alkalmazása a feszültség-, az áram- és a teljesítmény-átvitel. A távvezeték ekkor kétkapuként írható le, többnyire a generátort a fogyasztóval összekötő kétkapuként használjuk:



A láncparaméterek:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \bar{\bar{A}} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Induljunk ki ebből:

$$U(h) = U_1^+ e^{-\gamma h} + U_1^- e^{\gamma h}$$

$$I(h) = \frac{U_1^+}{Z_0} e^{-\gamma h} - \frac{U_1^-}{Z_0} e^{\gamma h}$$

Legyen: $U_2 = U(h=l)$ és $I_2 = I(h=l)$, ekkor: U_1^+ és U_1^- kifejezhető:

$$U_1^+ = \frac{1}{2} (U_2 + Z_0 I_2) e^{-\gamma l}$$

$$U_1^- = \frac{1}{2} (U_2 - Z_0 I_2) e^{-\gamma l}$$

A vezeték elején fellépő $U_1 = U_1^+ + U_1^-$ feszültség és $I_1 = \frac{U_1^+}{Z_0} - \frac{U_1^-}{Z_0}$ áram kifejezése ezek

felhasználásával:

$$U_1 = \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} U_2 + Z_0 \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} I_2$$

$$I_1 = \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} U_2 + \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2 Z_0} I_2$$

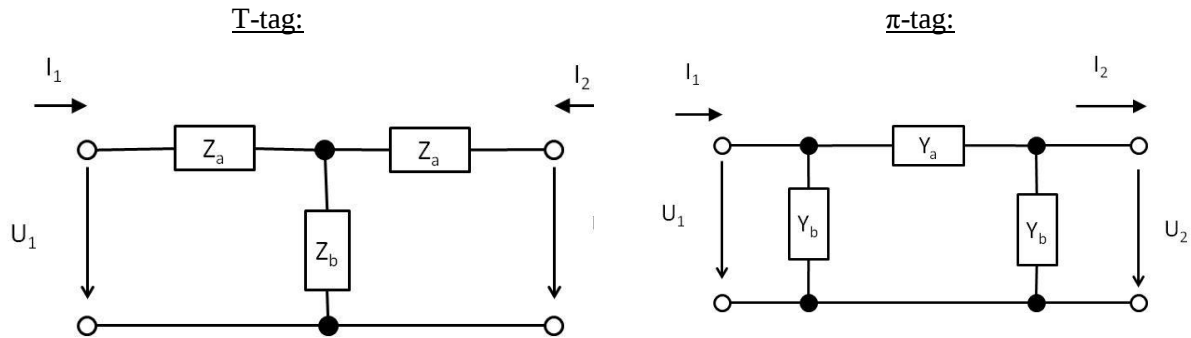
Euler formula: $\frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} = \text{ch}(\gamma \cdot l) \quad \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} = \text{sh}(\gamma \cdot l)$

Felhasználva az Euler-formulát, megkapjuk a láncparamétereiket:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ch}(\gamma \cdot l) & Z_0 \text{sh}(\gamma \cdot l) \\ Z_0^{-1} \text{sh}(\gamma \cdot l) & \text{ch}(\gamma \cdot l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

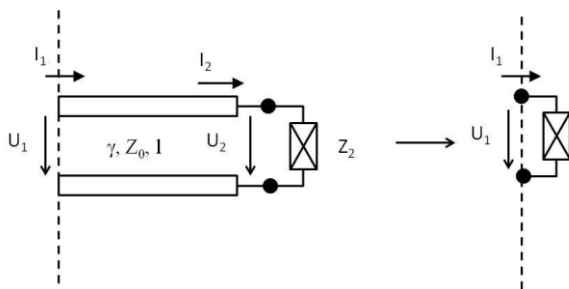
$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta \cdot l) & Z_0 j \sin(\beta \cdot l) \\ Z_0^{-1} j \sin(\beta \cdot l) & \cos(\beta \cdot l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Ideális távvezetésekre



45. Ismertesse a bemeneti impedancia fogalmát és számítási módját! Hogyan használható ez a mennyiség illesztési feladat megoldására?

A bemeneti impedancia: Egy négyfóluson mérhető impedancia a szekunder oldal valamely lezárás esetén. A primer oldali feszültség és áram hányadosával számolható.



A lánckarakterisztika segítségével kifejezhető a bemeneti impedancia:

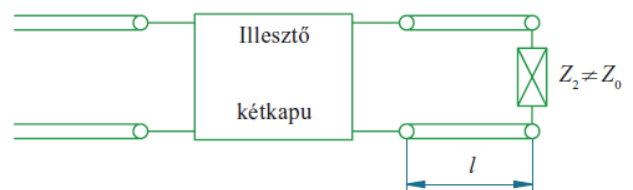
$$Z_B = \frac{U_1}{I_1} = Z_0 \frac{Z_2 \operatorname{ch}(\gamma \cdot l) + Z_0 \operatorname{sh}(\gamma \cdot l)}{Z_0 \operatorname{ch}(\gamma \cdot l) + Z_2 \operatorname{sh}(\gamma \cdot l)}$$

Ideális távvezetésekre

$$Z_B = Z_0 \frac{Z_2 + Z_0 j \operatorname{tg}(\beta \cdot l)}{Z_0 + Z_2 j \operatorname{tg}(\beta \cdot l)}$$

Illesztési feladatoknál ezt úgy kell használni, hogy reflexiómentes legyen az illesztés. Azaz a második vezeték bemeneti impedanciája megegyezzen az első hullámimpedanciájával.

$$Z_{01} = Z_{2B}$$



46. Írja fel a homogén hullámegyenletet az elektromos, illetve a mágneses térerősségre!

Ha az adott közeg a közeg homogén és lineáris (σ, ϵ, μ : állandó):

$$B = \mu H \quad D = \epsilon E \quad J = \sigma E$$

A gerjesztési törvényből, illetve Faraday indukciós törvényéből indulunk ki.

A homogén hullám egyenlet E-re:

$$[1] \quad (\text{M.I.):} \quad \text{rot } H = \sigma E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$[2] \quad (\text{M.II.):} \quad \text{rot } E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\text{rot rot } E = -\mu \text{rot} \frac{\partial H}{\partial t} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } H) \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{M.I.} \end{matrix}$$

$$\text{rot rot } E = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right) = -\mu \sigma \frac{\partial E}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\text{rot rot } E = \text{grad} \underbrace{\text{div } E}_0 - \Delta E = -\Delta E \quad \begin{matrix} \text{M.IV. div } D=0 \end{matrix}$$

$$\boxed{\Delta E - \mu \sigma \frac{\partial E}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0}$$

Az homogén hullámegyenlet H-re:

$$\text{rot rot } H = \sigma \text{rot } E + \varepsilon \text{rot} \frac{\partial E}{\partial t} = \left(\sigma + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) (\text{rot } E) \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{M.II.} \end{matrix}$$

$$\text{rot rot } H = \left(\sigma + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(-\mu \frac{\partial H}{\partial t} \right) = -\mu \sigma \frac{\partial H}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

$$\text{rot rot } H = \text{grad} \underbrace{\text{div } H}_0 - \Delta H = -\Delta H \quad \begin{matrix} \text{M.III. div } B=0 \end{matrix}$$

$$\boxed{\Delta H - \mu \sigma \frac{\partial H}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0}$$

47. Értelmezze a térerősség-vektor komplex amplitúdójának fogalmát (szinuszos állandósult állapot), és írja fel az elektromágneses hullámok Helmholtz-egyenletét az elektromos térerősségre vonatkozóan!

Tiszta szinuszos időbeli változás esetén komplex számítási technikával dolgozunk. A hálózatelemtől ismert módon a szinuszos jeleket komplex amplitúdójú, exponenciális függvények valós részeként értelmezzük:

$$\begin{aligned} E(r, t) &= \text{Re} \left\{ \tilde{E}(r) e^{j\omega t} \right\} \\ H(r, t) &= \text{Re} \left\{ \tilde{H}(r) e^{j\omega t} \right\} \end{aligned}$$

Ahol ω a szinuszos gerjesztés körfrekvenciája, $\tilde{E}(r)$ és $\tilde{H}(r)$ pedig a komplex amplitúdókat jelöli. Az elektromágneses jelenségek tárgyalása során mindig a mennyiségek komplex amplitúdójával dolgozunk, ezért ezt általában nem jelöljük külön. Szinuszos időbeli változás esetén a fent említett, helyfüggő, komplex amplitúdó vektorok meghatározása a célunk

EM hullámok Helmholtz-egyenlete

Legyen a közeg térrészenként homogén, lineáris és izotrop. Olyan térrészek vizsgálatára szorítkozunk, ahol a ρ töltéssűrűség nulla és E_b beiktatott térerősség nincs.

Mivel komplex frekvenciatartományban számolunk, az idő szerinti deriválás, pedig egy $j\omega$ - val való szorzásként értelmezhető. Ekkor a Maxwell egyenletek a következő formát öltik:

$$\begin{aligned} \text{M.I.:} & \quad \text{rot } H = (\sigma + j\omega\epsilon)E \\ \text{M.II.:} & \quad \text{rot } E = -j\omega\mu H \\ \text{M.III.:} & \quad \text{div } H = 0 \\ \text{M.IV.:} & \quad \text{div } E = 0 \end{aligned}$$

A M.II.-ből kifejezve hát helyettesítsük a M.I. egyenletbe:

$$H = -\frac{1}{j\omega\mu} \text{rot } E \quad \rightarrow \quad \text{rot} \left(-\frac{1}{j\omega\mu} \text{rot } E \right) = (\sigma + j\omega\epsilon)E$$

$$[1] \quad -\frac{1}{j\omega\mu} \text{rot rot } E = (\sigma + j\omega\epsilon)E$$

$$[2] \quad \text{rot rot } E = \underbrace{\text{grad div } E}_0 - \Delta E = -\Delta E$$

M.IV. div D=0

Az [1] -es és a [2] -es egyenletekből adódik, hogy:

$$\Delta E - j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)E = 0$$

Bevezetve a $\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$ terjedési együtthatót, megkapjuk az elektromágneses hullámok Helmholtz-egyenletét, amit hívnak időtől független hullámeqyenletnek is:

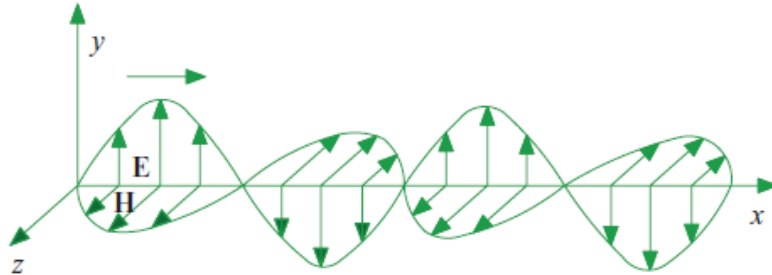
$$\Delta E - \gamma^2 E = 0$$

$H(r)$ ugyancsak kielégíti a Helmholtz egyenletet:

$$\Delta H - \gamma^2 H = 0$$

48. Definiálja a síkhullám fogalmát, és írja fel a síkhullám egydimenziós Helmholtz-egyenletet! Mit jelent a TEM-típusú hullámterjedés?

Síkhullámnak nevezzük azt a hullámfajtát, amikor az azonos fázisú helyek egy vonalon vannak.



A síkhullám egydimenziós Helmholtz- egyenlete:

Az előző fejezetben láttuk, hogy a Maxwell egyenletek a következő összefüggésekhez vezettek, itt ideális szigetelőben, azaz töltések és áramok nélkül. ($\sigma = 0$, ezért $\mu \sigma \partial E / \partial t = 0$ és $\mu \sigma \partial H / \partial t = 0$)

$$\Delta E - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta H - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0$$

Ezek az egyenletek homogén hullámegyenletek. A legegyszerűbb megoldás keresésénél tételezzük fel, hogy az x koordináta-tengely irányában terjed a hullám ($\Delta = \partial^2 / \partial x^2$). Ekkor a fenti egyenletek az alábbi egyenletekbe mennek át:

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H_i}{\partial t^2} \quad \text{ahol } i = x, y, z$$

A megoldás csak az x koordinátától, a terjedés irányától függ. Az arra merőleges síkban tehát a térerősség értéke azonos. Ezért a hullámegyenlet ezen megoldását *síkhullámnak* nevezzük.

A TEM típusú hullámterjedés: Transzverzális elektromágneses hullám. Vagyis mind az E mind pedig a H merőleges a terjedés irányára.

49. Ismertesse, hogy miben áll a síkhullám-távvezeték analógia, és meddig terjed az érvényességi köre, azaz mikor nem alkalmazható!

Az analógia alapja a Helmholtz egyenletek általános megoldása, ami távvezetékek esetén:

$$U(z) = U_1^+ e^{-\gamma z} + U_1^- e^{+\gamma z}$$

$$I(z) = I_1^+ e^{-\gamma z} - I_1^- e^{+\gamma z}$$

Síkhullámok esetén pedig:

$$E(z) = (E_1^+ e^{-\gamma z} + E_1^- e^{+\gamma z}) \mathbf{e}_x$$

$$H(z) = (H_1^+ e^{-\gamma z} - H_1^- e^{+\gamma z}) \mathbf{e}_y$$

Ha E és H merőleges a terjedés irányára, és z = állandó síkban helyfüggetlenek:

Az analógia addig használható, amíg lineárisan polarizált síkhullám merőlegesen esik be egy közeghatárra. Ha a síkhullám tartományonként homogén közegben terjed, és a közeghatárok a hullámfrontokkal párhuzamos síkok, akkor a távvezetékknél látott módon definiálhatók a reflexiós tényező, bemeneti impedancia, állóhullámarány, stb. mennyiségek a síkhullámok esetére is.

Távvezeték	L'	C'	R'	G'	U	I	Z_0	γ
Síkhullám	μ	ε	–	σ	E_x	H_y	Z_0	γ

A z -tengely menti terjedés esetén.

50. Ismertesse a síkhullám viselkedését ideális szigetelőben! Térjen ki a hullámparaméterek, a fázissebesség és a hullámhossz számítására!

A Helmholtz egyenletek megoldása alapján:

$$E(z) = (E_1^+ e^{-\gamma z} + E_1^- e^{+\gamma z}) \mathbf{e}_x$$

$$H(z) = (H_1^+ e^{-\gamma z} - H_1^- e^{+\gamma z}) \mathbf{e}_y$$

A hullámparaméterek megadásakor figyelembe vesszük, hogy ideális szigetelőben való viselkedéskor $\sigma = 0$, ezért a terjedési együttható tisztán képzetes.

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j\frac{\omega}{v}$$

Az elektromos és mágneses térerősség között, a közegre jellemző Z_0 hullámimpedancia teremt kapcsolatot.

$$Z_0 = \frac{E^+}{H^+} = -\frac{E^-}{H^-}$$

Általános esetben:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Vákuumban:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377\Omega$$

Fázissebesség:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Vákuumban:

$$v = c$$

Hullámhossz:

$$\lambda = \frac{v_f}{f}$$

Csőben mért hullámhossz:

$$\Lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

51. Ismertesse, hogy miként terjed az energia a síkhullámban! Vezesse be és értelmezze a komplex Poynting-vektort!

Az elektromágneses hullám energiát szállít. A Poynting-vektor a térben szállított energia fluxus sűrűségét és irányát határozza meg.

$$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H} \left[\frac{V}{m} \cdot \frac{A}{m} = \frac{W}{m^2} \right]$$

Amint mértékegysége is jelzi, a vektor az irányára merőleges felületegységen időegység alatt áthaladó energia. Tegyük fel, hogy nincs csillapítás ($\alpha = 0$), negatív irányba haladó hullám ($E^- = 0$), valamint hogy a hullám lineárisan polarizált, ekkor:

$$\begin{aligned} E_x(z) &= \bar{E}^+ e^{-j\beta z} & \text{ahol} & \quad \bar{E}^+ = E^+ e^{-j\varphi} \\ H_y(z) &= \bar{H}^+ e^{-j\beta z} = & \text{ahol} & \quad \bar{H}^+ = H^+ e^{-j\varphi} = (E^+ / Z_0) e^{-j\varphi} \end{aligned}$$

Valamely A felületen keresztül kisugárzott P hatásos és Q meddő teljesítmény megadható a

$$P + jQ = \oint_A \bar{S} \cdot d\bar{A}$$

alakban, ahol a $\bar{S}$ a **komplex** Poynting-vektor, amelyet az

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \bar{E}^+ \times \bar{H}^{+*}$$

összefüggés definiál. (a $*$ jel a komplex konjugálást jelöli) Ebben a kifejezésben a térerősségek komplex amplitúdói szerepelnek. Az $e^{-j\beta z}$ -k illetve az $e^{-j\varphi}$ -k a konjugálás miatt kiesnek, így marad:

$$\boxed{\bar{S} = \frac{1}{2} E^+ \times H^{+*} \cdot \bar{e}_z}$$

Ahol E^+ és H^+ a komplex amplitúdók abszolútértékei.

52. Ismertesse a síkhullám viselkedését vezető anyagban! Térjen ki a hullámparaméterek számítására, valamint a behatolási mélység fogalmára! Hogyan alkalmazható ez a jelenség nagyfrekvenciás terek árnyékolására?

A véges vezetőképességű közegben a hullámegyenlet tartalmazni fogja a veszteséget reprezentáló, σ vezetőképességgel felírt tagot.

$$E(x, t) = E_0 e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)}$$

Jó vezetőknek olyan közeget nevezünk, ahol a vezetési áram sok nagyságrenddel nagyobb az eltolási áramnál, ezért feltesszük, hogy: $|j\omega\epsilon| \ll \sigma$ Ezt hívjuk kvázistacionárius közelítésnek.

Hullámparaméterek

Ebben az esetben a terjedési együtthatónak valós része is lesz, így a hullámok csillapítva haladnak:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} \cong \sqrt{j\omega\mu\sigma} = \sqrt{j}\sqrt{\omega\mu\sigma} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu\sigma} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

$$\gamma = \frac{1+j}{\delta}$$

Ahol δ a behatolási mélység (szkinmélység):

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} [mm]$$

Adott két végtelen féltér, az egyikben levegő van, míg a másikat jó vezetőképességű anyag tölti ki. A vezető féltér felületére merőlegesen síkhullám esik be. A veszteség számítása során a végtelen vezető féltér formálisan úgy kezelhető, mintha a felső δ vastagságú rétegben egyenletesen oszlana el a teljes I áramerősség, a mélyebb rétegekben pedig nem folyik áram. (innen az elnevezés skin = bőr hatás).

Z_0 hullámimpedancia:

$$Z_0 = \frac{E^+}{H^+} = -\frac{E^-}{H^-} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \underset{|j\omega\epsilon| \ll \sigma}{\cong} \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \frac{1+j}{\sigma} \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

$$Z_0 = \frac{1+j}{\sigma\delta} = \frac{\gamma}{\sigma}$$

Nagyfrekvenciás terek árnyékolására:

A lényeg, itt hogy a töltéseknek nincs idejük elmozdulni a vezető belsejében olyan mértékben, ami töltésszétválasztást okozna. Minél nagyobb a frekvencia, a vezetésben részt vevő keresztmetszet annál inkább csökken. (A vezető keresztmetszet csökkenése miatt a vezeték nagyfrekvencián tanúsított ellenállása megnövekszik.)

53. Ismertesse az áramkiszorítás jelenségét, a váltakozó áramú ellenállás fogalmát és közelítő számítását hengeres vezetőre!

Váltakozó áramú ellenállás: Váltakozó áram esetén, nagy frekvencián, a töltéseknek nincs idejük rendeződni, ezért az áramsűrűség a vezető felületétől a belseje felé nézve nem egyenletesen oszlik el. A vezető felületén (bőrén $\rightarrow$ skin) nagyobb az áramsűrűség, míg befelé exponenciálisan csökken. Ha egy hasáb vastagsága a behatolási mélységhez képest kellően nagy ($d \gg 5\delta$), akkor váltakozó áramú rezisztenciája számolható egy δ vastagságú hasáb ellenállásaként.

Hengeres vezető váltakozó áramú ellenállása:

Adott egy hosszú egyenes r sugarú, l hosszúságú hengeres vezető, melyben I amplitúdójú f frekvenciájú váltakozó áram folyik. A gerjesztési törvény alapján a vezető felszínén a mágneses térerősség:

$$H_{\varphi} = \frac{I}{2r\pi}$$

Ha a behatolási mélység a sugárnál jóval kisebb: ($r \gg 5\delta$) akkor a felszínhez közel kialakuló elektromos tér lokálisan síkhullámmal közelíthető.

$$\boxed{E_z = Z_0 H_{\varphi}}$$

Ahol a kvázistacionárius közelítéssel ($\sigma \gg \varepsilon$) $Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}$

A vezető l hosszúságú szakaszának R ellenállása számítható a Poynting-vektor segítségével, a hatásos teljesítmény felhasználásával:

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \bar{E} \times \bar{H}^* = \frac{1}{2} E_z \bar{e}_z \times H_{\varphi}^* \bar{e}_{\varphi} = -\frac{1}{2} E_z H_{\varphi}^* \bar{e}_r$$

$$\bar{S}_r = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \left(\frac{I}{2r\pi} \right)^2 \bar{e}_r$$

$$\begin{aligned} P + jQ &= \oint_A \bar{S} \cdot d\bar{A} = -l \cdot 2r\pi \cdot S_r \\ &= (-l \cdot 2r\pi) \left(-\frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \left(\frac{I}{2r\pi} \right)^2 = \frac{|I|^2}{2} \frac{l}{2r\pi} \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \\ &= \frac{|I|^2}{2} \frac{l}{2r\pi} \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \frac{|I|^2}{2} \frac{l}{2r\pi} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} = \frac{|I|^2}{2} \frac{l}{\sigma 2r\pi\delta} (1+j) \end{aligned}$$

$$\boxed{P = \frac{|I|^2}{2} R = \frac{|I|^2}{2} \frac{l}{\sigma 2r\pi\delta} \quad R = \frac{l}{\sigma 2r\pi\delta}}$$

54. Ismertesse a polarizáció fogalmát síkhullámra vonatkozóan! Alkalmazható-e itt a távvezeték analógia?

Adott két síkhullám mely azonos irányba terjed. Kérdés, hogy milyen pályán mozog az eredő.

$$[1] \quad E_x(t, z=0) = E_{x0} \cos(\omega t)$$

$$[2] \quad E_y(t, z=0) = E_{y0} \cos(\omega t + \varphi)$$

Az eredő:

$$\bar{E} = E_x \bar{e}_x + E_y \bar{e}_y$$

Innen le lehet vezetni, hogy általános esetre egy ellipszis egyenletét kapjuk:

$$[1] \quad \cos(\omega t) = \frac{E_x}{E_{x0}} \quad \sin(\omega t) = \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2}$$

$$[2] \quad \frac{E_y}{E_{y0}} = \cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t)\cos(\varphi) - \sin(\omega t)\sin(\varphi)$$

A felsőt az alsóba átírva:

$$\frac{E_y}{E_{y0}} = \frac{E_x}{E_{x0}} \cos(\varphi) - \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2} \sin(\varphi)$$

$$\frac{E_y}{E_{y0}} - \frac{E_x}{E_{x0}} \cos(\varphi) = -\sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2} \sin(\varphi)$$

Négyzetre emelve a két oldalt:

$$\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 - 2 \frac{E_x}{E_{x0}} \frac{E_y}{E_{y0}} \cos(\varphi) + \left(\frac{E_x}{E_{x0}} \cos(\varphi)\right)^2 = \left(1 - \left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2\right) \sin^2(\varphi)$$

Innen az ellipszis egyenlete:

$$\frac{E_x^2}{E_{x0}^2} + \frac{E_y^2}{E_{y0}^2} - 2 \frac{E_x}{E_{x0}} \frac{E_y}{E_{y0}} \cos(\varphi) = \sin^2(\varphi)$$

Elliptikusan poláros

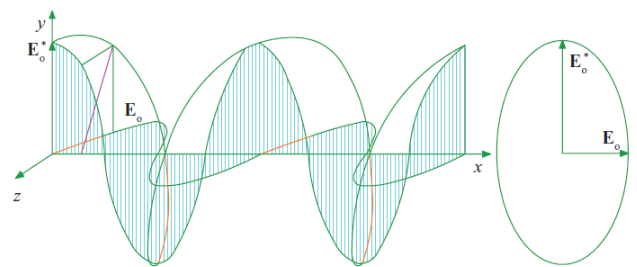
Két, egymáshoz képest fázisban eltolts, azaz azonos irányban haladó szinuszos síkhullám eredője olyan hullám, amelyben $\mathbf{E}$ forgó és hossza is változik: végpontja egy elliptikus csavarvonalat ír le.

$$E_x \perp E_y$$

$$|E_{x0}| \neq |E_{y0}|$$

$$\varphi = 90^\circ$$

$$\frac{E_x^2}{E_{x0}^2} + \frac{E_y^2}{E_{y0}^2} = 1$$



Cirkulárisan poláros

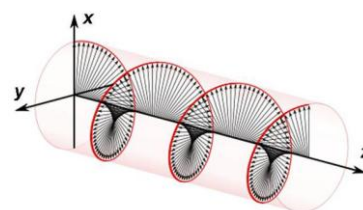
A forgó elektromos vektor a hosszát nem változtatja. Ekkor végpontja a terjedés során állandó sugarú (cirkuláris) csavarvonalat ír le.

$$E_x \perp E_y$$

$$|E_{x0}| = |E_{y0}|$$

$$\varphi = 90^\circ$$

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$$



Lineárisan poláros

$$E_x \perp E_y \quad |E_{x0}| = |E_{y0}| \quad \varphi = 0^\circ \quad \frac{E_x}{E_{x0}} + \frac{E_y}{E_{y0}} = 0$$

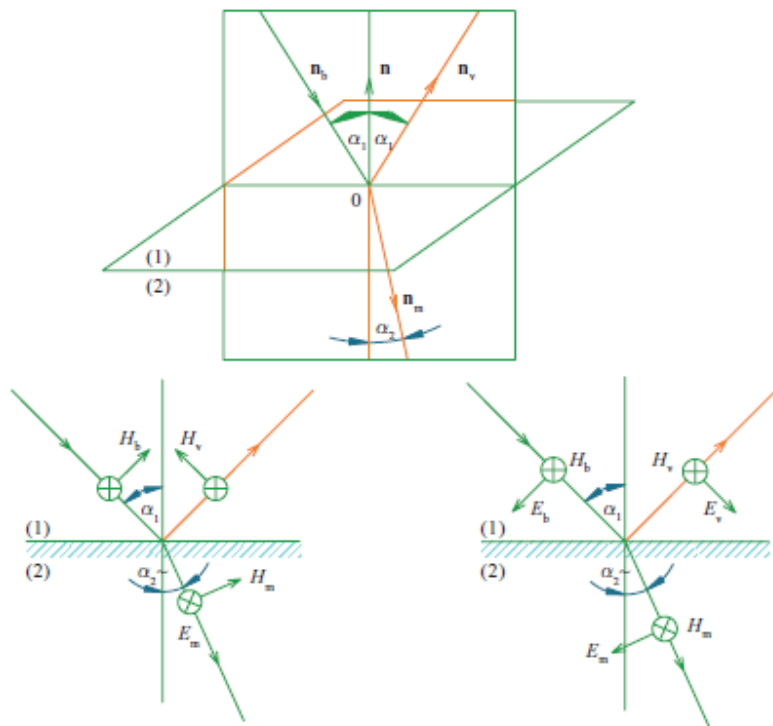
A távvezeték analógia

Addig alkalmazható, amíg a síkhullám lineárisan polarizált, és merőlegesen esik be egy közeghatárra. (részletesebben: Fodor könyv 239. oldal)

55. Ismertesse a síkhullám viselkedését anyaghatáron, különös tekintettel a merőleges beesésre. Alkalmazható-e itt a távvezeték analógia?

Ferde beesés esetén a hullám felbontható egy a határfelületre merőlegesen haladó és egy azzal párhuzamosan haladó hullámra. A folytonossági feltételek miatt, a felülettel párhuzamosan haladó komponens fázissebessége azonos a két közegben. Ennek közvetlen következménye a törési törvény:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$$



Merőleges beesés esetén a síkhullám visszaverődése és behatolása a távvezetékmodell és az impedancia alkalmazásával tárgyalható.

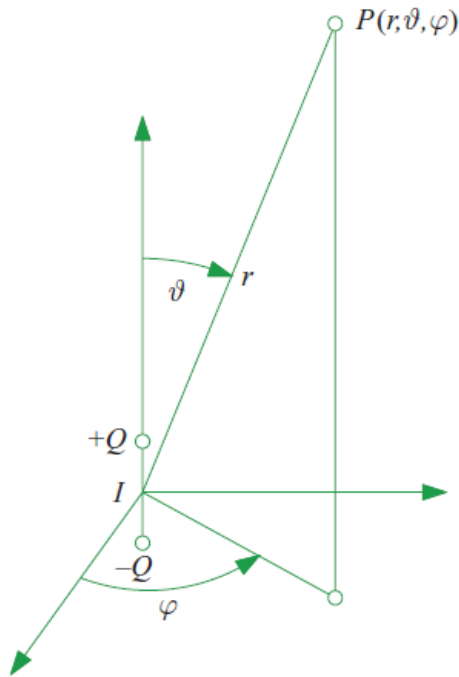
Akkor nem lesz az első közegben reflektált hullám, ha a reflexiós tényező zérus. Ennek a feltétele, hogy a bemeneti impedancia (az első közeg felől a második közeg felé) megegyezzen az első közeg hullámimpedanciájával.

Távvezeték analógia:

Ha különböző tulajdonságú térrészeket elválasztó felületek, merőlegesek a terjedés irányára, akkor $\mathbf{E}$ és $\mathbf{H}$ párhuzamosak az elválasztó síkkal, ezért a tangenciális komponensek folytonossága és a távvezetékmodell folytonossági feltételei megfeleltethetők egymásnak.

56. Ismertesse a Hertz-dipólus fogalmát valamint elektromos és mágneses tereknek fő jellemzőit! Mit jelent a közeltér és a távoltér?

A Hertz-dipólus rövid, l hosszúságú vezetékdarab, amelyen tiszta szinuszos időfüggésű áram folyik $i(t) = I \sin(\omega t)$, amelynek értéke a vezeték hossza mentén állandó. Ez akkor lehetséges, ha vezeték hossza sokkal kisebb az adott frekvenciához tartozó szabadtéri hullámhossznál ($l \ll \lambda_\omega$). Az elrendezést érdemes gömbi koordináta-rendszerben tárgyalni. Helyezzük a dipólust a koordináta-rendszer origójába úgy, hogy az antenna tengelye a ϑ elevációs szög irányába mutasson. Az elrendezés forgásszimmetrikus, azaz a φ koordinátától nem függ egyik térjellemző sem.



A tér három részre osztható aszerint, hogy az elektromos és mágneses térerősség milyen gyorsan tűnik el r növekedésével. Az $1/r^3$ és $1/r^2$ szerint eltűnő ún. sztatikus és indukciós térnek gyakorlati jelentősége nincs, mivel hatásos teljesítményt nem szállít. Ezzel szemben az $1/r$ szerint eltűnő távoltér hatásos teljesítményt szállít. A távoltérben az elektromos térerősségnek csak ϑ irányú, a mágneses térerősségnek csak φ irányú rendezője van:

$$E_\vartheta(r, \vartheta) = Z_0 \frac{I \cdot l \sin \vartheta}{2\lambda r} e^{-j\beta r}$$

$$H_\varphi(r, \vartheta) = \frac{I \cdot l \sin \vartheta}{2\lambda r} e^{-j\beta r}$$

Ahol $\beta = 2\pi / \lambda$ a fázisgyűjtő, a $\lambda = c / f$ hullámhosszt pedig a gerjesztő áram frekvenciája határozza meg. Látható, hogy E és H merőlegesek egymásra a távoltérben, és azonos fázisban vannak minden r esetén.

Hertz-dipólus jelentősége abban áll, hogy vékony vezetékből kialakított antenna kis szakasza helyettesíthető vele. Az egész antenna elektromágneses tere a dipólusok terének szuperpozíciója.

57. Ismertesse a Hertz-dipólus távolterének jellemzőit! Térjen ki a teljesítményáramlásra is!

Három legfontosabb tulajdonsága:

- Az elektromos és mágneses tér merőleges egymásra és a haladás irányára.
- A térerősségvektorok között valós hányados a hullámellenállás.
- A térerősségvektorok $1/r$ -el arányosak.

A távoltér hatásos teljesítményt szállít. A távoltérben az elektromos térerősségnek csak ϑ irányú, a mágneses térerősségnek csak φ irányú rendezője van.

$$E_\vartheta(r, \vartheta) = Z_0 \frac{I \cdot l \sin \vartheta}{2\lambda r} e^{-j\beta r}$$

$$H_\varphi(r, \vartheta) = \frac{I \cdot l \sin \vartheta}{2\lambda r} e^{-j\beta r}$$

Ahol $\beta = 2\pi / \lambda$ a fázisegyüttható, a $\lambda = c / f$ hullámhosszt pedig a gerjesztő áram frekvenciája határozza meg. Látható, hogy E és H merőlegesek egymásra a távterben, és azonos fázisban vannak minden r esetén. A Poynting-vektor kifejezése alapján az antenna távterében az energiasűrűség:

$$\bar{S}(r, \vartheta) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{I \cdot l \sin \vartheta}{2\lambda r} \right)^2 e_r = \frac{I^2}{8} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 Z_0 \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \quad (e^{-j\beta r} \cdot e^{j\beta r} = e^0 = 1)$$

Ha integráljuk a Poynting vektort a dipólust körülvevő zárt felületre, megkapjuk az antenna által elsugárzott P teljesítményt. Feltéve hogy az antenna veszteségmentes, P kifejezhető az I áramerősség és az R_s sugárzási ellenállás segítségével:

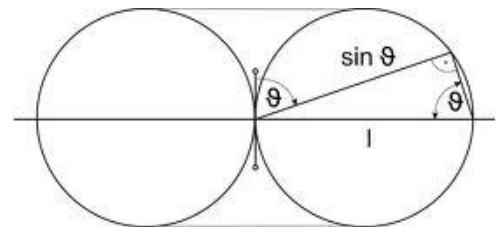
$$P = \oint_A \bar{S}(r, \vartheta) dA = \frac{1}{2} I^2 R_s \quad \leftarrow \quad R_s = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \Omega$$

58. Ismertesse az alapvető antennajellemzőket (iránykarakterisztika, sugárzási ellenállás, irányhatás, antennanyereség, hatásos felület), és adja meg ezek értékét a Hertz-dipólusra!

Iránykarakterisztika: Más néven sugárzási karakterisztika. Az olyan pontszerű (valóságban nem létező) antennát, amely minden irányban egyforma intenzitással sugároz (a köré rajzolt gömbfelület minden pontján azonos térerősséget hoz létre), izotrop antennának nevezik.

A valóságos antennák azonban anizotrop jellegűek, azaz a körük rajzolt gömbfelület különböző részein különböző térerősséget létesítenek. Az antenna sugárzási karakterisztikája mutatja meg, hogy az antenna milyen irányban mekkora intenzitással sugároz. A sugárzási karakterisztikát két egymásra merőleges (pl. vízszintes és függőleges) síkban adják meg; a karakterisztika az adott síkban egyenlő térerősségű pontokat összekötő görbe.

A hertz dipólus egy „fánk” formájában sugároz, aminek a keresztmetszete:



Sugárzási ellenállás (R_s): A teljesítményt szolgáltató generátor számára az antenna a sugárzási ellenállással megegyező ellenállásnak látszik. A generátor nem „észleli” hogy a teljesítmény nem disszipálódik, hanem a szabad térbe távozik.

$$R_s = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \Omega$$

Irányhatás (D): Az antenna erőterére jellemző mennyiség, amit a Poynting-vektor maximális és átlagos nagyságának hányadosaként definiálunk.

$$D = \frac{S_{r,\max}}{S_{r,\text{átlag}}} \frac{S_{r,\max}}{P_T / 4\pi r^2}$$

A Hertz-dipólusra:

A kisugárzott maximális teljesítmény az iránykarakterisztikából láthatóan $\vartheta = 90^\circ$ van.

Ahol ugyanis $\sin^2 \vartheta = 1$

$$S_{r,\max} = \frac{I^2}{8} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 120\pi \frac{1}{r^2} = 15\pi I^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{r^2}$$

A kisugárzott átlagos teljesítmény pedig:

$$S_{r,\text{átlag}} = \frac{P_T}{4\pi r^2} = \frac{\frac{1}{2} I^2 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2}{4\pi r^2} = 10\pi I^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{r^2}$$

$$D = 1,5$$

Antennanyereség: (G_R) Ez abban különbözik az irányhatástól, hogy nem a kisugárzott, hanem az antennába betáplált teljesítmény szerepel a hányadosba:

$$G_R = \frac{S_{r,\max}}{P_R / 4\pi r^2}$$

A betáplált teljesítmény a kisugárzott teljesítményen kívül az antenna veszteségeit is tartalmazza. Jó vezetőképeségű anyagból készült antennák esetén a nyereség és az irányhatás gyakorlatilag megegyezik.

Hatásos felület: (A_R) Definíciószerűen a vevőantennából kivehető maximális hatásos teljesítménynek és a beeső teljesítménysűrűségnek a hányadosa:

$$A_R = \frac{P_v}{S}$$

A reciprocitás tételével bizonyítható, hogy egy antenna nyeresége és hatásos felülete között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$\frac{G_R}{A_R} = \frac{4\pi}{\lambda^2}$$

59. Ismertesse az antennákra vonatkozó átviteli egyenletet, és értelmezze annak összetevőit!

Az adó-vevő teljesítmény átvitel meghatározható. Legyen az adó és a vevő távolsága r , az adó által kisugárzott teljesítmény P_T , az illesztett vevő terhelő impedanciáján fellépő teljesítmény P_R , az adó irányhatása G_T , a vevőantenna hatásos felülete A_R . Feltételezzük, hogy a vevőantenna a maximális sugárzás irányában áll és párhuzamos a távolféri villamos térrel. ekkor:

$$P_R = \underbrace{\frac{P_T}{4\pi r^2}}_{S_0} G_T A_R = P_T \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2 r^2} G_T G_R \quad \leftarrow \quad A_R = G_R \frac{\lambda^2}{4\pi}$$