ANALÍZIS(1) VIZSGADOLGOZAT I. rész 2004. jan. 5.
Műszaki Informatika szak Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (7 pont)

Írja le a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ definícióját, majd ennek alapján igazolja, hogy két nullához tartó sorozat szorzata is nullához tart!

$\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, N(\varepsilon)$: $|a_n - A| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$ 2

(T) $(a_n \to 0) \wedge (b_n \to 0) \Rightarrow a_n b_n \to 0$

(B) $\exists\, N_1(\frac{\varepsilon}{2})$ és $N_2(2)$, hogy

$|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2}$, ha $n > N_1(\frac{\varepsilon}{2}) = N_1$

$|b_n - 0| < 2$, ha $n > N_2(2) = N_2$ 1

$\Rightarrow n > \max\{N_1, N_2\}$ 1

$|a_n b_n - 0| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot 2 = \varepsilon$ 2

2. feladat (14 pont)

7 a) Írja le és bizonyítsa be a sorokra vonatkozó majoráns kritériumot!

7 b) Konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{n\ \sqrt[n]{2n+3}\ \sqrt{2n+1}}.$$

a) (T) -1 Ha $0 \le a_n \le c_n$ $\forall\, n$-re és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergens $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. 2

(B) A megfelelő részletösszegek sorozatára a feltétel miatt fennáll, hogy 1 $s_n^a \le s_n^c$ 1

Mivel $\sum\limits_{1}^{\infty} c_n$ konvergens $\Rightarrow s_n^c \le K \Rightarrow s_n^a$ is korlátos és mivel a sor + tagú, ebből 1 már következik $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ konvergenciája 2

b.) $0 \le a_n = \dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{n\ \sqrt[n]{2n+3}\ \sqrt{2n+1}} \le \dfrac{1}{n\cdot 1\cdot \sqrt{n}} = \dfrac{1}{n^{3/2}}$ 1 1 1

$\sum\limits^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konv. $(\alpha = \frac{3}{2} > 1) \Rightarrow \sum\limits^{\infty} a_n$ konv. 1 1

3. feladat (9 pont)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{3}{x}, & \text{ha } x \ne 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

2 a) Folytonos-e az f függvény az $x = 0$ pontban?

4 b) A derivált definíciója alapján döntse el, hogy differenciálható-e f a 0-ban!

3 c) $f'(x) = ?$

a.) $\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{x^2}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\sin\frac{3}{x}}_{\text{korl.}} = 0 = f(0) \Rightarrow f$ folyt. $x=0$-ban 2

b.) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2 \sin\frac{1}{h} - 0}{h} =$ 2 1

$= \lim\limits_{h\to 0} \underbrace{h}_{\downarrow\, 0}\ \underbrace{\sin\frac{1}{h}}_{\text{korl.}} = 0$ 1

c.) $f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \quad 1/2 \\ 2x\cdot\sin\frac{3}{x} + x^2\cdot\left(\cos\frac{3}{x}\right)\left(\frac{-3}{x^2}\right), & \text{ha } x \ne 0 \end{cases}$ 2 1/2

4. feladat (10 pont)

Van-e lokális szélsőértéke, illetve lokálisan növekedő-e vagy lokálisan csökkenő-e az az $y(x)$ függvény, amely egyszer differenciálható, átmegy az $x_0 = e$, $y_0 = 1$ ponton és az x_0 pont egy környezetében kielégíti az alábbi implicit egyenletet?

$$x \ln y + \ln x - \frac{x}{y} = 1 - e$$

$\underbrace{1\cdot \ln y + x\,\frac{1}{y}\cdot y'}_{2} + \frac{1}{x} - \underbrace{\frac{1\cdot y - x\cdot y'}{y^2}}_{1} = 0$ 1

$x = e,\ y = 1$: $\quad 0 + e\cdot y'(e) + \frac{1}{e} - \frac{1 - e\,y'(e)}{1} = 0$ 1

$y'(e) = \dfrac{1-\frac{1}{e}}{2e} = \dfrac{e-1}{2e^2} > 0$ 1 1

$\Rightarrow y(x)$ lokálisan nő $x = e$-ben 1

Nincs lokális szélsőérték, mert $y'(e) \ne 0$ 2

an1 v1 040105/2.

15

5. feladat (14 pont)

11 a) $\lim_{x\to 0} (\text{ch}\, 2x + \sin 3x)^{\frac{1}{x}} = ?$

4 b) $\lim_{x\to 3-0} \{x\} \text{ arctg}\left(\frac{x-4}{x-3}\right) = ?$

11 a.) $A := \lim_{x\to 0} (\text{ch}2x + \sin 3x)^{\frac{1}{x}}$ (1) $= e^{\frac{1}{x}\ln(\text{ch}2x+\sin 3x)}$ (1) (4)

$\underbrace{\text{ch}2x}_{\nearrow 1}$ (1) $\underbrace{\sin 3x}_{\nearrow 0}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\text{ch}2x+\sin 3x)}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\cdot \text{sh}2x + 3\cos 3x}{\text{ch}2x+\sin 3x}}{1}$ (2) $= \frac{3}{1} = 3$ (2)

$\frac{0}{0}$ (1)

$\Rightarrow A = e^3$ (1)

4 b.) $\lim_{x\to 3-0} \{x\} \text{ arctg } \frac{x-4}{x-3} = \frac{\pi}{2}$ (1)

$\{x\} \downarrow 1$ (1)

$\frac{x-4}{x-3} \nearrow \infty$ (1), $\frac{-1}{-0}$ alakú

$\downarrow \frac{\pi}{2}$ (1)

6. feladat (10 pont)

$$f(x) = \int_0^x e^{-\frac{(t-1)^2}{5}}\, dt\,, \qquad x > 0$$

Hol konvex, hol konkáv az f függvény?
Hol van inflexiója?

Az integrandusz folytonossága miatt f deriválható és (1)

$f'(x) = e^{-\frac{(x-1)^2}{5}}$ (2)

$f''(x) = -\frac{1}{5}\, 2(x-1)\, e^{-\frac{(x-1)^2}{5}}$ (1) $= 0$, ha $x = 1$ (1)

	$(-\infty,1)$	1	$(1,\infty)$
f''	+	0	−
f	$\smile$ (1)	infl. pont (1)	$\frown$ (1)

előjelek: (2)

8. feladat (12 pont)*

a) $\int (x+2)\, e^{2x+3}\, dx = ?$

b) $\int_{-\infty}^{-2} (x+2)\, e^{2x+3}\, dx = ?$

5 a.) $\int (x+2)\, e^{2x+3}\, dx = \frac{x+2}{2} e^{2x+3} - \frac{1}{2}\int e^{2x+3} dx =$

$u = x+2 \quad v' = e^{2x+3}$

$u' = 1 \quad v = \frac{1}{2} e^{2x+3}$

$= \frac{x+2}{2} e^{2x+3} - \frac{1}{2}\frac{e^{2x+3}}{2} + C$

$\left(\int u v' dx = uv - \int u' v\, dx\right)$

7 b.) $\int_{-\infty}^{-2} (x+2)\, e^{2x+3}\, dx = \lim_{\omega\to-\infty} \int_{\omega}^{-2} (x+2)\, e^{2x+3} dx =$ (1)

$= \lim_{\omega\to-\infty} \left(\frac{x+2}{2} e^{2x+3} - \frac{1}{4} e^{2x+3}\right)\Big|_{\omega}^{-2} =$ (1)

$= \lim_{\omega\to-\infty} \left(0 - \frac{1}{4}e^{-1} - \frac{\omega+2}{2} e^{2\omega+3} + \frac{1}{4} e^{2\omega+3}\right) = -\frac{1}{4e}$

$\frac{\omega+2}{2} e^{2\omega+3} \downarrow 0$, mert; $\frac{1}{4} e^{2\omega+3} \downarrow 0$ (1)

$\lim_{\omega\to-\infty} \frac{\omega+2}{e^{-2\omega-3}} \overset{L'H}{=} \lim_{\omega\to-\infty} \frac{1}{-2\, e^{-2\omega-3}} = 0$ (1)

$\frac{\infty}{\infty}$ (1)+(1) (1)

abd v1 040105/3

7. feladat (24 pont)*

(6) a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\,dx = ?$ (12) b) $\displaystyle\int \frac{4x^2-2x+1}{(3x^2+4)(x-3)}\,dx = ?$

(6) c) Vezesse be az $u=\sqrt{x-1}$ új változót, majd számítsa ki az alábbi integrált!

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x-1}}\,dx$$

a.) $-x^2+2x+3 = 4-(x-1)^2$ (1) (Nullahelyek: $x_1=3,\ x_2=-1$ Tehát értelmezett és nem impr. int.)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}\,dx = \frac12\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}}\,dx =$$ (1)

$$= \frac12\,\frac{\arcsin\frac{x-1}{2}}{\frac12}\Bigg|_0^1 = \arcsin 0 - \underbrace{\arcsin\left(-\tfrac12\right)}_{-\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$$ (1) (1) (1)

b.) Valódi racionális törtfüggvény

$$\frac{4x^2-2x+1}{(3x^2+4)(x-3)} = \frac{Ax+B}{3x^2+4} + \frac{C}{x-3}$$ (1)

$4x^2-2x+1 = (Ax+B)(x-3)+C(3x^2+4)$ (1)

$4x^2-2x+1 = (A+3C)x^2+(-3A+B)x+(-3B+4C)$

$A+3C=4$

$-3A+B=-2$

$-3B+4C=1$

$\Big\}\ \ldots \Rightarrow A=1$ (1), $B=1$ (1), $C=1$ (1)

$$I_b = \int\left(\frac{x+1}{3x^2+4}+\frac{1}{x-3}\right)dx = \frac16\int\underbrace{\frac{6x}{3x^2+4}}_{\frac{f'}{f}}\,dx + \frac14\int\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt3 x}{2}\right)^2}\,dx + \int\frac{1}{x-3}\,dx =$$ (1)

$$= \frac16\ln(3x^2+4) + \frac14\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{\sqrt3 x}{2}}{\frac{\sqrt3}{2}} + \ln|x-3| + C$$ (2) (2) (1) (1)

c.) $u=\sqrt{x-1} \Rightarrow x=u^2+1 \Rightarrow dx=2u\,du$ (2)

$$\int \frac{(u^2+1)^2+1}{u}\,2u\,du = 2\int(u^4+2u^2+2)\,du = 2\left(\frac{u^5}{5}+2\frac{u^3}{3}+2u\right)+C$$ (1) (1) (1)

$$I_c = 2\left(\frac15(\sqrt{x-1})^5+\frac23(\sqrt{x-1})^3+2\sqrt{x-1}\right)+C$$ (1)

Pótfeladat (csak az elégséges (indokolt! esetben a közepes) vizsgához javítjuk ki):

9. feladat (20 pont)

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x}$$

Végezzen függvényvizsgálatot és vázlatosan ábrázolja a függvényt!
Van-a lineáris aszimptotája $+\infty$-ben, illetve $-\infty$-ben?

$$f(x) = x+1-\frac2x = \frac{x^2+x-2}{x} = \frac{(x-1)(x+2)}{x}$$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (1) $\lim\limits_{x\to+0}\left(x+1-\left(\frac2x\right)\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-0}\left(x+1-\frac2x\right) = +\infty$ (1)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x+1-\frac2x\right) = \pm\infty$ (1) 4

Nullahelyek: $x=1$ ill. $x=-2$ (1)

$f'(x) = \left(x+1-\frac2x\right)' = 1+\frac{2}{x^2} = \frac{x^2+2}{x^2}$ (1)

	$(-\infty,0)$	0	$(0,\infty)$	
f'	+	∄	+	(1)
f	↗	szak. h.	↗	(2)

$f''(x) = -\frac{4}{x^3}$ (1)

	$(-\infty,0)$	0	$(0,\infty)$	
f''	+	∄	−	(2)
f	∪	szak. h.	∩	(2)

5

! Lineáris aszimptota: (4p) 4

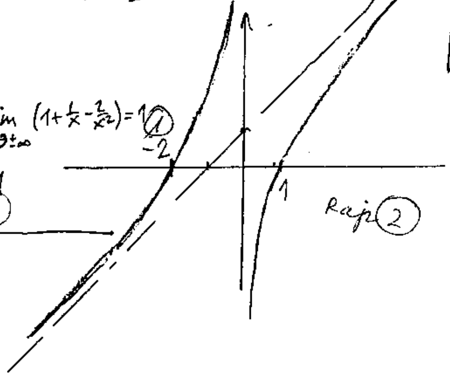
$f(x) = \underbrace{x+1}-\frac2x \Rightarrow g_a(x)=x+1$ a lineáris aszimptota,

hiszen $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-g_a(x)\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\frac2x\right) = 0$

$\boxed{\text{Vagy!}}$ $g_a(x) = Ax+B$ 1+2

$A = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-2}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac1x-\frac{2}{x^2}\right) = 1$ (1) (1)

$B = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac2x\right) = 1$ (1) (1)



$R_f = (-\infty,\infty)$ (1)