# A2 ZÁRTHELYI

2014 november 19.

| Feladat | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| max. pontszám | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 50 |
| elért pontszám | | | | | | |

| NÉV |
|---|
| NEPTUN KÓD |
| GYAK VEZ |

**1. Feladat.** Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, \quad \text{ahol} \quad a \quad \text{valós szám.}$$

**2. Feladat.** Tekintsük a következő függvénysorozatot:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{2^n}$$

Állapítsuk meg konvergenciatartományát és határfüggvényét! Egyenletesen konvergens-e a függvénysorozat a konvergenciatartományán? Ha nem, van-e olyan részhalmaza a konvergenciatartománynak, ahol egyenletesen konvergens?

**3. Feladat.** Határozzuk meg a következő hatványsor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 2^n}$$

**4. Feladat.** Határozzuk meg a következő határértéket, ha létezik.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt[4]{x^4+y^4}}$$

**5. Feladat.** Határozzuk meg az adott függvény adott $P$ pontbeli iránymenti deriváltját az adott $\mathbf{a}$ irányban. $f(x,y) = \sqrt{x+y}$, $\quad P(1,3)$, $\quad \mathbf{a} = (2,-1)$

**1. Feladat.** Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, \quad \text{ahol} \quad a \quad \text{valós szám.}$$

**1. Megoldás.** Ha $a = 0$, akkor a sor nyilvánvalóan abszolút konvergens $\boxed{\textbf{1p}}$. Ha $a \neq 0$, akkor a faktoriális miatt a hányados kritériummal érdemes próbálkozni $\boxed{\textbf{2p}}$, mert bár könnyű belátni, hogy $\sqrt[n]{n!}$ a végtelenhez tart, a nagyságrendjét csak a Stirling-formulával tudnánk becsülni.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \overset{2p}{=} \left|\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}}\right| \overset{2p}{=} \frac{|a|}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1, \quad (1p)$$

így a sor minden $a$-ra abszolút konvergens $\boxed{\textbf{2p}}$.

---

**2. Feladat.** Tekintsük a következő függvénysorozatot:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{2^n}$$

Állapítsuk meg konvergenciatartományát és határfüggvényét! Egyenletesen konvergens-e a függvénysorozat a konvergenciatartományán? Ha nem, van-e olyan részhalmaza a konvergenciatartománynak, ahol egyenletesen konvergens?

**2. Megoldás.** Mivel $f_n(2) = 1$ $\boxed{\textbf{1p}}$, és a geometriai sorozat konvergenciatulajdonságai alapján ($q^n \to 0$, ha $|q| < 1$, stb.) a függvénysorozat konvergens a $(-2, 2]$ intervallumon. A határfüggvény $\boxed{\textbf{2p}}$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -2 < x < 2, \\ 1 & \text{ha } x = 2 \end{cases}$$

Nyilván nem lehet egyenletesen konvergens, mert akkor tétel szerint a folytonos függvények határfüggvényének is folytonosnak kellene lennie $\boxed{\textbf{2p}}$.
Legyen $\varepsilon > 0$ teszőleges. Az $|\frac{x^n}{2^n}| < \varepsilon$ egyenlőtlenség megoldása $n$-re $n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|x| - \ln 2}$ $\boxed{\textbf{2p}}$. A jobb oldalon álló tört nem korlátos a $(-2, 2)$ intervallumon, így nincs olyan $n$, ami az egész konvergenciatartományon jó lenne $\boxed{\textbf{2p}}$. De tetszőleges $0 < \delta < 2$ esetén a $[-2+\delta, 2-\delta]$ intervallumon már van olyan $N$, hogy ha $n > N$,akkor $|\frac{x^n}{2^n}| < \varepsilon$, így itt a sorozat egyenletesen konvergens $\boxed{\textbf{1p}}$.

---

**3. Feladat.** Határozzuk meg a következő hatványsor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 2^n}$$

**3. Megoldás.** A konvergenciasugárra vonatkozó képlettel $\boxed{\mathbf{2p}}$:

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n^2 2^n}} = \limsup \frac{1}{2\sqrt[n]{n^2}} = \frac{1}{2}$$

Ennek reciproka 2, tehát a konvergenciasugár 2 $\boxed{\mathbf{1p}}$. A hatványsor középpontja $x_0 = 1$ $\boxed{\mathbf{1p}}$, így a hatványsor abszolút konvergens az $(1-2, 1+2) = (-1, 3)$ intervallumon $\boxed{\mathbf{2p}}$. A végpontokban:
Ha $x = 3$, akkor a sor a közismerten konvergens $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ sor $\boxed{\mathbf{2p}}$, ha $x = -1$, akkor a sor a $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}$ Leibniz-sor, tehát konvergens, és az előzőek szerint abszolút konvergens is $\boxed{\mathbf{1p}}$.
Mindenütt máshol a sor divergens $\boxed{\mathbf{1p}}$.

---

**4. Feladat.** Határozzuk meg a következő határértéket, ha létezik.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt[4]{x^4+y^4}}$$

**4. Megoldás.** Ha polár koordinátákkal vizsgálódunk az $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$ helyettesítéssel $\boxed{\mathbf{2p}}$, akkor azt kell nézni, mi történik, ha $r$ tart nullához $\boxed{\mathbf{2p}}$.

$$\frac{xy}{\sqrt[4]{x^4+y^4}} = \frac{r^2\cos\alpha\sin\alpha}{r\sqrt[4]{\cos^4\alpha+\sin^4\alpha}} = r\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sqrt[4]{\cos^4\alpha+\sin^4\alpha}} \quad (2p).$$

A tört minden $\alpha$-ra korlátos $\boxed{\mathbf{2p}}$. $r$ pedig tart nullához, tehát a függvény nullához tart $\boxed{\mathbf{2p}}$.

---

**5. Feladat.** Határozzuk meg az adott függvény adott $P$ pontbeli iránymenti deriváltját az adott $\mathbf{a}$ irányban. $f(x,y) = \sqrt{x+y}$, $\quad P(1,3)$, $\quad \mathbf{a} = (2,-1)$

**5. Megoldás.** $f'_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}$ $\boxed{\mathbf{1p}}$, $f'_y(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}$ $\boxed{\mathbf{1p}}$, és mivel ezek az adott pont környezetében léteznek és folytonosak, a függvény deriválható a pontban $\boxed{\mathbf{2p}}$.
grad $f(P) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ $\boxed{\mathbf{2p}}$, az $\mathbf{a}$ irányú egységvektor $\widehat{\mathbf{a}} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$ $\boxed{\mathbf{1p}}$, skaláris szorzatuk $\boxed{\mathbf{2p}}$ $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \cdot (\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{1}{4\sqrt{5}}$ $\boxed{\mathbf{1p}}$.

---