

Segédlet a Híradástechnika gyakorlatokhoz

Elek Kálmán, Kovács Lóránt

Tartalomjegyzék

1. Sztochasztikus folyamatok	2
1.1. Jelölések	2
1.2. Emlékeztető	2
1.3. Példa: az autokorrelációs függvény haszna	7
1.4. Példa	8
1.5. Példa	10
1.6. Példa	11
1.7. Példa	12
1.8. Példa: a sávhatárolt fehér zaj	13
1.9. Példa: exponenciálisan lecsengő autokorrelációs függvényű folyamat .	14
1.10. Példa	15
1.11. Példa	16
1.12. Példa: Visszhang hatása	17
1.13. Példa: Derivált folyamat	17
1.14. Szinuszos jel stacionárius modellje	18
1.15. Diszkrét idejű Gauss folyamat	20
2. A termikus zaj	31
2.1. A jelforrás termikus zaja	31
2.2. Zajos erősítők	32
2.3. Példa: Az antennakábel hatása	35
2.4. Példa: Az antennakábel hatása a zajhőmérsékletre	37
2.5. Példa	38
2.6. Példa	39
2.7. Példa	39
3. Lineáris moduláció	40
3.1. Példa: Stacionárius jel AM-DSB modulációja	40
3.2. Példa: A Hilbert transzformátor és a komplex burkoló	43
3.3. Példa: A kauzális Hilbert transzformátor-pár	46
3.4. Példa: AM-SSB moduláció	48
3.5. Példa: A burkoló detektor	51
3.6. Példa: A szuper-heterodin elvű vevőkészülék	53

4. Mintavételezés és kvantálás	55
4.1. Emlékeztető: Mintavételezett jelek rekonstruálása	55
4.2. Példa: szivárgás	59
4.3. Példa: átlapolódás	60
4.4. Példa: alulmintavételezés	61
4.5. Emlékeztető: az egyenletes kvantáló jel-zaj viszonya	62
4.6. Példa	65
4.7. Példa	67
4.8. Példa	68
4.9. Prediktív kódolás	69
5. Forráskódolás	75
5.1. Változó szóhosszúságú kódolás	75
5.2. Példa: A Shannon-Fano kódolás:	76
5.3. Példa: Huffman kódolás	77
5.4. Példa	80
5.5. Példa	81
5.6. Példa	82
5.7. Példa	83
5.8. Példa	84
6. Digitális adatátvitel analóg csatornán	85
6.1. Az impulzus-amplitúdó moduláció (PAM)	85
6.2. A BPSK moduláció	96
6.3. A kvadratúra moduláció	97
6.4. A QPSK moduláció	99
6.5. A QAM moduláció	100
7. A Digitális csatornamodell	102
7.1. A csatornkapacitás, avagy hogyan lehet megbízhatóan kommunikálni megbízhatatlan csatornán	102
7.2. Példa	104
7.3. Példa	105
7.4. Példa	106
8. Hibajavító kódolás	108
8.1. Lineáris szisztematikus kódok	109
8.2. Példa: Hibajavító lineáris kódoló tervezése	111
8.3. Példa	116
8.4. Példa	117
8.5. Példa	118
8.6. Példa	119

Előszó

Példatárunkkal a Híradástechnika tárgy mélyebb megértését és a vizsgákra készülést szeretnénk segíteni. A füzetben szereplő példák legtöbbje elmúlt évek vizsgáin és zárthelyiken szerepelt. Minden fejezet elején közlünk egy rövidebb-hosszabb bevezetést, ahol a példamegoldás szempontjából nélkülözhetetlen ismereteket kívánjuk fölfrissíteni. Néhány esetben hoztunk olyan érdekességeket, melyek idő hiányában az előadásból általában ki szoktak maradni, vagy éppen a házfeladat megoldását segítik.

Az első három fejezet a híradástechnikában nélkülözhetetlen alapismeretekkel foglalkozik, (sztochasztikus folyamatok, zaj és analóg moduláció), a hátralevő szakaszok a digitális adatátvitel alapelemeinek megértését szolgálják. Hogyan lehet folytonos források jeleit a lehető legtömörebben számsorozatokká alakítani, (mintavételezés, kvantálás, forráskódolás) és ezeket (a valóságban adott analóg) csatornán átvinni (digitális modulációk, digitális csatornamodell). Végül az átvitel biztonságát növelő hibajavító kódolással foglalkozunk.

Kérjük kdeves olvasóinkat, hogy ha hibákat vesznek észre, írják meg nekünk (`{elek, kovacsl}@hit.bme.hu`).

A szerzők

1. fejezet

Sztochasztikus folyamatok

A Híradástechnikában előforduló adatfolyamokat nem jellemezhetjük determinisztikus jelekkel, hiszen információ-tartalmuk éppen véletlenszerűségükben rejlik. (Ha előre tudnánk egy hír következő szavát, fölösleges lenne bárkinek is elküldeni.) A kép, hang vagy adatfolyamok sztochasztikus folyamattal modellezhetőek, ami azt jelenti, hogy a jelek leírása és a jelfeldolgozás tervezése csak statisztikai szinten történik, a konkrét realizációknak nincs különösebb jelentősége. A híradástechnikával foglalkozónak tehát mindenképpen tájékozottnak kell lenni a sztochasztikus folyamatok világában.

1.1. Jelölések

$E[.]$	várható érték operátor
$m_{\xi}(t_0) = E[\xi(t_0)]$	a ξ folyamat t_0 pillanatban vett várható értéke
$R_{\xi}(t_1, t_2)$	a ξ folyamat autokorrelációs függvénye általános esetben
$R_{\xi}(\tau)$	a ξ folyamat autokorrelációs függvénye stacionér folyamat esetén
$s_{\xi}(f)$	a ξ folyamat spektrális sűrűségfüggvénye

1.2. Emlékeztető

1.2.1. Matematikai bevezetés

Két valószínűségi változó (ξ_1 és ξ_2) szorzatának várható értéke az $f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)$ u.n. együttes sűrűségfüggvény ismeretében számítható ki:

$$E[\xi_1 \xi_2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{1,2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (1.1)$$

Ha a két valószínűségi változó *független*, akkor az együttes eloszlás a peremeloszlások szorzata:

$$f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = f_{\xi_1}(x_1) f_{\xi_2}(x_2) \quad (1.2)$$

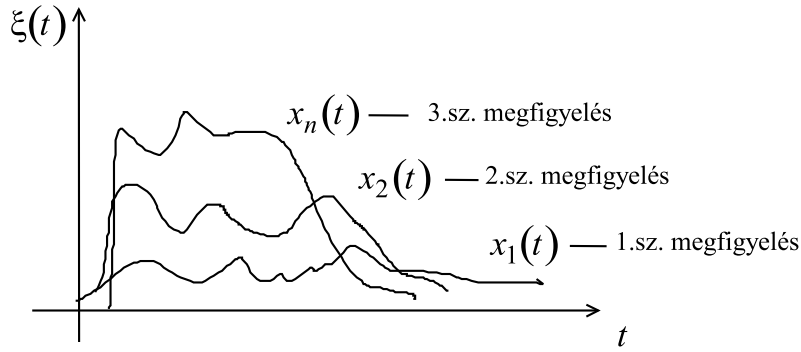
és így

$$\begin{aligned}
 E[\xi_1 \xi_2] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2 = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_2(x_2) dx_2 = \\
 &= E[\xi_1] E[\xi_2]
 \end{aligned}$$

1.2.2. A sztochasztikus folyamat definíciója

Intuitív definíció: Időtől függő véletlen jelek (pl. beszéd jel, adat, video ... stb.)

1. Definíció: A $\xi(t)$ sztochasztikus folyamat olyan valószínűségi változó amelynek



elemei eseményi függvények.

Nem konstruktív definíció, hiszen függvényeken nem tudunk mértéket definiálni (melyik függvény nagyobb egy másiknál?), így a valószínűségszámítás mértékelméletét nem tudnánk használni. Ehelyett a következő definíciót használjuk:

2. Definíció: A $\xi(t)$ sztochasztikus folyamat valószínűségi változók összessége $\{\xi_t : a \leq t \leq b\}$.

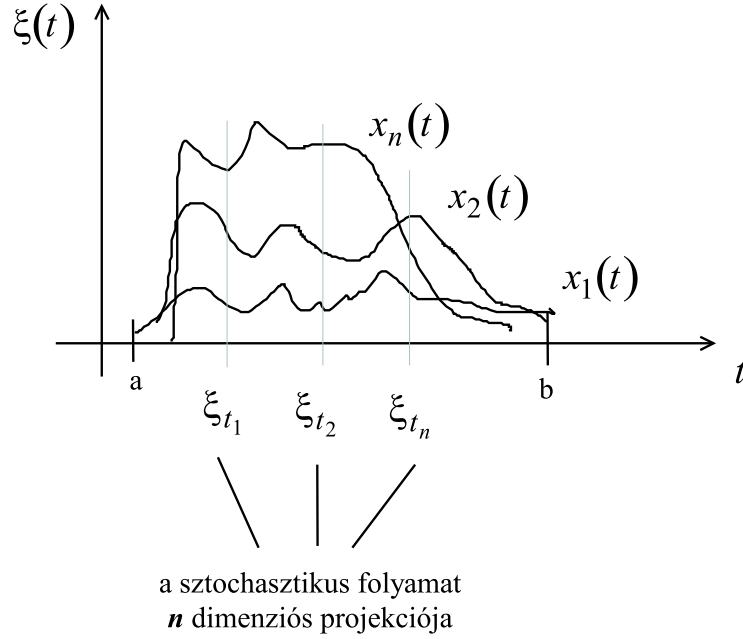
Ha tetszőleges N számú időpontot kiválasztunk, s az azokban az időpillanatokban megfigyelhető valószínűségi változókat egy vektorba rendezzük, akkor ezt a valószínűségi vektorváltozót az adott sztochasztikus folyamat *véges dimenziós projekciójának* nevezzük, melynek természetesen létezik N dimenziós együttes eloszlásfüggvénye, amely a legmélyebb statisztikai ismeret az adott vektorváltozóról:

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) = P(\xi_{t_1} < x_1, \xi_{t_2} < x_2, \dots, \xi_{t_N} < x_N)$$

A véges dimenziós projekció sűrűségfüggvénye pedig:

$$f_{t_1, t_2, \dots, t_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{\partial^N F_{t_1, t_2, \dots, t_N}(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_N}$$

Állítás: ha ismerjük a véges dimenziós eloszlásokat $\forall N$ -re és $\forall t_1, t_2 \dots t_N$ -re, akkor a sztochasztikus folyamatot statisztikailag tökéletesen jellemezni tudjuk. Sajnos ehhez is végtelen tudásmennyiség szükséges, ezért ez a jellemzés a gyakorlatban nem használható. A műszakilag tartalmas kérdések:



- Várhatóérték-idő függvény:

$$m_{\xi}(t) = E[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx \quad (1.3)$$

- Korrelációs függvény:

$$R_{\xi}(t, u) = E[\xi(t) \xi(u)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{\xi_t \xi_u}(x, y) dx dy \quad (1.4)$$

1.2.3. Stacionaritás

Verbálisan megfogalmazva a stacionaritás a statisztikai jellemzők időbeli invarianciáját jelenti. Attól függően, hogy milyen mélységű statisztikai jellemzők időinvarianciáját követeljük meg, beszélünk erős illetve gyenge stacionaritásról.

Erős stacionaritás

Bármely tetszőleges véges dimenziós projekció együttes eloszlása időinvariáns, azaz

$$F_{t_1 t_2 \dots t_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) = F_{t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_N + \tau}(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad \forall N \quad (1.5)$$

azaz

$$P(\xi_{t_1} < x_1, \xi_{t_2} < x_2, \dots, \xi_{t_N} < x_N) = P(\xi_{t_1 + \tau} < x_1, \xi_{t_2 + \tau} < x_2, \dots, \xi_{t_N + \tau} < x_N)$$

és ennek következményeként a sűrűségfüggvényekre is fenáll az időinvariancia:

$$f_{t_1, t_2, \dots, t_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) = f_{t_1+\tau, t_2+\tau, \dots, t_N+\tau}(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

Gyenge stacionaritás

A gyenge stacionaritás esetében csak az első és másodrendű statisztikai jellemzők időinvarianciáját követeljük meg:

1.

$$m_\xi(t) = m_\xi(t+T) \Rightarrow E[\xi(t)] = E[\xi(t+T)] \quad \forall T$$

azaz a várhatóérték függvény időtől függetlenül állandó.

2.

$$R_\xi(t, u) = R_\xi(t+T, u+T) \quad \forall T$$

Következmény: ha $T = -u$ választással élünk, látszik, hogy

$$R_\xi(t, u) = R_\xi\left(\underbrace{t-u}_{\tau}, 0\right) = R_\xi(\tau)$$

vagyis a korrelációs függvény csakis a $t - u$ időpontok közötti különbségtől függ, azaz az időnek csak egyváltozós függvénye.

1.2.4. Ergodicitás

Az ergodicitás azt jelenti, hogy az időbeli átlag megegyezik a sokaságátlaggal. (Időbeli átlagon az egyetlen megfigyelt realizáció időbeli átlagolását, míg sokaságátlagon az adott időpillanatban a realizációk sokaságából készített átlagot értjük.) Formulálással a következő képpen fejezhetjük ezt ki. Először egy példa:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = E[\xi(t)]$$

Általában bármilyen $g(\cdot)$ (Borel mérhető) függvényre fenn kell álljon:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(x(t)) dt = E[g(\xi)]$$

Fontos következmény: a folyamat átlagteljesítménye megismerhető egyetlen realizáció megfigyeléséből is:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = E[\xi^2(t)].$$

1.2.5. Az autokorrelációs függvény és a spektrális sűrűségfüggvény

A stacionárius folyamatok autokorrelációs függvényének Fourier transzformáltját - ha létezik - a folyamat spektrális sűrűségfüggvényének nevezzük.

$$s_\xi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (1.6)$$

$$R_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_\xi(f) e^{+j2\pi f\tau} df \quad (1.7)$$

Az $s_\xi(f)$ függvény valós folyamatoknál nemnegatív, páros függvény. Ha a ξ jelet, amelynek spektrális sűrűségfüggvénye $s_\xi(f)$, szűrjük egy $H(f)$ átviteli függvényű szűrővel, akkor a szűrő η kimenő jelének $s_\eta(f)$ spektrális sűrűségfüggvénye

$$s_\eta(f) = |H(f)|^2 \cdot s_\xi(f). \quad (1.8)$$

Igaz továbbá, hogy a spektrális sűrűségfüggvény integrálja a jel átlagteljesítményét szolgáltatja:

$$E[\xi_t^2] = R_\xi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_\xi(f) df \quad (1.9)$$

A spektrális sűrűségfüggvényre azért igazak ezek az állítások, mert az autokorrelációs függvény Fourier transzformáltjaként definiáltuk. Ugyanakkor e tulajdonságok lehetővé teszik, hogy a spektrális sűrűségfüggvénynek szemléletes fizikai jelentést tulajdonítsunk, s ez a kép gyakran segíti egyes jelenségek, összefüggések megértését.

Tételezzük fel ugyanis, hogy a ξ jelet egy keskeny, Δ sáv szélességű, amúgy "ideális" sávszűrővel szűrjük. Pontosabban, a szűrő átviteli függvénye:

$$H(f) = \begin{cases} 1, & \text{ha } f \in [f_0, f_0 + \Delta] \\ 1, & \text{ha } f \in [-f_0, -(f_0 + \Delta)] \\ 0, & \text{egyebkent} \end{cases} \quad (1.10)$$

Érdekes kérdés, mit mondhatunk ekkor a szűrő kimenő jelének átlagteljesítményéről. A szűrőn nyilván csak a jel azon szinuszos-koszinuszos összetevői jutnak át, amelyek frekvenciája a szűrő áteresztő sávjába (f_0 és $f_0 + \Delta$ közé) esik. A kérdés tehát egyrészt ezen jelösszetevők összteljesítménye. Másrészt viszont az η kimenő jel teljesítménye:

$$E[\eta_t^2] = R_\eta(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_\eta(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} s_\xi(f) |H(f)|^2 df \quad (1.11)$$

Kihasználhatjuk, hogy az integrandus mindkét tényezője páros függvény, továbbá, hogy egyikük az integrálás tartományának jelentős részhalmazain zérus. Így:

$$E[\eta_t^2] = 2 \int_{f_0}^{f_0+\Delta} s_\xi(f) |H(f)|^2 df = 2 \int_{f_0}^{f_0+\Delta} s_\xi(f) df. \quad (1.12)$$

Ha Δ elegendően kicsiny, és $s_\xi(f)$ folytonos, akkor az integrálás középvértéktételei szerint

$$\mathbb{E}[\eta_t^2] = 2 \int_{f_0}^{f_0+\Delta} s_\xi(f) df \approx 2s_\xi(f_0) \Delta \quad (1.13)$$

Tehát megalapozott az a szemléletes kép, miszerint a spektrális sűrűségfüggvény értéke az f_0 frekvencián az f_0 frekvencia egységnyi széles környezetében lévő szinuszos (és koszinuszos) jelösszetevők átlagteljesítményét adja meg.

$$s_\xi(f_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[\eta_t^2]}{\Delta} \quad (1.14)$$

(A 2-es faktor a pozitív ill. a negatív frekvenciákra eső (valós jelek esetén egyforma) jelkomponensekből adódik.)

1.3. Példa: az autokorrelációs függvény haszna

Tekintsük az ún. előrejelzési feladatot: megfigyeljük a ξ jel értékét a t_1 időpillanatban, és a megfigyelt érték, ξ_{t_1} alapján becsülni kívánjuk a jel értékét a t_2 időpillanatban. Ha a legegyszerűbb felépítésű (lineáris) becslésre szorítkozunk, és a becslés hibáját az ún. négyzetes középhibával értékeljük, akkor (amint látni fogjuk) a legjobb becslési szabályt éppen a jel autokorrelációs függvényének ismeretében alkothatjuk meg.

Példánkban egyetlen megfigyelt értékből akarunk becsülni, így a becslést a

$$\hat{\xi}_{t_2} = a\xi_{t_1} \quad (1.15)$$

jelenti, valamilyen a érték mellett. (Ha több megfigyelésből akarnánk becslést készíteni egy jövőbeli értékre, akkor a lineáris becslés a múltbeli minták lineárkombinációját jelentené.) A becslés négyzetes középhibája alatt az

$$e = \mathbb{E} \left[\left(\hat{\xi}_{t_2} - \xi_{t_2} \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[(a\xi_{t_1} - \xi_{t_2})^2 \right] \quad (1.16)$$

nemnegatív számot értjük, amely természetesen függvénye a -nak, hiszen

$$e(a) = \mathbb{E}[\xi_{t_2}^2] - 2a\mathbb{E}[\xi_{t_1}\xi_{t_2}] + a^2\mathbb{E}[\xi_{t_1}^2] \quad (1.17)$$

A (négyzetes középben) legjobb lineáris becslés paramétere az az a_0 érték, amelyre e minimális, ez az érték (deriválva és 0-val egyenlővé téve e kifejezését,)

$$a_0 = \frac{\mathbb{E}[\xi_{t_1}\xi_{t_2}]}{\mathbb{E}[\xi_{t_1}^2]} = \frac{R_\xi(t_1, t_2)}{R_\xi(t_1, t_1)} \quad (1.18)$$

Megállapítható, hogy a legjobb becslés paraméterét a jel autokorrelációs függvénye csakúgy meghatározza, csakúgy, mint a legjobb becslés négyzetes középhibáját, hiszen

$$e(a_0) = R_\xi(t_1, t_2) \left[1 - \frac{R_\xi^2(t_1, t_2)}{R_\xi(t_1, t_1)R_\xi(t_2, t_2)} \right]$$

Fontos tanulságok:

- Az előrejelzési feladat igényes megoldásához *szükséges* ismeret a folyamat autokorrelációs függvénye. Ez az ismeret ugyanakkor elegendő is *lehet* az efféle feladatok megoldásához.
- Tekintve, hogy a négyzetes középhiba semmiképpen sem lehet negatív, e_0 sem lehet negatív. Ezért bizonyosan igaz, hogy

$$R^2(t_1, t_2) \leq R(t_1, t_1) \cdot R(t_2, t_2), \quad (1.19)$$

ami persze nem más, mint a Cauchy-Schwartz-Bunyakovszki féle egyenlőtlenség körülményeinkre szabott változata.

- Ha a folyamat (legalább gyengén) stacionárius, akkor
 - $m_\xi = E[\xi_{t_1}] = E[\xi_{t_2}] = \text{const}$ (nem függ az időtől)
 - $R_\xi(t_2 - t_1) = R_\xi(\tau) = R_\xi(t_1, t_2)$ (csak a $\tau = t_2 - t_1$ időkülönbségtől függ)

Ebben az esetben az optimális predikciós együttható formulája (1.18) egyszerűsödik:

$$a_0(\tau) = \frac{R_\xi(\tau)}{R_\xi(0)}$$

$$e_0(\tau) = R_\xi(0) \left[1 - \frac{R_\xi^2(\tau)}{R_\xi^2(0)} \right]$$

valamint

$$R_\xi^2(\tau) \leq R_\xi^2(0) \quad (1.20)$$

- Ha a becslés jóságát nem a négyzetes középhibával mérnők, a legjobb becslés megalkotásához nem lenne elegendő a jel autokorrelációs függvényének ismerete. Sőt, ilyen kevés ismeret birtokában még a hiba mértékének kiszámítására sem igen nyílik lehetőség. Gyakran hasznos, értelmes hibakritérium lehetne pl. az ún. abszolút középhiba,

$$E[|x_{t_2} - m|], \quad (1.21)$$

amelynek meghatározása általában az autokorrelációs függvélynél mélyebb ismereteket igényel.

1.4. Példa

Döntse el, hogy a $\xi(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ folyamat (ahol A és B független normális valószínűségi változók, nulla várható értékkel és egységnyi szórással) erősen vagy gyengén stacionárius-e? Határozza meg a folyamat autokorrelációs függvényét. Ergodikus-e a folyamat?

MEGOLDÁS

A stacionaritás mindig valamilyen statisztikai jellemző időinvarianciáját jelenti. A gyenge stacionaritás teljesüléséhez az első és másodrendű statisztikák időinvarianciáját követeljük meg: (l. emlékeztető)

1. A folyamat várhatóérték-idő függvénye legyen állandó, azaz $E[\xi(t)] = \text{konstans}$. Ez esetünkben teljesül is, hiszen

$$E[A \cos \omega t + B \sin \omega t] = \cos \omega t E[A] + \sin \omega t E[B] = 0$$

A számolásban kihasználtuk, hogy a várható érték képzési művelet lineáris operátor, így tagonként elvégezhető, illetve a konstans kiemelhető. (Vigyázat, a konstans itt azt jelenti, hogy a várható érték képzés szempontjából konstans, azaz NEM valószínűségi változó!)

2. Az autokorrelációs függvény csak az argumentumában szereplő két időváltozó különbségétől függ (azaz egyváltozós függvény), formálisan: $R_\xi(t_1, t_2) = R_\xi(t_2 - t_1)$. Lássuk teljesül-e most?

$$\begin{aligned} R_\xi(t_1, t_2) &= E[\xi(t_1)\xi(t_2)] = \\ &= E[(A \cos \omega t_1 + B \sin \omega t_1)(A \cos \omega t_2 + B \sin \omega t_2)] = \\ &= E[A^2 \cos \omega t_1 \cos \omega t_2 + B^2 \sin \omega t_1 \sin \omega t_2 + \\ &+ [AB \cos \omega t_1 \sin \omega t_2 + AB \cos \omega t_2 \sin \omega t_1]] = \\ &= E[A^2] \cos \omega t_1 \cos \omega t_2 + E[B^2] \sin \omega t_1 \sin \omega t_2 + \\ &+ E[AB] \cos \omega t_1 \sin \omega t_2 + E[AB] \cos \omega t_2 \sin \omega t_1 \end{aligned}$$

Mivel A és B függetlenek valamint nulla várhatóértékűek, ezért $E[AB] = E[A]E[B] = 0$, így

$$\begin{aligned} R_\xi(t_1, t_2) &= E[A^2] \cos \omega t_1 \cos \omega t_2 + E[B^2] \sin \omega t_1 \sin \omega t_2 = \\ &= \cos \omega(t_1 - t_2) \end{aligned}$$

(az utolsó lépésben a $\cos(\alpha - \beta)$ -ra vonatkozó trigonometrikus összefüggést használtuk fel). Tehát a második feltétel is teljesült.

Ezek alapján a folyamat *gyengén stacionárius*.

Az erős stacionaritáshoz, bármilyen N dimenziós projekció eloszlásának (vagy sűrűségfüggvényének) invariánsnak kell lennie az időbeli eltolásra. Az N dimenziós projekció nem más, mint a folyamat $t_1, t_2, \dots, t_N$ időpontbeli megfigyeléseiből, mint valószínűségi változókból képzett vektor: (bővebben l. emlékeztető)

$$[\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_N)] = [(A \cos \omega t_1 + B \sin \omega t_1), \dots, (A \cos \omega t_N + B \sin \omega t_N)]$$

Mivel A és B normális eloszlásúak, a $\cos \omega t_i$ típusú tagok pedig determinisztikusak, azaz a "statisztika szemszögéből" konstansok, így a valószínűségi vektorváltozónk

minden komponense normális eloszlású, együttes eloszlásuk tehát szintén normális lesz. Általánosan egy N dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}(\det \mathbf{K})^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})} \quad (1.22)$$

ahol $\mathbf{K}$ a kovariancia mátrix és $\mathbf{m}$ a várhatóérték vektor, amely egyértelműen meghatározza a sűrűségfüggvényt és rajta keresztül az eloszlást. Jelen esetben $m_\xi(t_i) = 0$ és

$$K_{ij} = \mathbb{E}[\xi(t_i)\xi(t_j)] = R_\xi(t_i, t_j) = \cos \omega(t_i - t_j)$$

Ebből látszik, hogy mivel $\mathbf{K}$ és $\mathbf{m}$ időinvariáns, így a folyamat bármilyen N dimenziós projekciójának sűrűségfüggvénye (illetve eloszlása) is időeltolásra invariáns lesz. Azaz, a folyamat *erősen stacionárius* is.

Az ergodicitás vizsgálatához, meg kell nézni, hogy az időbeli átlagok megegyeznek-e a statisztikai átlagokkal. Az alapdefiníció szerint bármilyen korlátos, folytonos $g(\cdot)$ függvényre fenn kell állnia, hogy

$$\langle g(x(t)) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(x(t)) dt = \mathbb{E}[g(\xi(t))] \quad (1.23)$$

ahol $x(t)$ a $\xi(t)$ folyamat egy realizációja. Vizsgáljuk a másodrendű átlagokat! A statisztikai átlag, ahogy levezettük $R_\xi(\tau) = \cos \omega \tau$. Az időátlag vizsgálatához vegyük az A és B valószínűségi változók egy realizációját amit a és b jelöl. Ekkor a másodrendű időátlag $\langle (a \cos \omega t + b \sin \omega t)(a \cos \omega(t+\tau) + b \sin \omega(t+\tau)) \rangle$ nem szabad, hogy függjön a és b konkrét értékétől. Könnyen találhatunk azonban olyan példát ($\tau = 0$ választással), amikor ez a kifejezés függ a és b konkrét értékétől, hiszen ekkor

$$\langle (a \cos \omega t + b \sin \omega t)(a \cos \omega(t+\tau) + b \sin \omega(t+\tau)) \rangle = \langle a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t \rangle = 0.5 \langle a^2 + b^2 \rangle$$

Ebből az következik, hogy a folyamat nem ergodikus.

Megjegyzés: sztochasztikus folyamatok $\supset$ gyengén stacionér folyamatok $\supset$ erősen stacionér folyamatok $\supset$ ergodikus folyamatok.

1.5. Példa

Ha $\xi(t)$ és $\eta(t)$ folyamatok függetlenek, gyengén stacionáriusak, valamint zérus várhatóértékűek, akkor ugyanez elmondható-e a $\theta(t) = \xi(t) + \eta(t)$, illetve a $\nu(t) = \xi(t)\eta(t)$ folyamatokról?

MEGOLDÁS

A $\theta(t)$ gyengén stacionér, hiszen teljesül rá a gyenge stacionaritás két feltétele (1. emlékeztető), ugyanis:

$$\mathbb{E}[\theta(t)] = \mathbb{E}[\xi(t) + \eta(t)] = m_\xi + m_\eta = 0$$

és

$$\begin{aligned}
 R_\theta(t, u) &= E[\theta(t)\theta(u)] = \\
 &= E[(\xi(t) + \eta(t))(\xi(u) + \eta(u))] = \\
 &= E[\xi(t)\xi(u)] + E[\eta(t)\eta(u)] + E[\xi(t)\eta(u)] + E[\xi(u)\eta(t)] = \\
 &= R_\xi(t - u) + R_\eta(t - u) + E[\xi(t)\eta(u)] + E[\xi(u)\eta(t)] = \\
 &= R_\xi(t - u) + R_\eta(t - u)
 \end{aligned}$$

Az utolsó előtti lépésben egyszerűen alkalmaztuk a folyamatok autokorrelációs függvényeire vonatkozó definíciót, az utolsó lépésben pedig a függetlenségből következően hagytuk el a megfelelő tagokat. Azaz a folyamat gyengén stacionér.

A $\nu(t)$ folyamatra vonatkozó számítások hasonlóak:

$$E[\nu(t)] = E[\xi(t)\eta(t)] = m_\xi m_\eta = 0$$

a függetlenség miatt, és

$$\begin{aligned}
 R_\nu(t, u) &= E[\nu(t)\nu(u)] = \\
 &= E[\xi(t)\eta(t)\xi(u)\eta(u)] = \\
 &= E[\xi(t)\xi(u)] E[\eta(t)\eta(u)] \\
 &= R_\xi(t - u) R_\eta(t - u)
 \end{aligned}$$

Az utolsó előtti lépésben azt használtuk ki, hogy ξ és η függetlenek, ezért a várhatóérték képzés tagonként elvégezhető. Amint látszik itt is teljesül a gyenge stacionaritás mindkét feltétele.

1.6. Példa

Tekintsünk egy $x(t)$ gyengén stacionér folyamatot, melynek ismert a várható értéke (m_x) és az autokorrelációs függvénye (R_x). Moduláljunk ezzel a folyamattal amplitúdóban egy véletlen fázisú koszinuszos vívót. Jelölje ezt

$$y(t) = x(t) \cos(2\pi ft + \varphi)$$

ahol φ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0, 2\pi]$ tartományon. Továbbá feltételezzük, hogy φ és $x(t)$ függetlenek.

- Határozza meg az $y(t)$ folyamat várható értékét!
- Határozza meg az $y(t)$ autokorrelációs függvényét!
- Számítsa ki $x(t)$ és $y(t)$ keresztkorrelációs függvényét a következő definíció segítségével:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E[x(t_1)y(t_2)].$$

- Vajon gyengén stacionárius-e az $y(t)$ folyamat is?

MEGOLDÁS

a) A függetlenség feltételének kihasználásával:

$$m_y = m_x E[\cos(2\pi ft + \varphi)] = m_x \cdot 0 = 0$$

b) A számolás során kihasználjuk, hogy független valószínűségi várhatók szorzatának várhatóértéke egyenlő a várhatóértékek szorzatával, valamint azt, hogy gyengén stacionér folyamatok autokorrelációs függvénye egyváltozós.

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= E[x(t_1) \cos(2\pi ft_1 + \varphi) x(t_2) \cos(2\pi ft_2 + \varphi)] = \\ &= R_x(t_2 - t_1) E[\cos(2\pi ft_1 + \varphi) \cos(2\pi ft_2 + \varphi)] = \\ &= R_x(t_2 - t_1) \frac{1}{2} E[\cos(2\pi f(t_1 - t_2) + \cos(2\pi f(t_1 + t_2) + 2\varphi)] = \\ &= R_x(t_2 - t_1) \cos 2\pi f(t_1 - t_2) \end{aligned}$$

hiszen a véletlen fázisú (második) koszinuszos tag sokaságátlagára nulla, az első tag pedig a várhatóérték művelet szempontjából konstansnak tekinthető.

c)

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2) \cos(2\pi ft_2 + \varphi)] = R_x(t_2 - t_1) E[\cos 2\pi ft_2 + \varphi] = 0$$

hiszen konkrét f és t_2 esetén a véletlen fázisú koszinusz várhatóértéke éppen zérus.

d) Mivel $m_y = 0$ tehát konstans, és R_y csak a $t_2 - t_1$ időkülönbségtől függ, ezért $y(t)$ is gyengén stacionárius.

1.7. Példa

Vizsgáljuk a következő sztochasztikus folyamatot: $\xi(t) = Ae^{-t}$, ahol A normális valószínűségi változó 0 várható értékkel és egységnyi szórással.

a) Számítsa ki a folyamat várható érték-idő függvényét!

b) Határozza meg a $t_1 = 1s$ és $t_2 = 3s$ időpillanatokban megfigyelhető minták közötti korrelációt.

c) Milyen értelemben stacionér a folyamat?

MEGOLDÁS

a)

$$E[\xi(t)] = E[A] e^{-t} = 0$$

ugyanis, mint korábban már hangsúlyoztuk, a várható érték operátor lineáris operátor, így a konstans (itt értsd: determinisztikus) tag kiemelhető.

b) A feladat az autokorrelációs függvény egy konkrét értékére ($R_\xi(t_1, t_2)$) kérdez rá. Így legkézenfekvőbb, ha kiszámoljuk magát az autokorrelációs függvényt, s utána behelyettesítjük a konkrét értékeket.

$$R_\xi(t, u) = E[\xi(t)\xi(u)] = E[Ae^{-t}Ae^{-u}] = E[A^2] e^{-t-u} = e^{-t-u}$$

A $t = t_1 = 1s$ és $u = t_2 = 3s$ választással élve a keresett korrelációs érték: $R_\xi(t_1, t_2) = e^{-4} = 0.0183$.

c) A várhatóérték-idő függvény ugyan konstans, de az autokorrelációs függvény függ a konkrét t_1, t_2 időértékektől, így tehát a folyamat még gyengén sem lehet stacionér.

1.8. Példa: a sávhatárolt fehér zaj

Egy ξ jel spektrális sűrűségfüggvénye

$$s_x(f) = \begin{cases} s_0, & \text{ha } |f| \leq B \\ 0, & \text{egyebkent} \end{cases} \quad (1.24)$$

Az ilyen jel *sávhatárolt* (hiszen B -nél nagyobb frekvenciájú összetevői nincsenek), és *fehér* (a nemzérus intenzitású jelösszetevők azonos erősségűek, s a fehér fény összetevői is ilyenek). Határozzuk meg a jel autokorrelációs függvényét!

MEGOLDÁS

Az autokorrelációs függvény a spektrális sűrűségfüggvény inverz Fourier transzformáltja:

$$R_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_\xi(f) e^{j2\pi f\tau} df \quad (1.25)$$

Most

$$R_\xi(\tau) = \int_{-B}^B s_0 e^{j2\pi f\tau} df = s_0 \left[\frac{e^{j2\pi f\tau}}{j2\pi\tau} \right]_{-B}^{+B} = s_0 \frac{e^{j2\pi B\tau} - e^{-j2\pi B\tau}}{j2\pi\tau} \quad (1.26)$$

Felismerve a szinuszfüggvény Euler-féle alakját, írhatjuk, hogy

$$R_\xi(\tau) = 2Bs_0 \frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau} \quad (1.27)$$

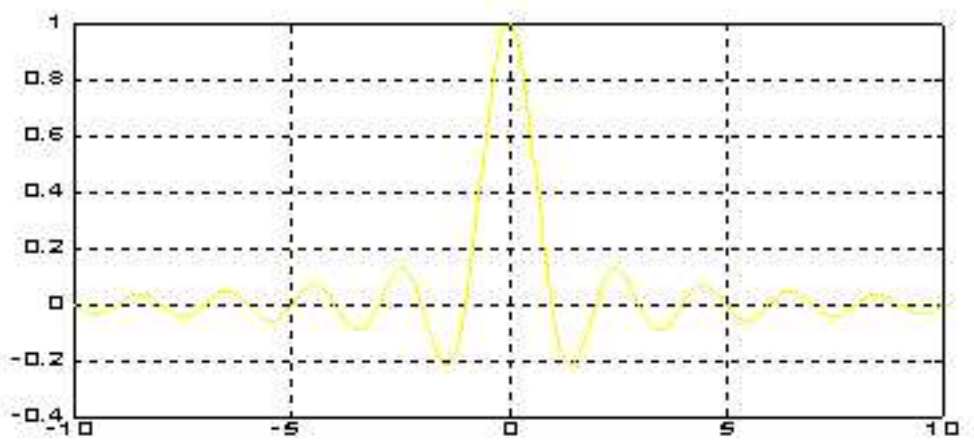
$$E[\xi^2] = R_\xi(0) = 2Bs_0 \quad (1.28)$$

Ezzel:

$$R_\xi(\tau) = R_\xi(0) \frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau} \quad (1.29)$$

Ez a függvény számos híradástechnikai modellben felbukkan. Lényeges tulajdonságai:

1. Argumentumának növekedő (abszolút) értékeire annak reciprokával majorálhatóan tűnik el (tart a zérushoz). Ez azt jelenti, hogy a jel távoli mintái között is van számottevő kapcsolat.
2. Zérus értéket vesz fel, valahányszor $t = k/(2B)$, ahol k egész, de nem zérus.
3. A függvény globális maximuma $t = 0$ -ban van.
4. Szépen látható, hogy páros függvény, de nem mindenütt pozitív függvény (viszont pozitív definit függvény, de ez más kérdés).



1.1. ábra. $\frac{R_\xi(\tau)}{R_\xi(0)}$ a $2B\tau$ függvényében

1.9. Példa: exponenciálisan lecsengő autokorrelációs függvényű folyamat

Egy ξ jel autokorrelációs függvénye

$$R_\xi(\tau) = R_0 e^{-2\pi f_0 |\tau|} \quad (1.30)$$

Határozzuk meg a jel spektrális sűrűségfüggvényét!

MEGOLDÁS

A megadott autokorrelációs függvény Fourier transzformáltját kell képezni:

$$s_\xi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (1.31)$$

Most az autokorrelációs függvény szakaszonként eltérő képlettel írható le, ezért

$$s_\xi(f) = \int_{-\infty}^0 R_0 e^{2\pi(f_0 - jf)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} R_0 e^{2\pi(-f_0 - jf)\tau} d\tau \quad (1.32)$$

Az exponensben szereplő független változót kiemelve, az integrálásokat elvégezve:

$$s_\xi(f) = R_0 \left[\frac{e^{2\pi(f_0 - jf)\tau}}{2\pi(f_0 - jf)} \right]_{-\infty}^0 + R_0 \left[\frac{e^{2\pi(-f_0 - jf)\tau}}{2\pi(-f_0 - jf)} \right]_0^{\infty} \quad (1.33)$$

A behelyettesítés után:

$$s_\xi(f) = R_0 \frac{1}{2\pi(f_0 - jf)} + R_0 \frac{1}{2\pi(f_0 + jf)} = \frac{R_0}{2\pi f_0} \left[\frac{1}{1 - j\frac{f}{f_0}} + \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_0}} \right] \quad (1.34)$$

Elvégezve a kijelölt műveletet:

$$s_{\xi}(f) = R_0 \frac{1}{\pi f_0} \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2} = s_0 \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2} \quad (1.35)$$

Figyelemreméltó, hogy ez a spektrális sűrűségfüggvénye az elsőfokú aluláteresztővel megszűrt szélessávú fehér zajnak, ha a szűrő határfrekvenciája f_0 .

$$H_{LP}(f) = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_0}} \quad |H_{LP}(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2} \quad (1.36)$$

1.10. Példa

Tekintsük a $\xi(t)$ Gauss-folyamatot. Várható értéke $m_{\xi} = 0$, szórásnégyzete $\sigma_{\xi}^2 = 1$.

- Adja meg a folyamat sűrűségfüggvényét!
- Határozza meg a folyamat átlagteljesítményét!
- Határozza meg $R_{\xi}(0)$ értékét!
- Vezessük át a folyamatot egy ideális négyzetreemelő áramkörön! Határozza meg a $\eta(t) = \xi^2(t)$ kimenő folyamat várhatóértékét!

MEGOLDÁS

a.) A stacionárius Gauss-folyamat minden N -dimenziós projekciója N -dimenziós normális valószínűségi vektrováltozó. (Egyszerűbben: bármely pillanatban tekintjük a folyamatot, gauss-i valószínűségi változót "látunk".) A stacionaritás miatt a várhatóérték időfüggvény konstans. A minták korrelálatlansága esetén a σ^2 is független az időtől. (Bővebben l. 1.15). Ennek fényében válik értelmessé a feladatban szereplő "folyamat sűrűségfüggvénye" kifejezés.

A Gauss (azaz normális) eloszlás sűrűségfüggvénye általánosan:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

ahol m a valószínűségi változó várhatóértéke, σ^2 pedig a szórásnégyzete. (Megjegyzések: 1. Ezt az összefüggést érdemes fejből tudni. 2. Vegyük észre, hogy a normális eloszlás sűrűségfüggvényét (legteljesebb statisztikai leírását) teljesen meghatározza a várhatóértéke és a szórása. Ebből következik az a közismert tulajdonsága, hogy normális valószínűségi változók korrelálatlansága egyben függetlenséget is jelent.)

b) A folyamat átlagteljesítménye nem más, mint a négyzetének a várhatóértéke (második momentuma): $E[\xi^2(t)]$. Mivel a várhatóérték zérus, így ez most megegyezik a szórással, vagyis a válasz: 1 (hiszen $\sigma_{\xi}^2 = E[\xi^2(t)] - m_{\xi}^2$).

c) A korrelációs függvény definícióját felírva:

$$R_{\xi}(\tau) = E[\xi(t)\xi(t+\tau)]$$

és τ -ba 0-t helyettesítve adódik, hogy $R_{\xi}(0) = E[\xi^2(t)]$, tehát ugyancsak a szórási érték az eredmény.

d) Mivel $E[\eta(t)] = E[\xi^2(t)]$ értéket keressük, ezért a válasz megintcsak megegyezik az előző pontban kapott eredménnyel.

(Megjegyzés: Figyeljünk arra, hogy a szórásnégyzet és az átlagteljesítmény csak 0 várható értékű folyamatok esetén egyezik meg.)

1.11. Példa

Egy $\xi(t)$ gyengén stacionér, nulla várhatóértékű, Gauss folyamat spektrális sűrűségfüggvénye:

$$s_\xi(f) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} \leq f \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{egyebkent} \end{cases}$$

ahol f 1kHz-re normált frekvencia.

a) Írja fel a t időpontban megfigyelhető egydimenziós minta valószínűségi sűrűségfüggvényét és adja meg, hogy ez a minta milyen valószínűséggel pozitív!

b) A folyamatot egy

$$H(f) = \begin{cases} \cos(f) & -\frac{\pi}{2} \leq f \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{egyebkent} \end{cases}.$$

karakterisztikájú szűrőn átengedve, mi lesz a kimenő $\eta(t)$ folyamat átlagteljesítménye?

MEGOLDÁS

a) Gauss-folyamat esetében a minták eloszlása gaussi, azaz:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} e^{-\frac{(x-m_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}}$$

Ebben a kifejezésben csak a szórás ismeretlen, a várhatóérték meg volt adva (0). Mivel a folyamat 0 várható értékű, ezért a szórás megegyezik a második momentummal, azaz a jel átlagteljesítményével, amit megkaphatunk a spektrális sűrűségfüggvény integráljaként:

$$\sigma_\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s_\xi(f) df = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} df = \pi$$

A Gauss-sűrűségfüggvény szimmetrikus a 0-ra (0 várható érték esetén), így $P(\xi(t) > 0) = 0.5$.

b.) A transzformált (szűrt) jel spektrális sűrűségfüggvénye (1.8) alapján számolható, az átlagteljesítmény pedig megkapható a spektrális sűrűségfüggvény integráljaként:

$$\begin{aligned} \sigma_\eta^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} s_\eta(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 s_\xi(f) df = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(f) df = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2f)}{2} df = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Megjegyzés: Ennek a feladatnak a megoldásához nem feltétlenül szükséges tudni, de érdemes megjegyezni, hogy Gauss-folyamatot lineáris szűrőn átengedve a kimenet is Gauss-folyamat lesz.

1.12. Példa: Visszhang hatása

Az η folyamat a zérus várható értékű, $R_\xi(\tau) = R_0 \cdot e^{-\Omega|\tau|}$ autokorrelációs függvényű, ξ stacionárius folyamat lineáris transzformáltja: $\eta_t = \xi_t - \xi_{t-T}$. Határozzuk meg az η folyamat autokorrelációs függvényét, továbbá a ξ és az η folyamatok spektrális sűrűségfüggvényeinek hányadosát a frekvencia függvényében!

MEGOLDÁS

Az autokorrelációs függvény:

$$\begin{aligned} R_\eta(t_1, t_2) &= E[(\xi_{t_1} - \xi_{t_1-T})(\xi_{t_2} - \xi_{t_2-T})] = \\ &= E[\xi_{t_1}\xi_{t_2}] - E[\xi_{t_1-T}\xi_{t_2}] - E[\xi_{t_1}\xi_{t_2-T}] + E[\xi_{t_1-T}\xi_{t_2-T}] = \\ &= R_\xi(t_2 - t_1) - R_\xi(t_2 - t_1 + T) - R_\xi(t_2 - t_1 - T) + R_\xi(t_2 - t_1) = \\ &= 2R_\xi(\tau) - R_\xi(\tau + T) - R_\xi(\tau - T) \end{aligned}$$

Az autokorrelációs függvény csak az időkoordináták $\tau = t_2 - t_1$ különbségétől függ, így a kimenő folyamat stacionárius. A kimenő jel autokorrelációs függvényének Fourier transzformáltja, azaz spektrális sűrűségfüggvénye:

$$\begin{aligned} s_\eta(f) &= 2s_\xi(f) - s_\xi(f) \cdot e^{j2\pi fT} - s_\xi(f) \cdot e^{-j2\pi fT} = \\ &= s_\xi(f)(2 - 2\cos(2\pi fT)) = 4 \cdot s_\xi(f) \cdot \sin^2(\pi fT) \end{aligned}$$

A keresett hányados tehát:

$$4 \sin^2(\pi fT) \quad (1.37)$$

Más megfontolással:

A rendszer impulzus válasza: $h(t) = \delta(t) - \delta(t - T)$. A rendszer átviteli függvénye:

$$H(f) = \mathbf{F}\{h(t)\} = 1 - e^{-j2\pi fT} = 1 - \cos(2\pi fT) + j \sin(2\pi fT) \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{s_\eta(f)}{s_\xi(f)} &= |H(f)|^2 = 1 - 2\cos(2\pi fT) + \cos^2(2\pi fT) + \sin^2(2\pi fT) = \\ &= 2(1 - \cos(2\pi fT)) = 4 \sin^2(\pi fT) \end{aligned} \quad (1.39)$$

1.13. Példa: Derivált folyamat

Vizsgáljuk meg, hogyan viselkedik a B sávhatárú fehér zaj deriváltja! Hogyan értelmezhető, stacionárius-e, mit mondhatunk az autokorrelációs függvényéről és a spektrális sűrűségfüggvényéről?

MEGOLDÁS

Próbálkozzunk azzal az úttal, amellyel közönséges függvények esetén célt értünk. Tekintsük a

$$\eta_t(\Delta) = \frac{1}{\Delta} (\xi_{t+\Delta} - \xi_t) \quad (1.40)$$

különbségi hányadost! Azonnal látszik, ez nagyon hasonlóan viselkedik, mint az előző feladat visszhangos jele. A várható érték időfüggvény nyilván zérus, a spektrális sűrűségfüggvény pedig (az előző példa alapján)

$$s_\eta(f) = \frac{1}{\Delta^2} 4 \cdot s_\xi(f) \cdot \sin^2(\pi f \Delta) = 4 \cdot s_\xi(f) \cdot \frac{\sin^2(\pi f \Delta)}{\Delta^2}. \quad (1.41)$$

Ha a bemenő folyamat sávhatárolt, akkor ezzel a sűrűségfüggvénnyel semmi probléma nem lehet, s akkor is létezik, ha $\Delta \rightarrow 0$. Ekkor pedig:

$$s_\eta(f) = s_\xi(f) (2\pi f)^2 \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(\pi f \Delta)}{(\pi f \Delta)} \right)^2 = s_\xi(f) (2\pi f)^2 = s_\xi(f) |j2\pi f|^2 \quad (1.42)$$

Tanulság: a deriválás, mint lineáris transzformáció ugyanúgy viselkedik (legalábbis "szelíd" bemenő jelekre), mint a konvolúciós integrállal leírható transzformációk. Megjegyezhető, hogy a kimeneti jel autokorrelációs függvénye:

$$R_\eta(\tau) = -\frac{d^2 R_\xi(\tau)}{d\tau^2} \quad (1.43)$$

Mert ha $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, akkor $\mathcal{F}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = j2\pi f X(f)$ és $\mathcal{F}\left\{\frac{d^2 x(t)}{dt^2}\right\} = j2\pi f j2\pi f X(f) = -(2\pi f)^2 X(f)$.

1.14. Szinuszos jel stacionárius modellje

Vizsgáljuk meg, milyen feltételek mellett lehet a

$$\begin{aligned} \xi(t) &= A \cos(\omega_0 t + \varphi) = \\ &= A \cos(\omega_0 t) \cos \varphi - A \sin(\omega_0 t) \sin \varphi \end{aligned}$$

sztochasztikus folyamat stacionárius! (A és ω_0 konstans, φ pedig egy folytonos valószínűségi változó.)

MEGOLDÁS

Legyen a φ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f_\varphi(x)$! Ekkor folyamatunk **várható érték** időfüggvénye:

$$\begin{aligned} m_\xi(t) &= E[\xi_t] = A \cos(\omega_0 t) E[\cos \varphi] - A \sin(\omega_0 t) E[\sin \varphi] = \\ &= A \cos(\omega_0 t) \int_{-\infty}^{\infty} f_\varphi(x) \cos(x) dx - A \sin(\omega_0 t) \int_{-\infty}^{\infty} f_\varphi(x) \sin(x) dx = \end{aligned}$$

$$= A \cos(\omega_0 t) K_1 - A \sin(\omega_0 t) K_2 \quad (1.44)$$

Ahol:

$$K_1 = E[\cos(\varphi)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varphi}(x) \cos(x) dx \quad (1.45)$$

$$K_2 = E[\sin(\varphi)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varphi}(x) \sin(x) dx \quad (1.46)$$

Tekintve, hogy a szinusz- és a koszinuszfüggvény lineárisan függetlenek (állandó együtthatós lineáris kombinációjuk nem lehet azonosan zérus), a várható érték időfüggvény csak akkor lehet állandó (zérus), ha $K_1 = K_2 = 0$.

Az autokorrelációs függvény:

$$\begin{aligned} R_{\xi}(t_1, t_2) &= E[A \cos(\omega_0 t_2 + \varphi) A \cos(\omega_0 t_1 + \varphi)] = \\ &= A^2 E[\cos[\omega_0(t_2 + t_1) + 2\varphi] + \cos[\omega_0(t_2 - t_1)]] = \\ &= A^2 E[\cos[\omega_0(t_2 + t_1)] \cos[2\varphi] - \sin[\omega_0(t_2 + t_1)] \sin[2\varphi] + \cos[\omega_0(t_2 - t_1)]] = \\ &= A^2 \cos[\omega_0(t_2 + t_1)] E[\cos[2\varphi]] - A^2 \sin[\omega_0(t_2 + t_1)] E[\sin[2\varphi]] + A^2 \cos[\omega_0(t_2 - t_1)] \end{aligned} \quad (1.47)$$

Bevezetve a

$$K_3 = E[\cos(2\varphi)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varphi}(x) \cos(2x) dx \quad (1.48)$$

$$K_4 = E[\sin(2\varphi)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varphi}(x) \sin(2x) dx \quad (1.49)$$

jelölést, ezzel

$$R_{\xi}(t_1, t_2) = A^2 \cos[\omega_0(t_2 - t_1)] + K_3 A^2 \cos[\omega_0(t_2 + t_1)] - K_4 A^2 \sin[\omega_0(t_2 + t_1)]$$

A kapott összeg első tagja csak az időpontok különbségétől függ. A második és a harmadik tag bizonyosan elrontaná ezt a függést, ha nem volna zérus (csakúgy, mint a várható érték időfüggvény esetében láttuk). Ezzel:

$$R_{\xi}(\tau) = A^2 \cos[\omega_0 \tau] \quad (1.50)$$

és

$$m_{\xi}(t) = E[\xi_t] = 0$$

Jelünk tehát akkor stacionárius, ha

$$K_{1,3}^{(k)} = E[\cos(k\varphi)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varphi}(x) \cos(kx) dx = 0 \quad (1.51)$$

$$K_{2,4}^{(k)} = E[\sin(k\varphi)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varphi}(x) \sin(kx) dx = 0$$

Például ha $f_{\varphi}(x)$ egyenletes eloszlású a $[0, 2\pi]$ intervallumban, a fenti feltételek teljesülnek.

$$K_{1,3}^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varphi}(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kx) dx = 0 \quad (1.52)$$

$$K_{2,4}^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varphi}(x) \sin(kx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(kx) dx = 0 \quad (1.53)$$

1.15. Diszkrét idejű Gauss folyamat

Tekintsünk egy diszkrét idejű, stacionárius idő sorozatot, melynek μ_n mintái T időközökben követik egymást. A mintákat tekintsük zérus várható értékű valószínűségi változóknak, melynek eloszlása legyen normális (Gauss).

Határozzuk meg a jel teljesítményét, autokorrelációs függvényét és spektrális teljesítmény sűrűség függvényét!

Mi lesz az eredmény ha a folyamat nem zérus várható értékű?

MEGOLDÁS

A várható értéket a jel átlag értékének (egyenáramú összetevőjének) tekinthetjük. Ha a várható érték zérus, ez azt jelenti, hogy a jel csak váltakozó áramú komponenseket tartalmaz.

A zérus várható értékű Gauss eloszlás (amplitúdó) sűrűség függvénye:

$$f_{\mu}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\mu}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_{\mu}^2}\right) \quad (1.54)$$

ahol σ_{μ} a szórás értéke. A jel (átlag) teljesítményén a minták négyzetének várható értékét értjük:

$$E[\mu_n^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\mu}(x) dx = \sigma_{\mu}^2 \quad (1.55)$$

Zérus várható érték esetén a jel teljesítménye a szórás négyzetével egyezik meg. Az autokorrelációs függvény (diszkrét idejű esetben: sorozat) definíció szerint:

$$R_{\mu}(k) = E[\mu_{n+k}\mu_n] \quad (1.56)$$

Ezt a várható értéket a μ_n és a μ_{n+k} valószínűségi változók együttes sűrűség függvényének ismeretében tudjuk kiszámítani. Gauss eloszlás esetén a zérus várható értékű

együttes sűrűség függvény:

$$f_{\mu\mu}(x_1, x_2, k) = \frac{1}{2\pi\sigma_\mu^2} \exp\left(-\frac{x_1^2 - 2r_\mu(k)x_1x_2 + x_2^2}{2\sigma_\mu^2}\right) \quad (1.57)$$

ahol $r_\mu(k)$ a folyamatra és a k minta távolságra jellemző állandó. Ha $k=0$, akkor:

$$R_\mu(0) = E[\mu_n\mu_n] = E[\mu_n^2] = \sigma_\mu^2 \quad (1.58)$$

ami a jel teljesítménye. Az együttes sűrűség függvény ismeretében a szorzat várható értékét az alábbi képlet szerint számíthatjuk ki:

$$R_\mu(k) = E[\mu_{n+k}\mu_n] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2 f_{\mu\mu}(x_1, x_2, k) dx_1 dx_2 \quad (1.59)$$

A fenti integrál (a számítások mellőzésével) az alábbi eredményt adja:

$$R_\mu(k) = \sigma_\mu^2 r_\mu(k) = R_\mu(0) r_\mu(k) \quad (1.60)$$

amiből:

$$r_\mu(k) = \frac{R_\mu(k)}{R_\mu(0)} \quad (1.61)$$

Az $r_\mu(k)$ tehát a relatív korrelációs együttható. Ha azt mondjuk, hogy ismerjük a Gauss folyamat együttes eloszlás függvényét, az azt jelenti, hogy ismerjük az autokorrelációs sorozatot.

A spektrális teljesítmény sűrűség függvény az autokorrelációs függvény Fourier-transzformáltja. (Fourier-transzformált alatt most a diszkrét idejű F.tr.-t kell érteni.)

$$s_\mu(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_\mu(k) e^{-j2\pi f k T} \quad (1.62)$$

Mivel az autokorrelációs sorozat (a definíció szerint) valós és páros, a teljesítmény sűrűség függvény is valós és páros. (A nemnegatív értékű teljesítmény sűrűség függvény diszkrét idejű esetben $f_s = 1/T$ szerint periódikus is.)

$$s_\mu(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_\mu(k) e^{-j2\pi f k T} = R_\mu(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} R_\mu(k) \cos 2\pi f k T \quad (1.63)$$

Vizsgáljuk most meg azt az esetet amikor az egyes minták korrelálatlanok!

$$R_\mu(k) = E[\mu_{n+k}\mu_n] = \begin{cases} E[\mu_n^2] = \sigma_\mu^2 & \text{ha } k = 0 \\ 0 & \text{ha } k \neq 0 \end{cases} \quad (1.64)$$

Ennek a folyamatnak a teljesítmény sűrűség függvénye:

$$s_\mu(f) = R_\mu(0) = \sigma_\mu^2 = \text{const} \quad (1.65)$$

A konstans teljesítmény sűrűségű folyamatokat szokás "fehér" folyamatoknak nevezni. Ha $r_\mu(k) = 0$ ($k \neq 0$), akkor az együttes sűrűség függvény szorzattá bontható, ami a minták függetlenségének feltétele. $f_{\mu\mu}(x_1, x_2, k) = f_\mu(x_1) f_\mu(x_2)$ Tehát a korrelálatlan minták függetlenek is Gauss eloszlás esetén.

Matematika tanulmányainkból tudjuk, hogy ha Gauss eloszlású valószínűségi változók lineáris kombinációjaként állítunk elő egy új valószínűségi változót (v.v.), akkor az szintén Gauss eloszlású lesz. Egyedül a normális eloszlású v.v.-k tesznek annak eleget, hogy a súlyozott összegük eloszlása, a tagok eloszlás típusával egyezik meg. Diszkrét idejű lineáris rendszerekben, ahol a kimenő jelet más jelek lineár kombinációjaként állítjuk elő, a kimenő jel is normális eloszlású lesz, ha a többi is az. Ha az összegben a tagok nem normális eloszlásúak, akkor általában nehéz meghatározni a kimenő jel eloszlását.

A valószínűség számítás határeloszlási tétele értelmében, az egyforma v.v.-k összegének eloszlása a Gauss eloszláshoz tart a tagok számának növekedésével. Ezért fontos és gyakran használt modell a normális eloszlás.

Ha a jel nem zérus várható értékű, akkor azt előállíthatjuk egy zérus várható értékű folyamat és egy konstans összegeként. Az összeg folyamat várható értéke a konstans értéke lesz. Számításaink leegyszerűsítése érdekében élünk általában ezzel a felbontással. Ha a rendszer lineáris, akkor érvényes a szuperpozíció, azaz számolhatunk a két jellel külön-külön, majd az eredményt (értelem szerint) összeadjuk. Legyen:

$$\xi_n = \mu_n + c \quad (1.66)$$

Ennek a várható értéke:

$$E[\xi_n] = E[\mu_n + c] = E[\mu_n] + c = c \quad (1.67)$$

A jel teljesítménye:

$$\begin{aligned} E[\xi_n^2] &= E[(\mu_n + c)^2] = E[\mu_n^2 + 2c\mu_n + c^2] = E[\mu_n^2] + 2cE[\mu_n] + c^2 \\ E[\xi_n^2] &= E[\mu_n^2] + c^2 = \sigma_\mu^2 + c^2 \end{aligned} \quad (1.68)$$

Az autokorrelációs függvény:

$$R_\xi(k) = E[\xi_{n+k}\xi_n] = E[\mu_{n+k}\mu_n + c\mu_{n+k} + c\mu_n + c^2] = R_\mu(k) + c^2 \quad (1.69)$$

A teljesítmény sűrűség függvény:

$$\begin{aligned} s_\xi(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_\xi(k) e^{-j2\pi f k T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (R_\mu(k) + c^2) e^{-j2\pi f k T} = s_\mu(f) + c^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f k T} = \\ &= s_\mu(f) + \frac{c^2}{T} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(f - i f_s) \end{aligned} \quad (1.70)$$

Az összefüggésben szereplő (Dirac-deltás) második tag az ami nehezen kezelhetővé teszi a nem zérus várható értékű jeleket. (A (1.70)-ben felhasznált összefüggést fordított irányban láthatjuk be könnyen az eredmény Fourier sorfejtésével.)

1.15.1. Példa: Gauss folyamat áthaladása diszkrét idejű, lineáris rendszeren

Tekintsük azt a diszkrét idejű, lineáris, kauzális, időinvariáns, stabil rendszert, melyet az alábbi differencia egyenlet definiál (ARMA rendszer):

$$\xi_n = \sum_{i=0}^M a_i \mu_{n-i} - \sum_{i=1}^N b_i \xi_{n-i} \quad (1.71)$$

A bemenő ill. a kimenő sorozat mintái μ_n ill. ξ_n , (a_i, b_i konstansok). Legyen a μ_n bemeneti sorozat zérus várható értékű, Gauss eloszlású valószínűségi változó, melynek autokorrelációs sorozata (együttes sűrűség függvénye) ismert. Határozzuk meg a kimeneti ξ_n sorozat statisztikáit (egy- ill. kétdimenziós sűrűség függvényeit)!

MEGOLDÁS

Az előző feladatban leírt indoklás szerint, a kimeneti ξ_n folyamat is zérus várható értékű Gauss folyamat lesz. (Ha a bemeneti jelnek nincs egyenáramú összetevője, akkor a lineáris hálózat kimenetében sem lesz egyenáramú összetevő.)

A kimeneti ξ_n sorozat amplitúdó- és együttes sűrűség függvénye jellegre tehát megegyezik a bemenő jel megfelelő függvényeivel:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}\right) \quad (1.72)$$

és

$$f_{\xi\xi}(x_1, x_2, k) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2} \exp\left(-\frac{x_1^2 - 2r_\xi(k)x_1x_2 + x_2^2}{2\sigma_\xi^2}\right) \quad (1.73)$$

csak a bennük szereplő σ_ξ és $r_\xi(k)$ paraméterek ismeretlenek egyenlőre. A feladatunk ezeknek a meghatározása.

A diszkrét idejű rendszer $H(z)$ transzfer függvénye polinomiális, ill. gyöktényezős alakban:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} = a_0 \frac{\prod_{i=1}^M (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1})} \quad (1.74)$$

ahol z_i -k a rendszer átviteli zérusai és p_i -k az átviteli pólusok. A kimenet és a bemenet statisztikái között a frekvencia tartományban tudunk egyszerűen kapcsolatot teremteni a rendszer transzfer függvényének felhasználásával. A számítás algoritmus a következő:

1. A bemenet autokorrelációs függvénye: $R_\mu(k) = R_\mu(0) r_\mu(k)$ ahol $R_\mu(0) = \sigma_\mu^2$.
2. A bemeneti folyamat spektrális teljesítmény sűrűség függvénye (a diszkrét idejű Fourier transzformált):

$$s_\mu(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_\mu(k) e^{-j2\pi f k T} \quad (1.75)$$

3. A kimenet spektrális teljesítmény sűrűség függvénye:

$$s_{\xi}(f) = H(e^{j2\pi fT}) H(e^{-j2\pi fT}) s_{\mu}(f) = |H(e^{j2\pi fT})|^2 s_{\mu}(f) \quad (1.76)$$

Másrészt igaz:

$$s_{\xi}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{\xi}(k) e^{-j2\pi f k T} \quad (1.77)$$

amiben egy Fourier sort ismerhetünk fel.

4. A Fourier sor együtthatóit a sorfejtés képletéből határozzuk meg:

$$R_{\xi}(k) = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} s_{\xi}(f) e^{j2\pi f k T} df = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} s_{\mu}(f) |H(e^{j2\pi fT})|^2 e^{j2\pi f k T} df \quad (1.78)$$

5. Az autokorrelációs sorozat ismeretében a keresett mennyiségek:

$$r_{\xi}(k) = \frac{R_{\xi}(k)}{R_{\xi}(0)} \quad \sigma_{\xi}^2 = R_{\xi}(0) \quad (1.79)$$

A fenti gondolatmenetben kétség kívül a legnehezebb lépés a (1.78) szerinti integrál kiszámítása. Tekintve $H(z)$ (1.74) szerinti alakját, a primitív függvény megtalálása nagy nehézségekbe ütközik.

Az integrálás megkerülhető, ha bevezetjük a komplex változójú teljesítmény sűrűség függvényt! (Az autokorrelációs sorozat Z -transzformáltja)

$$S_{\mu}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{\mu}(k) z^{-k} \quad (1.80)$$

Ennek kapcsolata a valós értékű függvénnyel:

$$s_{\mu}(f) = S_{\mu}(z = e^{j2\pi fT}) \quad (1.81)$$

Diszkrét idejű rendszerekre igaz:

$$S_{\xi}(z) = H(z) H(z^{-1}) S_{\mu}(z) \quad (1.82)$$

A (1.80)-ban egy komplex változójú függvény Laurent-sorát ismerhetjük fel. A sor együtthatóit a Laurent-sorok sorfejtési képletéből határozzuk meg. (Inverz Z -transzformáció)

$$R_{\xi}(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C S_{\xi}(z) z^{k-1} dz \quad (1.83)$$

ahol a „ C ” görbe a konvergencia tartományban elhelyezkedő egységkör (az óramutató járásával ellentétesen irányítva).

A (1.83) integrál kiszámításához Cauchy reziduuum tételét hívjuk segítségül, mely szerint, egy $F(z)$ függvény „C” zárt görbére vett integrálja csak a $F(z)$ -nek a p_i helyeken vett reziduumaitól függ. A p_i helyek az $F(z)$ -nek a „C” görbén belül elhelyezkedő pólusai:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) dz = \sum_i \text{Res}[F(z), p_i] \quad (1.84)$$

Egyszeres multiplicitású pólusok esetén a reziduuum:

$$\text{Res}[F(z), p_i] = \lim_{z \rightarrow p_i} (z - p_i) F(z) \quad (1.85)$$

A reziduuumok használatával az integrál kiszámítása algebrai feladattá egyszerűsödik. Az apparátus hatékonyságát a következő példákon szemléltetjük.

Fehér Gauss folyamat áthaladása másodfokú, auto-regresszív (AR) rendszeren

Legyen a bemeneti jel zérus várható értékű, Gauss eloszlású, stacioner sorozat, melyben az egyes minták korrelálatlanok (fehér folyamat):

$$r_\mu(k) = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = 0 \\ 0 & \text{ha } k \neq 0 \end{cases} \quad (1.86)$$

A diszkrét idejű (AR) rendszert leíró differencia egyenlet:

$$\xi_n = \mu_n - b_1 \xi_{n-1} - b_2 \xi_{n-2} \quad (1.87)$$

Határozzuk meg a kimenet autokorrelációs függvényét!

MEGOLDÁS

A rendszer $H(z)$ transzfer függvénye:

$$H(z) = \frac{1}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} = \frac{1}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})} \quad (1.88)$$

ahol:

$$p_{1,2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2} \quad (1.89)$$

illetve:

$$b_1 = -(p_1 + p_2) \text{ és } b_2 = p_1 p_2$$

A rendszer stabilitásának feltétele: $|p_1| < 1$ és $|p_2| < 1$. A bemenet autokorrelációs függvénye (1.86) alapján

$$R_\mu(k) = \begin{cases} \sigma_\mu^2 & \text{ha } k = 0 \\ 0 & \text{ha } k \neq 0 \end{cases} \quad (1.90)$$

A bemenet komplex értékű teljesítmény sűrűség függvénye:

$$S_\mu(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_\mu(k) z^{-k} = R_\xi(0) = \sigma_\mu^2 \quad (1.91)$$

A kimenet komplex értékű teljesítmény sűrűség függvénye:

$$\begin{aligned} S_\xi(z) &= H(z) H(z^{-1}) S_\mu(z) = \\ &= \sigma_\mu^2 \frac{z^2}{(z-p_1)(z-p_2)} \frac{1}{(1-p_1z)(1-p_2z)} \end{aligned} \quad (1.92)$$

A (1.83) szerinti integrandus:

$$F_k(z) = S_\xi(z) z^{k-1} = \sigma_\mu^2 \frac{z^{k+1}}{(z-p_1)(z-p_2)} \frac{1}{(1-p_1z)(1-p_2z)} \quad (1.93)$$

Az $F_k(z)$ függvénynek $k \geq 0$ esetén az egységkörön belül csak a p_1 és a p_2 helyen van pólusa. A p_1 helyhez tartozó reziduum:

$$\begin{aligned} \text{Res}[F_k(z), p_1] &= \lim_{z \rightarrow p_1} (z-p_1) F_k(z) = \sigma_\mu^2 \lim_{z \rightarrow p_1} \frac{z^{k+1}}{(z-p_2)} \frac{1}{(1-p_1z)(1-p_2z)} = \\ &= \sigma_\mu^2 \frac{p_1^{k+1}}{(p_1-p_2)(1-p_1^2)(1-p_1p_2)} \end{aligned} \quad (1.94)$$

A p_2 helyhez tartozó reziduum:

$$\text{Res}[F_k(z), p_2] = \lim_{z \rightarrow p_2} (z-p_2) F_k(z) = \sigma_\mu^2 \frac{p_2^{k+1}}{(p_2-p_1)(1-p_2^2)(1-p_1p_2)} \quad (1.95)$$

A kimenet autokorrelációs függvénye a $k \geq 0$ esetekre:

$$R_\xi(k) = \sum_{i=1}^2 \text{Res}[F_k, p_i] = \sigma_\mu^2 \frac{(1-p_1^2)p_2^{k+1} - (1-p_2^2)p_1^{k+1}}{(p_2-p_1)(1-p_1^2)(1-p_2^2)(1-p_1p_2)} \quad (1.96)$$

A $k < 0$ esetekre (mivel az autokorrelációs függvény páros): $R_\xi(-k) = R_\xi(k)$. A (1.96)-be behelyettesítve a (3.38.) szerinti összefüggéseket, a sorozat első három eleme az együtthatókkal kifejezve:

$$R_\xi(0) = \sigma_\xi^2 = \sigma_\mu^2 \frac{1+b_2}{1-b_2} \frac{1}{(1+b_2)^2 - b_1^2} \quad ; \quad (1.97)$$

$$R_\xi(1) = R_\xi(-1) = -\frac{b_1}{1+b_2} R_\xi(0); \quad R_\xi(2) = R_\xi(-2) = \frac{b_1^2 - b_2(1+b_2)}{1+b_2} R_\xi(0);$$

A teljesítmény sűrűség függvényt transzformáló kifejezés:

$$H(z) H(z^{-1}) = \frac{1}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}} \frac{1}{1+b_1z+b_2z^2} =$$

$$= \frac{1}{(1 + b_1^2 + b_2^2) + b_1 (1 + b_2) (z + z^{-1}) + b_2 (z^2 + z^{-2})}$$

A transzfer függvény abszolútérték négyzetét a frekvencia tartományban a fenti kifejezésből számítjuk ki a $z = e^{j2\pi fT}$ helyettesítéssel:

$$G(f) = \left| H(e^{j2\pi fT}) \right|^2 = \frac{1}{c_0 + c_1 \cos(2\pi fT) + c_2 \cos(4\pi fT)} \quad (1.98)$$

Ahol:

$$c_0 = 1 + b_1^2 + b_2^2, \quad c_1 = 2b_1(1 + b_2), \quad c_2 = 2b_2 \quad (1.99)$$

A kimenet spektrális teljesítmény sűrűség függvénye:

$$s_\xi(f) = G(f) s_\mu(f) = G(f) \sigma_\mu^2 = \frac{\sigma_\mu^2}{c_0 + c_1 \cos(2\pi fT) + c_2 \cos(4\pi fT)} \quad (1.100)$$

Ezek után nézzük meg egy példában a numerikus viszonyokat! Legyen a bemeneti fehér folyamat szórása egységnyi: $\sigma_\mu = 1$.

Az autoregresszív, diszkrét idejű hálózat paraméterei: $b_1 = -1.5588$; $b_2 = 0.8100$. A kimeneti sorozat autokorrelációs függvényének első elemei:

$$R_\xi(0) = \sigma_\xi^2 = \sigma_\mu^2 \frac{1 + b_2}{1 - b_2} \frac{1}{(1 + b_2)^2 - b_1^2} = 11.2591$$

$$R_\xi(1) = R_\xi(-1) = -\frac{b_1}{1 + b_2} R_\xi(0) = 9.6968$$

$$R_\xi(2) = R_\xi(-2) = \frac{b_1^2 - b_2(1 + b_2)}{1 + b_2} R_\xi(0) = 5.9959$$

hiányzó ábra

1.2. ábra. A kimeneti spektrális teljesítmény sűrűség függvény a $[0, f_s/2]$ frekvencia tartományban a (1.100) alapján

A kimeneti jel átlag teljesítménye:

$$\sigma_\xi^2 = R_\xi(0) = 11.2591$$

Fehér Gauss folyamat áthaladása másodfokú, mozgóátlag-képző (MA) rendszeren

Legyen a bemeneti jel most is zérus várható értékű, Gauss eloszlású, stacioner sorozat, melyben az egyes minták korrelálatlanok:

$$r_\mu(k) = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = 0 \\ 0 & \text{ha } k \neq 0 \end{cases} \quad (1.101)$$

A diszkrét idejű (MA) rendszert leíró differencia egyenlet:

$$\xi_n = a_0\mu_n + a_1\mu_{n-1} + a_2\mu_{n-2} \quad (1.102)$$

Határozzuk meg a kimenet autokorrelációs sorozatát és spektrális teljesítmény sűrűség függvényét!

MEGOLDÁS

A bemenet spektrális teljesítmény sűrűség függvénye konstans: $s_\mu(f) = \sigma_\mu^2$. A rendszer $H(z)$ transzfer függvénye:

$$H(z) = a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} \quad (1.103)$$

A kimenet komplex értékű spektrális teljesítmény sűrűség függvénye:

$$\begin{aligned} S_\xi(z) &= H(z) H(z^{-1}) S_\mu(z) = \\ &= \sigma_\mu^2 (a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}) (a_0 + a_1z + a_2z^2) = \\ &= \sigma_\mu^2 [(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2) + a_1(a_0 + a_2)(z + z^{-1}) + a_0a_2(z^2 + z^{-2})] \end{aligned} \quad (1.104)$$

Másrészt a definíció szerint:

$$S_\xi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_\xi(k) z^{-k} \quad (1.105)$$

A két kifejezés összevetéséből:

$$\begin{aligned} R_\xi(0) &= \sigma_\mu^2 (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2); \quad R_\xi(\pm 1) = \sigma_\mu^2 a_1 (a_0 + a_2); \quad R_\xi(\pm 2) = \sigma_\mu^2 a_0 a_2 \\ R_\xi(k) &= 0 \text{ ha } |k| \geq 3 \end{aligned} \quad (1.106)$$

A kimeneti spektrális teljesítmény sűrűség függvényt úgy kapjuk meg, hogy a (1.104)-be a $z = e^{j2\pi fT}$ kifejezést helyettesítjük:

$$s_\xi(f) = \sigma_\mu^2 [(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2) + 2a_1(a_0 + a_2) \cos(2\pi fT) + 2a_0a_2 \cos(4\pi fT)] \quad (1.108)$$

A kimeneti jel teljesítménye:

$$\sigma_\xi^2 = R_\xi(0) = \sigma_\mu^2 (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2) \quad (1.109)$$

Nézzünk egy konkrét példát az alábbi adatokkal: Legyen: $\sigma_\mu = 1$, $a_0 = 1.0000$; $a_1 = 0.8660$ $a_2 = 0.5000$.

Ezekkel az értékekkel:

$$R_\xi(0) = \sigma_\mu^2 (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2) = 2.0000;$$

$$R_\xi(\pm 1) = \sigma_\mu^2 a_1 (a_0 + a_2) = 1.2990;$$

$$R_\xi(\pm 2) = \sigma_\mu^2 a_0 a_2 = 0.5000$$

$$R_\xi(k) = 0 \text{ ha } |k| \geq 0$$

hiányzó ábra

1.3. ábra. A kimeneti spektrális teljesítmény sűrűség függvény a $[0, f_s/2]$ frekvencia tartományban

A kimeneti jel átlag teljesítménye:

$$\sigma_\xi^2 = R_\xi(0) = 2.0000$$

Fehér Gauss folyamat áthaladása elsőfokú rendszeren

Legyen a bemeneti jel zérus várható értékű, Gauss eloszlású, stacioner sorozat, melyben az egyes minták függetlenek:

$$r_\mu(k) = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = 0 \\ 0 & \text{ha } k \neq 0 \end{cases} \quad (1.110)$$

A diszkrét idejű (ARMA) rendszert leíró differencia egyenlet:

$$\xi_n = \mu_n - a\mu_{n-1} + b\xi_{n-1} \quad (1.111)$$

ahol: a tetszőleges és $|b| < 1$. Határozzuk meg a kimenet autokorrelációs sorozatát és spektrális teljesítmény sűrűség függvényét!

MEGOLDÁS

A bemenet spektrális teljesítmény sűrűség függvénye konstans: $s_\mu(f) = \sigma_\mu^2$. A rendszer $H(z)$ transzfer függvénye:

$$H(z) = \frac{1 - az^{-1}}{1 - bz^{-1}} \quad (1.112)$$

A kimenet komplex értékű teljesítmény sűrűség függvénye:

$$S_{\xi}(z) = H(z) H(z^{-1}) S_{\mu}(z) = \sigma_{\mu}^2 \frac{z-a}{z-b} \frac{1-az}{1-bz} \quad (1.113)$$

A kimenet autokorrelációs függvényét a reziduumok segítségével fogjuk kiszámítani. Az integrálandó függvény (lásd (1.76)) a jelen példában:

$$F_k(z) = \sigma_{\mu}^2 \frac{z-a}{z-b} \frac{1-az}{1-bz} \frac{z^k}{z} \quad (1.114)$$

Ha $k=0$, akkor az egységkörön belül (1.108)-nek pólusa van a $z=0$ és a $z=b$ helyen.

$$\begin{aligned} R_{\xi}(0) &= \text{Res}[F_0(z), 0] + \text{Res}[F_0(z), b] = \\ &= \sigma_{\mu}^2 \left\{ \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z-a}{z-b} \frac{1-az}{1-bz} + \lim_{z \rightarrow b} \frac{z-a}{z} \frac{1-az}{1-bz} \right\} = \\ &= \sigma_{\mu}^2 \left[\frac{a}{b} + \frac{b-a}{b} \frac{1-ab}{1-b^2} \right] = \sigma_{\mu}^2 \left[1 + \frac{(a-b)^2}{1-b^2} \right] \end{aligned} \quad (1.115)$$

Ha $k \geq 1$, akkor (1.114)-nak az egységkörön belül csak a $z=b$ helyen van pólusa. Ennek megfelelően:

$$R_{\xi}(k) = \text{Res}[F_k(z), b] = \lim_{z \rightarrow b} (z-b) F_k(z) = \sigma_{\mu}^2 \frac{b-a}{b} \frac{1-ab}{1-b^2} b^k \quad (1.116)$$

Mivel az autokorrelációs függvény páros $R_{\xi}(-k) = R_{\xi}(k)$, ezért a $|k| \geq 1$ esetekre:

$$R_{\xi}(k) = \sigma_{\mu}^2 \frac{b-a}{b} \frac{1-ab}{1-b^2} b^{|k|} \quad (1.117)$$

A komplex értékű teljesítmény sűrűség függvény a (1.113)-ból:

$$S_{\xi}(z) = \sigma_{\mu}^2 \frac{1-az^{-1}}{1-bz^{-1}} \frac{1-az}{1-bz} = \sigma_{\mu}^2 \frac{1+a^2-a(z+z^{-1})}{1+b^2-b(z+z^{-1})} \quad (1.118)$$

A kimeneti spektrális teljesítmény sűrűség függvényt úgy kapjuk meg, hogy a (1.118)-be a $z = e^{j2\pi fT}$ kifejezést helyettesítjük:

$$s_{\xi}(f) = \sigma_{\mu}^2 \frac{1+a^2-2a \cos(2\pi fT)}{1+b^2-2b \cos(2\pi fT)} \quad (1.119)$$

Nem fehér spektrumú jelforrások

Az előző példákban azt láttuk, hogy kimeneti spektrális teljesítmény sűrűség függvények erősen függtek a frekvenciától. A „fehér” spektrumtól eltérően ezek a spektrumok „színesek” voltak.

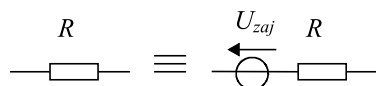
Ha egy jelforrás ilyen színes spektrummal bír, akkor a *forrást modellezhetjük* olyan módon, hogy az egy „fehér” forrásból, és egy *megfelelően választott* diszkrét idejű hálózattól áll. A fenti példák így színes spektrumú, Gauss forrásokra is vonatkozhatnak.

2. fejezet

A termikus zaj

2.1. A jelforrás termikus zaja

Elektronikus áramkörünkben minden rezisztív alkatrész termikus zajt kelt. Ha a zaj hatását figyelembe akarjuk venni, akkor az ellenállások helyettesítő képe:

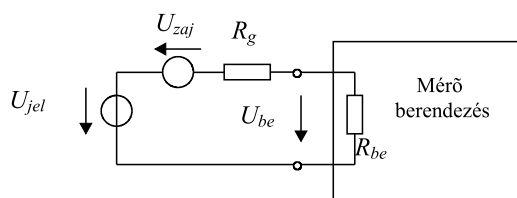


A zérus várható értékű, Gauss eloszlású fehér zaj feszültségének négyzetes várható értéke, (az effektív érték négyzete):

$$E[U_{zaj}^2] = U_z^2 = 4kTR_gB[V^2]$$

ahol k a Boltzman állandó, $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ [Ws/K], T az abszolút hőmérséklet Kelvin fokokban, B a vizsgált sávszélesség [Hz]-ben. Az ellenállások zajtermelő hatása elsősorban a kis jelszintű fokozatokban (bemeneti fokozatokban) érdekes, ahol a jel-feszültség összemérhető a zajfeszültséggel.

Tekintsünk egy R_g belső ellenállású jelforrást, amelyik a fentiek szerint a hasznosnak tekintett jelen kívül termikus zajt is kelt:



Ha a generátor terhelése illesztve van a generátorhoz ($R_{be} = R_g$), akkor a mérő berendezésbe jutó zajteljesítmény:

$$P_{zbe} = \frac{\left(\frac{U_z}{2}\right)^2}{R_g} = \frac{U_z^2}{4R_g} = kTB \quad (2.1)$$

Az *illesztett jelforrásból* kiáramló zaj spektrális teljesítmény sűrűsége:

$$N_0 = \frac{P_{zbe}}{B} = kT \quad (2.2)$$

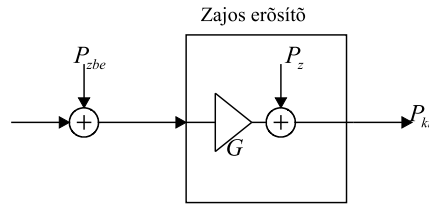
ami szobahőmérsékleten:

$$N_0(290K) = 4 \cdot 10^{-21} \left[\frac{W}{Hz} \right]$$

2.2. Zajos erősítők

Elektronikus jelkezelő egységekben (tipikusan erősítőkben) a zajnak számos forrása van (az ellenállások termikus zaja, a tranzisztorok sörét zaja, a flicker zaj, a tápfeszültség zavaraiából adódó u.n. „brumm”, az idegen jelek átszivárgása, stb.). A célunk legyen az, hogy eltekintve a részletektől, egy konkrét áramkörti fokozatot egyetlen mennyiséggel: a zajtényezővel jellemezzünk.

A teljesítmény viszonyokat az alábbi modell szerint értelmezzük:



A jelforrás termikus zaja: $P_{zbe} = kTB$ az erősítő által termelt (a kimeneten mérhető) zaj: P_z .

$$P_{ki} = G(P_{jelbe} + P_{zbe}) + P_z = P_{jelki} + P_{zki} \quad (2.3)$$

Az erősítő $G(f)$ teljesítmény erősítésének frekvencia függésétől eltekintünk, a vizsgált frekvencia sávban konstansnak tekintjük. A frekvencia függés hatását a zajsávszélességben vesszük figyelembe. A B zaj-sávszélességet (aluláteresztő karakterisztika esetére) az alábbi egyenlet definiálja:

$$B = \frac{1}{G(0)} \int_0^{\infty} G(f) df \quad (2.4)$$

Az f_0 sávközép frekvenciájú sáváteresztő karakterisztika esetén:

$$B = \frac{1}{G(f_0)} \int_0^{\infty} G(f) df \quad (2.5)$$

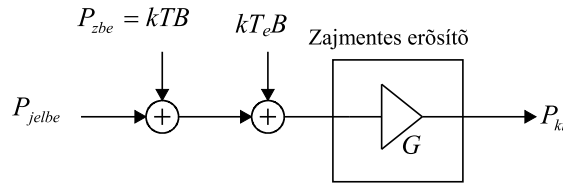
A kimeneti zaj:

$$P_{zki} = GP_{zbe} + P_z = GkTB + P_z = GkB \left(T + \frac{P_z}{GkB} \right) = GkB(T + T_e) \quad (2.6)$$

ahol T_e az erősítő bemenetre redukált u.n. *ekvivalens zajhőmérséklete*:

$$T_e = \frac{P_z}{GkB} \quad (2.7)$$

A (2.6) egyenlet azt fejezi ki, hogy az erősítő által termelt zajt bemeneti zajként értelmezzük, úgy, mintha a zajforrás hőmérséklete megemelkedett volna a $T + T_e$ hőmérsékletre.



A *zajtényező* azt fejezi ki, hogy a kimeneti zaj hányszorosa a felerősített T_0 szobahőmérsékletű bemeneti termikus zajnak:

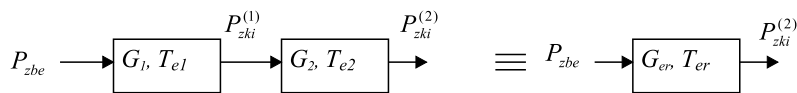
$$F = \left. \frac{P_{zki}}{GP_{zbe}} \right|_{T=T_0} = \frac{GkB(T_0 + T_e)}{GkBT_0} = 1 + \frac{T_e}{T_0} \geq 1 \quad (2.8)$$

Ha egy erősítő zajmentes (ideális esetben), akkor a $F = 1$, ami azt fejezi ki hogy nincs járulékos zaj. A zajtényező kapcsolata az ekvivalens zajhőmérséklettel:

$$T_e = (F - 1) T_0 \quad (2.9)$$

2.2.1. Kaszkád fokozatok eredő zajtényezője

Kaszkádba kapcsolt fokozatok helyettesítő képe:



$$P_{zki}^{(1)} = G_1 kTB + G_1 kT_{e1} B \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} P_{zki}^{(2)} &= G_2 G_1 kTB + G_2 G_1 kT_{e1} B + G_2 kT_{e2} B = \\ &= G_1 G_2 kB \left(T + T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_1} \right) = G_e kB (T + T_{er}) \end{aligned}$$

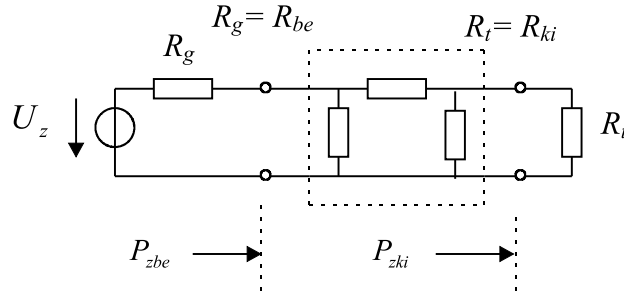
ahol: $G_{er} = G_1 G_2$ és $T_{er} = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_1}$. Az eredő zajtényező:

$$F_{er} = \left. \frac{P_{zki}^{(2)}}{G_{er} P_{zbe}} \right|_{T=T_0} = \frac{G_1 G_2 kB \left(T_0 + T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_1} \right)}{G_1 G_2 kT_0 B} = \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{T_0 + (F_1 - 1)T_0 + \frac{(F_2 - 1)T_0}{G_1}}{T_0} = \\
&= F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1}
\end{aligned}$$

2.2.2. A csillapító

Az illesztett csillapító zaj analízisét az alábbi ábra segítségével végezzük el:



Az R_g belső ellenállású (zajos) jelforrást passzívra tettük ($U_{jel} = 0$), és keressük az R_t lezárásra jutó zajteljesítményt. Az L csillapítású csillapító illesztve van a lezárásaihoz, azaz: $R_g = R_{be}$ és $R_t = R_{ki}$.

A zajos jelforrásból a csillapítóba jutó zajteljesítmény (lásd előző példa) :

$$P_{zbe} = kTB \quad (2.12)$$

A lezárásra jutó zajteljesítményt (anélkül, hogy az összes ellenállás hatását külön-külön vizsgálnánk) egyszerűen meghatározhatjuk azzal a gondolat menettel, hogy a csillapítóval kiegészített hálózatot tekintjük jelforrásnak, aminek a belső ellenállása R_{ki} . Mivel a kimenet is illesztve van, a fentiekhez hasonlóan:

$$P_{zki} = kTB \quad (2.13)$$

Ezek alapján értelmezhetjük a csillapító bemenetre redukált ekvivalens zajhőmérsékletét:

$$P_{zki} = \frac{1}{L} (P_{zbe} + kT_e B) = \frac{1}{L} kB (T + T_e) = kTB \quad (2.14)$$

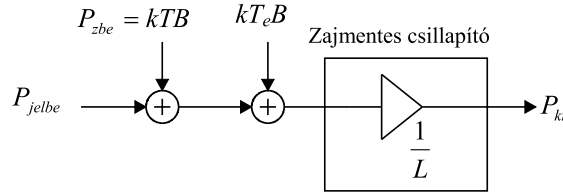
Amiből:

$$T_e = T (L - 1) \quad (2.15)$$

A csillapító teljesítmény "erősítése":

$$G_{cs} = \frac{1}{L} \leq 1$$

A csillapító zajmodellje az alábbi ábrán látható. Ezzel a modellel a csillapítót a zajos erősítőkhöz hasonlóan tudjuk tárgyalni.



A csillapító zajtényezője (a 6.9. alapján):

$$F_{cs} = 1 + \frac{T_e}{T_0} \quad (2.16)$$

Ha a csillapító szobahőmérsékletű:

$$F_{cs} = 1 + \frac{T_e}{T_0} = 1 + \frac{T_0(L-1)}{T_0} = L \quad (2.17)$$

A csillapítót azért tárgyaltuk az erősítőhöz hasonlóan, hogy az alábbi két kaszkád elrendezést össze tudjuk hasonlítani az eredő zajtényező szempontjából:



Az $F_{er} = F_1 + \frac{F_2-1}{G_1}$ összefüggést használva:

$$F_{er}^{(1)} = L + \frac{F-1}{\frac{1}{L}} = L(1+F-1) = LF \quad (2.18)$$

általában teljesül az

$$F_{er}^{(2)} \ll F_{er}^{(1)} \quad (2.19)$$

viszony, melynek feltétele:

$$F + \frac{L-1}{G} \ll LF \Rightarrow FG + (L-1) \ll FGL \Rightarrow (L-1) \ll FG(L-1) \quad (2.20)$$

Innen:

$$FG \gg 1 \quad (2.21)$$

Tehát ha (2.21) teljesül, akkor fennáll (2.19), amiből azt az általános rendszerteknikai megállapítást olvashatjuk ki, hogy a jelet még (az esetleg elkerülhetetlen) csillapítás előtt kell erősíteni.

2.3. Példa: Az antennakábel hatása

Határozzuk meg a levezető kábelből és egy előerősítőből álló rendszer eredő zajtényezőjét mindkét sorrendű összekapcsolás esetén!

Adatok:

A kábel hossza:	$h = 15 \text{ m}$
fajlagos csillapítása:	$a = 1 \text{ dB/m}$
hőmérséklete:	$T_k = 290 \text{ K}$
Az erősítő zajtényezője:	$F_e = 3 \text{ dB}$
erősítése:	$G_e = 20 \text{ dB}$

MEGOLDÁS

A 15 m hosszúságú kábel $L^{\text{dB}} = ha = 15\text{m} \cdot 1\text{dB/m} = 15\text{dB}$ csillapítást okoz. Az erősítő zajtényezője viszonyszámokban:

$$F_e^{\text{dB}} = 3\text{dB} = 10\lg(F_e) \Rightarrow F_e = 10^{0.3} = 1.995$$

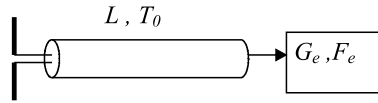
A kábel zajtényezője megegyezik annak csillapításával (mivel hőmérséklete 290 K), továbbá dB-ben kifejezett erősítése megegyezik a dB-ben megadott csillapításának -1-szeresével.

$$F_k^{\text{dB}} = L^{\text{dB}} = 15\text{dB} \Rightarrow F_k = 31.62$$

A csillapító "erősítése":

$$G_k = \frac{1}{L} = \frac{1}{31.62}$$

Vizsgáljuk meg először a kábel-erősítő együtttest:

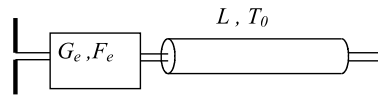


A (6.21.) alapján az eredő zajtényező: $F_{k \rightarrow e} = LF_e$ vagy dB-ben kifejezve:

$$F_{k \rightarrow e}^{\text{dB}} = L^{\text{dB}} + F_e^{\text{dB}} = 15 + 3 = 18\text{dB}$$

Általános szabály: Ha egy csillapító kapcsolódik egy átviteli elem elé, akkor az eredő zajtényező a csillapítással növekszik (a csillapító hőmérséklete 290 K).

A másik sorrendű összekapcsolásnál (6.22.):



$$F_{e \rightarrow k} = F_e + \frac{F_k - 1}{G_e} = 1.995 + \frac{31.62 - 1}{100} = 2.301 \Rightarrow 3.6\text{dB}$$

Következtetés: A kábel csillapítása által okozott zajtényező növekedést már nem lehet kiszajú erősítővel sem kompenzálni.

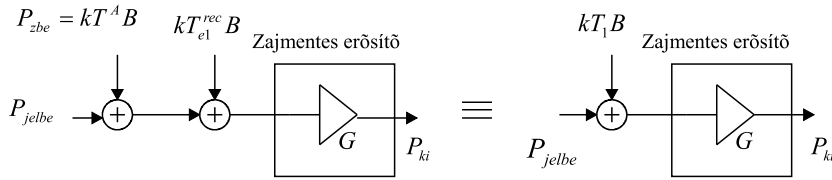
2.4. Példa: Az antennakábel hatása a zajhőmérsékletre

Mekkora romlást okoz az eredő zajhőmérsékletben az antennát és az előerősítőt összekötő 1 dB csillapítású, 290 K hőmérsékletű kábel, ha az antenna saját zajhőmérséklete 20 K? Az előerősítő bemenetétől mérve a vevő zajtényezője 0.5 dB. Adjuk meg a romlást dB-ben!

MEGOLDÁS

A vevő (receiver) zajtényezője: $F_{rec} = 10^{0.05} = 1.122$. Az összekötő kábel nélküli esetben a vevő bemenetre redukált zajhőmérséklete:

$$T_{e1}^{rec} = T_0 (F_{rec} - 1) = 290 (1.122 - 1) = 35.39 K^0$$



2.1. ábra. A kábel és az erősítő zajának modellezése

Az antenna T^A zajhőmérséklete összeadódik a vevő (bemenetre redukált) T_{e1}^{rec} zajhőmérsékletével:

$$T_1 = T^A + T_{e1}^{rec} = 20 + 35.39 = 55.39 K^0$$

A kábel beiktatásával (az előző példa alapján) a rendszer zajtényezője a kábel csillapításával romlik: 1.5 dB-el növekszik.

$$F_k^{rec} = L F_{rec} = 10^{\frac{0.5+1.5}{10}} = 10^{0.15} = 1.413$$

Ebben az esetben a kábel bemenetére redukált zajhőmérséklet:

$$T_{e2}^{rec} = T_0 (F_k^{rec} - 1) = 290 (1.413 - 1) = 119.8 K^0$$

Az eredő hőmérséklet:

$$T_2 = T^A + T_{e2}^{rec} = 20 + 119.8 = 139.8 K^0$$

A kábel beiktatása miatt a romlás így:

$$10 \lg \frac{T_2}{T_1} = 10 \lg \frac{139.8}{55.39} = 4 \text{ dB}$$

2.5. Példa

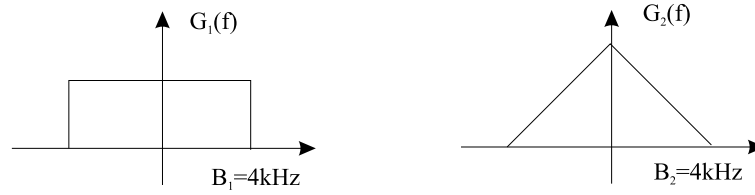
Adott egy antenna, melynek tövébe elhelyezünk egy előerősítőt (átvitele: $G_1(f)$), melyet ideális kábellel kötünk össze a vevőkészülék erősítőjével (átvitele: $G_2(f)$).
Adatok:

Zajtényezők: $F_1 = 10$; $F_2 = 3$

Antenna zajhőmérséklete: $T = 300K$

Erősítések: $G_1(0) = 3$; $G_2(0) = 4$

Mekkora lesz a vevőerősítő kimenetén a zajteljesítmény?



MEGOLDÁS

Először az erősítők effektív sávszélességét kell kiszámolni, majd a zajtényezőket átváltjuk redukált bemenetre redukált zajhőmérsékletre. Az előerősítőre:

$$B^{(1)} = \frac{1}{G_1(0)} \int_0^\infty G_1(f) df = \frac{1}{G_1(0)} G_1(0) B_1 = B_1$$

$$T_{red1} = (F_1 - 1) T_0$$

A vevőerősítőre:

$$B = B^{(2)} = \frac{1}{G_2(0)} \int_0^\infty G_2(f) df = \frac{1}{G_2(0)} \frac{G_2(0) B_2}{2} = \frac{B_2}{2}$$

$$T_{red2} = (F_2 - 1) T_0$$

Most kiszámítjuk az előerősítő kimenetén megjelenő zajt:

$$P_{zki1} = G_1(0) k(T + T_{red1}) B^{(1)} = 4.82 \cdot 10^{-16} W$$

és így már kiszámítható a vevőerősítő kimeneti zaja is:

$$P_{zki2} = G_2(0) P_{zki1} + G_2(0) k(T_{red2}) B^{(2)} = 5.46 \cdot 10^{-16} W$$

$$P_{zki} = P_{zki2} = 5.46 \cdot 10^{-16} W$$

2.6. Példa

Ha az antenna és a vevőkészülék közé egy L csillapítású, szobahőmérsékletű levezető kábelt iktatunk, a vevő kimenetén a jel-zaj viszony megváltozik. Vezesse le a jel-zaj viszony képletét! Az antenna-látta háttér zajhőmérséklete T_A , a szobahőmérséklet T_0 , a vevő zajtényezője F , csillapítás nélkül a jel-zaj viszony ϱ .

MEGOLDÁS

Először kiszámoljuk a csillapító és a vevő együttes zajtényezőjét: LF . Az antenna talppontjára redukált zajhőmérséklet így összességében:

$$T_A + T_0(LF - 1)$$

Csillapító nélkül ugyanez a zajhőmérséklet:

$$T_A + T_0(F - 1)$$

volna. A jel-zaj viszony így:

$$\varrho_L = \varrho \frac{T_A + T_0(F - 1)}{T_A + T_0(LF - 1)}$$

2.7. Példa

Analóg, vezetékes távközlési rendszerekben L csillapítású, szobahőmérsékletű kábel-szakaszok csillapítását $G = L$ (teljesítmény)erősítésű erősítőkkel kompenzálják.

a.) Hány kábelszakaszból állhat az összeköttetés, ha az 1 mW teljesítményű, 2 MHz sávzélességű hasznos jelre vonatkozóan 60 dB jel-zaj viszonyt kell az összeköttetés végpontjain biztosítanunk (feltéve, hogy zajt csak a kábel okoz, és $L = 30$ dB)?

b.) Mi a válasz az előző kérdésre, ha az erősítők zajtényezője nem 0 dB, hanem 12 dB?

MEGOLDÁS

A kábel-erősítő együttesek erősítése 1, láncuk erősítése szintén 1, tehát a kimeneti zaj megegyezik a bemenetre redukálttal. A jel-zaj viszonyból kiszámolható a bemenetre redukált eredő zaj hőmérséklete:

$$kT_e B = \frac{P_{jel}}{\varrho} = 10^{-3} \cdot 10^{-6} \text{ W} \implies T_e \simeq 36 \cdot 10^9 \text{ K}$$

Az így meghatározott eredő zajhőmérséklet másrésről viszont $T_e = nT_{egytag}$, ahol n az erősített szakaszok száma, továbbá egyetlen erősített szakasz eredő redukált zajhőmérséklete: $T_{egytag} = T_0(LF - 1)$.

a.) Az ideális erősítő ($F = 0$ dB) viszonzyszámban $F = 1$, és így $T_{egytag} = \dots = 2.93 \cdot 10^5 \implies n \simeq 122\,860$. Vagyis ideális erősítő esetén rendkívül sok fokozat egymásután kapcsolható a jel-zaj viszony lényeges romlása nélkül.

b.) $F = 12$ dB-t arányra kell váltani a $10 \log F = F^{dB}$ szabály szerint (hiszen teljesítményekről van szó); ezek szerint $F=16$. Ekkor $n = 7\,679$, ez is éppen elég sok.

3. fejezet

Lineáris moduláció

3.1. Példa: Stacionárius jel AM-DSB modulációja

Legyen az alapsávi $\xi(t)$ (legalább gyengén) stacionárius jel, melynek várható értéke:

$$E[\xi(t)] = 0 \quad (3.1)$$

teljesítménye:

$$\sigma_\xi^2 = E[\xi^2(t)] = R_\xi(0) \quad (3.2)$$

az autokorrelációs függvénye:

$$R_\xi(t) = E[\xi(t + \tau)\xi(t)] \quad (3.3)$$

spektrális teljesítménysűrűség függvénye:

$$s_\xi(f) = \mathcal{F}\{R_\xi(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (3.4)$$

Az amplitúdómodulált jel:

$$\mu(t) = U_c [1 + m\xi(t)] \cos(\omega_c t + \varphi_0) \quad (3.5)$$

Ahol: U_c a vivőhullám (carrier) amplitúdója, m a modulációs mélység (modulációs index), $\omega_c = 2\pi f_c$ a vivőhullám körfrekvenciája (rad/sec), φ_0 a vivőhullám véletlenszerű kezdő fázisa, melyről feltételezzük, hogy a $[-\pi, +\pi]$ intervallumban egyenletes eloszlású és független a $\xi(t)$ jeltől.

Határozzuk meg:

- a modulált jel spektrális teljesítménysűrűség függvényét, valamint
- a hatásfokot, (a hasznos jeltartalom és a teljes jel teljesítményének hányadosát)!

MEGOLDÁS

Először az autokorrelációs függvényt határozzuk meg, melynek a Fourier-transzformáltja a keresett függvény. A modulált jel autokorrelációs függvénye (definíció szerint):

$$\begin{aligned}
 R_\mu(\tau) &= \mathbb{E}[\mu(t+\tau)\mu(t)] = \\
 &= U_c^2 \mathbb{E}[\cos(\omega_c(t+\tau) + \varphi_0) \cos(\omega_c t + \varphi_0)] + \\
 &+ U_c^2 m^2 \mathbb{E}[\xi(t+\tau)\xi(t) \cos(\omega_c(t+\tau) + \varphi_0) \cos(\omega_c t + \varphi_0)] + \\
 &+ U_c^2 m \mathbb{E}[\xi(t+\tau) \cos(\omega_c(t+\tau) + \varphi_0) \cos(\omega_c t + \varphi_0)] + \\
 &+ U_c^2 m \mathbb{E}[\xi(t) \cos(\omega_c(t+\tau) + \varphi_0) \cos(\omega_c t + \varphi_0)]
 \end{aligned}$$

Mivel φ_0 független $\xi(t)$ -től, a szorzat várható értéke a várható értékek szorzata:

$$\begin{aligned}
 R_\mu(\tau) &= U_c^2 \mathbb{E}[\cos(\omega_c(t+\tau) + \varphi_0) \cos(\omega_c t + \varphi_0)] + \\
 &+ U_c^2 m^2 \mathbb{E}[\xi(t+\tau)\xi(t)] \mathbb{E}[\cos(\omega_c(t+\tau) + \varphi_0) \cos(\omega_c t + \varphi_0)] + \\
 &+ U_c^2 m \mathbb{E}[\xi(t+\tau)] \mathbb{E}[\cos(\omega_c(t+\tau) + \varphi_0) \cos(\omega_c t + \varphi_0)] + \\
 &+ U_c^2 m \mathbb{E}[\xi(t)] \mathbb{E}[\cos(\omega_c(t+\tau) + \varphi_0) \cos(\omega_c t + \varphi_0)]
 \end{aligned}$$

Számítsuk ki először a koszinuszos tényezők várható értékét:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\cos(\omega_c(t+\tau) + \varphi_0) \cos(\omega_c t + \varphi_0)] &= \frac{1}{2} \mathbb{E}[\cos(2\omega_c t + \omega_c \tau + 2\varphi_0) + \cos(\omega_c \tau)] \\
 &= \frac{1}{2} \cos(\omega_c \tau)
 \end{aligned}$$

Mivel φ_0 sűrűség függvénye a $[-\pi, +\pi]$ intervallumban $\frac{1}{2\pi}$:

$$\mathbb{E}[\cos(2\omega_c t + \omega_c \tau + \varphi_0)] = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(2\omega_c t + \omega_c \tau + x) dx = 0 \quad (3.6)$$

A (3.1) szerint az alapsávi jel várható értéke zérus, ezért a (??)-ben a harmadik és a negyedik tag zérus lesz. Ezzel a modulált jel autokorrelációs függvénye:

$$R_\mu(\tau) = \frac{U_c^2}{2} [1 + m^2 R_\xi(\tau)] \cos(\omega_c \tau) \quad (3.7)$$

A vivőhullámhoz tartozó tag:

$$R_c(\tau) = \frac{U_c^2}{2} \cos(\omega_c \tau) \quad (3.8)$$

Ennek Fourier-transzformáltja:

$$s_c(f) = \mathcal{F}\{R_c(\tau)\} = \frac{U_c^2}{4} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] \quad (3.9)$$

A (8.11.) és a (3.8) transzformált-pár kapcsolatát fordított irányban láthatjuk be egyszerűbb módon:

$$\begin{aligned}
 R_c(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}\{s_c(f)\} = \\
 &= \frac{U_c^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] e^{j2\pi f\tau} df = \\
 &= \frac{U_c^2}{4} [e^{j2\pi f_c\tau} + e^{-j2\pi f_c\tau}] = \frac{U_c^2}{2} \cos(\omega_c\tau)
 \end{aligned}$$

Itt a Dirac-delta függvény alábbi tulajdonságait használtuk fel:

$$\delta(x) = 0 \quad \text{ha} \quad x \neq 0 \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

A (3.7) második tagjának Fourier-transzformáltja:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{R_\xi(\tau) \cos(\omega_c\tau)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau) \frac{e^{j2\pi f_c\tau} + e^{-j2\pi f_c\tau}}{2} e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau) e^{-j2\pi(f-f_c)\tau} d\tau + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau) e^{-j2\pi(f+f_c)\tau} d\tau = \\
 &= \frac{1}{2} [s_\xi(f - f_c) + s_\xi(f + f_c)]
 \end{aligned}$$

Ezzel az amplitúdó modulált jel spektrális teljesítménysűrűség függvénye:

$$s_\mu(f) = \frac{U_c^2}{4} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c) + m^2 s_\xi(f - f_c) + m^2 s_\xi(f + f_c)] \quad (3.10)$$

A vivőhullámhoz tartozó teljesítmény:

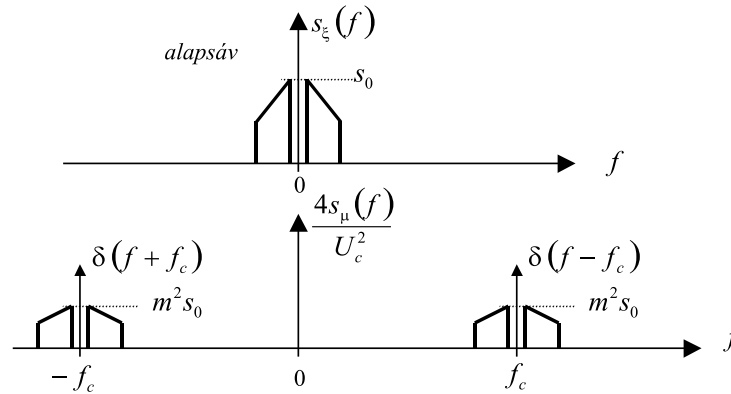
$$\sigma_c^2 = R_c(0) = \frac{U_c^2}{2} \quad (3.11)$$

A modulált jel összteljesítménye (3.7) alapján:

$$\sigma_\mu^2 = R_\mu(0) = \frac{U_c^2}{2} [1 + m^2 R_\xi(0)] \quad (3.12)$$

Ezzel a keresett hatásfok:

$$\eta = \frac{\sigma_\mu^2 - \sigma_c^2}{\sigma_\mu^2} = \frac{m^2 R_\xi(0)}{1 + m^2 R_\xi(0)} = \frac{m^2 \sigma_\xi^2}{1 + m^2 \sigma_\xi^2} \quad (3.13)$$



3.1. ábra. Az amplitúdó modulált jel spektrális teljesítménysűrűség függvénye

3.2. Példa: A Hilbert transzformátor és a komplex burkoló

A Fourier-transzformáció elméletéből ismert, hogy a valós $x(t)$ jel $X(f)$ Fourier-transzformáltjára fenn áll az:

$$X(-f) = X^*(f) \quad (3.14)$$

összefüggés, ahol a $*$ a komplex konjugálást jelöli. A (3.14) azt is jelenti, hogy a valós jeleknek a negatív frekvenciákon is van spektrális összetevőjük. Ezek alapján, ha olyan jelet kívánunk előállítani egy valós jelből, melynek *csak pozitív frekvenciákon* van zérustól eltérő *spektrális összetevője*, akkor annak a jelnek komplexnek kell lennie. A valós jelhez tehát keresnünk kell egy megfelelő imaginárius részt, hogy kívánalmunk fenn tudjon állni. A megfelelő képzetes részt a jel Hilbert transzformáltjának nevezzük. *Hilbert transzformátoron azt a lineáris, időinvariáns hálózatot értjük, melynek transzfer függvénye:*

$$H(f) = -j \operatorname{sgn}\{f\} = \begin{cases} -j & \text{ha } f > 0 \\ 0 & \text{ha } f = 0 \\ +j & \text{ha } f < 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

A valós $x(t)$ jelet egészítsük ki az $y(t)$ Hilbert transzformáltjával, mint képzetes résszel ($y(t)$ valós!):

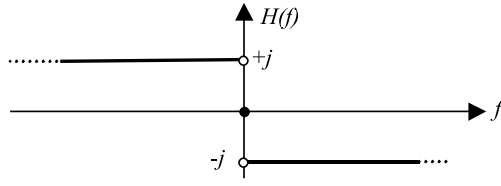
Az így nyert $z(t)$ komplex jelet az eredeti $x(t)$ jel *komplex burkolójának* nevezzük.

A frekvencia tartományban leírva a fenti műveletet:

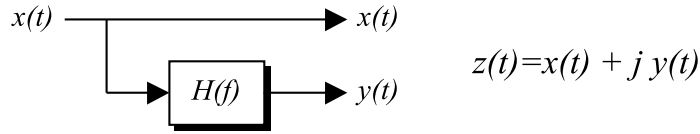
$$Z(f) = \mathcal{F}\{z(t)\} = \mathcal{F}\{x(t) + jy(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)\} + j\mathcal{F}\{y(t)\} = X(f) + jY(f) \quad (3.16)$$

ahol

$$Y(f) = H(f)X(f) \quad (3.17)$$



3.2. ábra. A Hilbert-transzformátor transzfer függvénye



3.3. ábra. A komplex-burkoló előállítás

Ezzel

$$Z(f) = X(f) + jH(f)X(f) = [1 + jH(f)]X(f) \quad (3.18)$$

A valós bemenetű, komplex kimenetű (valójában két valós kimenetű) hálózat transzfer függvénye:

$$G(f) = 1 + jH(f) = 1 + j(-j)\text{sign}(f) = 1 + \text{sgn}\{f\} \quad (3.19)$$

A (3.19) kifejtve:

$$G(f) = \begin{cases} 0 & \text{ha } f < 0 \\ 1 & \text{ha } f = 0 \\ 2 & \text{ha } f > 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

A (3.18) alapján:

$$Z(f) = G(f)X(f) = \begin{cases} 2X(f) & \text{ha } f > 0 \\ 0 & \text{ha } f < 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

Legyen most $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$. Határozzuk meg ennek a jelnek az $y(t)$ Hilbert transzformáltját és a $z(t)$ komplex burkolóját! Ennek a jelnek az $X(f)$ spektruma (lásd: (3.9)):

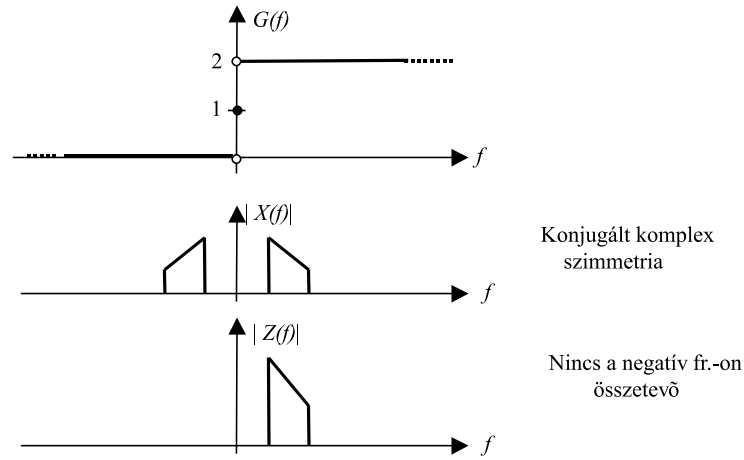
$$X(f) = \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \quad (3.22)$$

A Hilbert transzformált spektruma (3.15) alapján:

$$Y(f) = H(f)X(f) = \frac{1}{2j}\delta(f - f_0) - \frac{1}{2j}\delta(f + f_0) \quad (3.23)$$

A Hilbert transzformált időfüggvénye:

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\} = \quad (3.24)$$



3.4. ábra. A komplex-burkoló szemléltetése a frekvenciatartományban

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) e^{j2\pi ft} df = \\
 &= \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] e^{j2\pi ft} df
 \end{aligned}$$

Felhasználva a (8.15.)-öt, írhatjuk:

$$y(t) = \frac{1}{2j} [e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}] = \sin(2\pi f_0 t) \quad (3.25)$$

Tehát

$$\mathcal{H}\{\cos(\omega_0 t)\} = \sin(\omega_0 t) \quad (3.26)$$

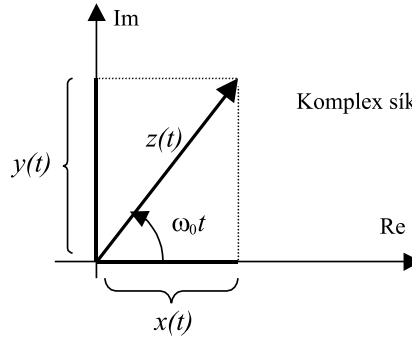
A komplex burkoló:

$$z(t) = x(t) + jy(t) = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t) = e^{j\omega_0 t} \quad (3.27)$$

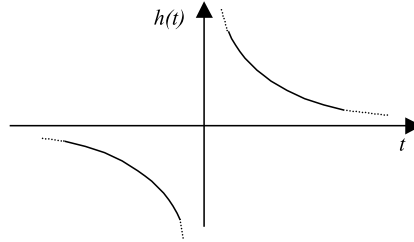
A (3.15)-ben definiált lineáris, időinvariáns hálózat súlyfüggvénye (a számítások mellőzésével):

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = \frac{1}{\pi t} \quad \forall t \quad (3.28)$$

A hálózat nem kauzális, tehát nem realizálható. A következő példában egy lehetséges realizálását mutatjuk meg a Hilbert transzformátornak.



3.5. ábra. A komplex-burkoló fázorábrája



3.6. ábra. A Hilbert-transzformátor súlyfüggvénye

3.3. Példa: A kauzális Hilbert transzformátor-pár

Legyen egy megvalósítható (lineáris, időinvariáns és kauzális) *aluláteresztő szűrő* súlyfüggvénye $h_0(t)$. Definiáljunk ennek segítségével két másik szűrőt, az alábbi módon:

$$h_c(t) = 2h_0(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad (3.29)$$

$$h_s(t) = 2h_0(t) \sin(2\pi f_0 t) \quad (3.30)$$

(Ha $h_0(t)$ kauzális ($h_0(t) \equiv 0$ ha $t < 0$), akkor $h_c(t)$ és $h_s(t)$ is kauzális lesz.) Az aluláteresztő átviteli függvénye:

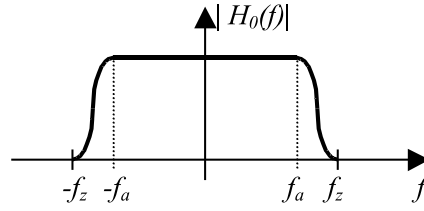
$$H_0(f) = \mathcal{F}\{h_0(t)\} = \int_0^{\infty} h_0(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (3.31)$$

Legyen:

$$|H_0(f)| = \begin{cases} \approx 1 & \text{ha } |f| < f_a \\ \approx 0 & \text{ha } |f| > f_z \end{cases} \quad (3.32)$$

Határozzuk meg a két szűrő átviteli függvényét és e két függvény hányadosát.

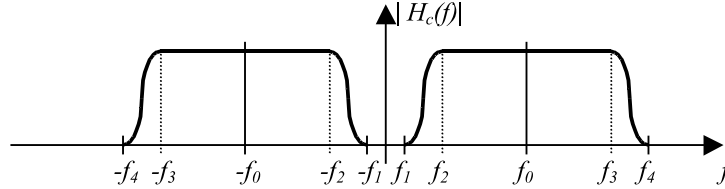
Tételezzük fel, hogy $f_0 > f_z$ (a szűrő zárótartományának kezdete).

3.7. ábra. A $H_0(f)$ aluláteresztő karakterisztika

MEGOLDÁS

$$\begin{aligned}
 H_c(f) &= \mathcal{F}\{h_c(t)\} = \\
 &= 2 \int_0^{\infty} h_0(t) \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} e^{-j2\pi f t} dt = \\
 &= \int_0^{\infty} h_0(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt + \int_0^{\infty} h_0(t) e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt = \\
 &= H_0(f-f_0) + H_0(f+f_0)
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Lerajzolva: (?? ábra)

ahol $f_1 = f_0 - f_z > 0$, $f_2 = f_0 - f_a$, $f_3 = f_0 + f_a$ és $f_4 = f_0 + f_z$.3.8. ábra. A $H_c(f)$ átviteli függvénye

A másik szűrő esetében hasonlóan eljárva:

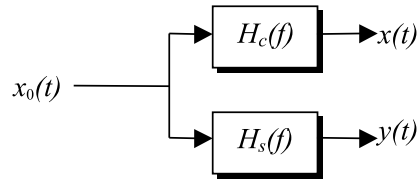
$$\begin{aligned}
 H_s(f) &= \mathcal{F}\{h_s(t)\} = \\
 &= 2 \int_0^{\infty} h_0(t) \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j} e^{-j2\pi f t} dt = \\
 &= \frac{1}{j} \int_0^{\infty} h_0(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt - \frac{1}{j} \int_0^{\infty} h_0(t) e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt = \\
 &= -jH_0(f-f_0) + jH_0(f+f_0)
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

A keresett hányados:

$$Q(f) = \frac{H_s(f)}{H_c(f)} = \begin{cases} \frac{-jH_0(f-f_0)}{H_0(f-f_0)} = -j & \text{ha } f > 0 \\ \frac{-jH_0(f+f_0)}{H_0(f+f_0)} = +j & \text{ha } f < 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

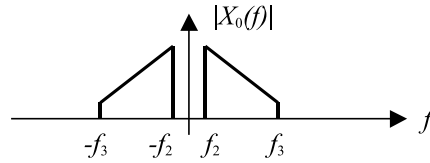
Mivel $H_0(f+f_0) \approx 0$ ha $f > 0$ és $H_0(f-f_0) \approx 0$ ha $f < 0$.

A $H_s(f)$ és $H_c(f)$ szűrők tehát Hilbert-transzformátor szűrőpárt alkotnak.



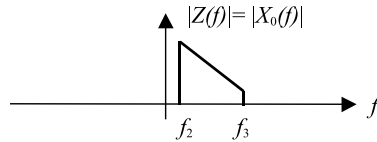
3.9. ábra. Megvalósítható Hilbert-transzformátor szűrőpár

Legyen az $x_0(t)$ spektruma sáváteresztő jellegű az alábbi ábra szerint: Ekkor a



3.10. ábra. Az $x_0(t)$ spektruma

$z(t) = x(t) + jy(t)$ komplex jel spektruma az előzőek alapján: Vegyük észre, hogy



3.11. ábra. Az $x(t) + jy(t)$ komplex jel spektruma

a szűrők véges szélességű átmeneti tartományainak következtében, a Hilbert transzformáltat csak sáváteresztő jellegű spektrum esetén tudjuk előállítani ($f_2 > 0$).

3.4. Példa: AM-SSB moduláció

A 8.1. példában szereplő AM-DSB modulációnál láttuk, hogy a vivőhullám mellett mind a két oldalsáv megjelent a modulált jelben (lásd a 8.1. példa ábráját). Ha csak az egyik oldalsávot kívánjuk kisugározni, kézenfekvő ötlet lenne az, hogy az AM-DSB

jelet engedjük át egy keskenysávú szűrőn, megszabadulva ezzel a vivőhullámtól és a másik oldalsávtól.

Kielégítő szűrést azonban csak igen meredek levágású (magas fokszámú) szűrővel tudnánk elérni, mivel a még áteresztetni kívánt frekvenciatartomány relatíve nagyon közel van a vivőhullámhoz. Egy szűrő fokszámát a relatív sáv szélessége határozza meg: minél kisebb az átmenet tartomány-sávközépfrekvencia viszonya, annál költségesebb a szűrő.

A szükséges szűréseket ezért lehetőleg az alapsávban érdemes elvégezni, ahol a fenti viszony jóval nagyobb, ezért a szűrők lényegesen egyszerűbbek lehetnek.

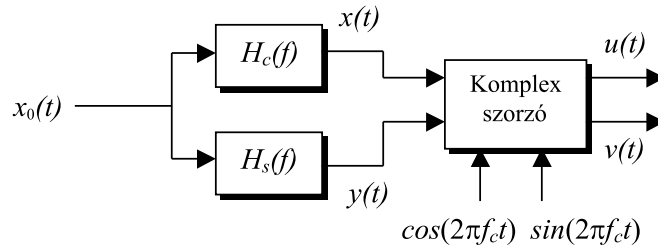
Az AM-SSB modulátor szokásos megvalósítása ezért alapsávi Hilbert-pár szűrőkből és egy kétfázisú keverőből áll.

A 8.3.példa példa eredményeit használva, a bemenő jelből állítsuk elő az $x(t)$ és az $y(t)$ jeleket egy Hilbert szűrőpárral. A komplexnek tekintett

$$z(t) = x(t) + jy(t) \quad (3.36)$$

jelben (ahogy láttuk) az $y(t)$ képzetes rész Hilbert transzformáltja az $x(t)$ valós résznek.

A komplex $z(t)$ jelet szorozzuk meg a szintén komplex $e^{j2\pi f_c t} = \cos(2\pi f_c t) + j \sin(2\pi f_c t)$



3.12. ábra. A Hilbert-transzformált előállítás

$j \sin(2\pi f_c t)$ jellel!

$$\begin{aligned} w(t) &= u(t) + jv(t) = z(t) e^{j2\pi f_c t} = \\ &= [x(t) + jy(t)] [\cos(2\pi f_c t) + j \sin(2\pi f_c t)] \end{aligned} \quad (3.37)$$

Kiírva a valós és képzetes részt:

$$u(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) - y(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (3.38)$$

$$v(t) = y(t) \cos(2\pi f_c t) + x(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (3.39)$$

Ezeknek a jeleknek a spektruma a (??)-hez hasonlóan:

$$U(f) = \frac{1}{2} [X(f - f_c) + X(f + f_c)] - \frac{1}{2} [-jY(f - f_c) + jY(f + f_c)] \quad (3.40)$$

átcsoportosítva az eredményt a pozitív és a negatív frekvenciákra eső jeltartalom szerint:

$$U(f) = \frac{1}{2} [X(f - f_c) + jY(f - f_c)] + \frac{1}{2} [X(f + f_c) - jY(f + f_c)] \quad (3.41)$$

A képzetes rész spektruma a (??) szerint:

$$V(f) = \frac{1}{2} [Y(f - f_c) + Y(f + f_c)] + \frac{1}{2} [-jX(f - f_c) + jX(f + f_c)] \quad (3.42)$$

$$V(f) = \frac{1}{2} [Y(f - f_c) - jX(f - f_c)] + \frac{1}{2} [Y(f + f_c) + jX(f + f_c)] \quad (3.43)$$

Egyszerűen belátható, hogy a keverés után kapott jel $v(t)$ jel Hilbert transzformáltja az $u(t)$ jelnek:

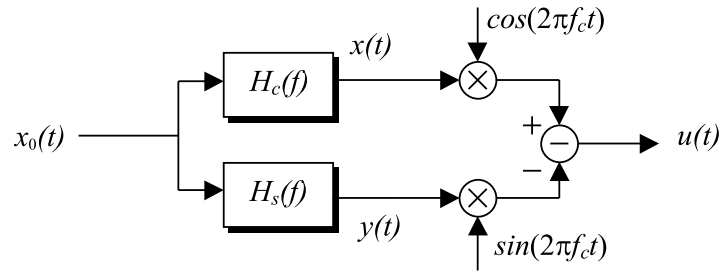
$$\mathcal{H}\{u(t)\} = v(t) \quad (3.44)$$

hiszen

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\{U(f)\} &= -j\text{sgn}\{f\} U(f) = \\ &= \frac{1}{2} [-j] [X(f - f_c) + jY(f - f_c)] + \frac{1}{2} [+j] [X(f + f_c) - jY(f + f_c)] = \\ &= \frac{1}{2} [Y(f - f_c) + Y(f + f_c)] + \frac{1}{2} [-jX(f - f_c) + jX(f + f_c)] = V(f) \end{aligned}$$

Ha csak az AM-SSB jel előállítása a célunk, akkor elegendő csak a valós részt előállítani (SSB modulátor):

Annak belátása, hogy $U(f)$ csak az egyik oldalsávot tartalmazza, vegyük figyelembe



3.13. ábra. Az AM-SSB előállítása

a (3.41)-ben, hogy:

$$Y(f) = -j\text{sgn}\{f\} X(f) \quad (3.45)$$

amiből:

$$Y(f - f_c) = -j\text{sgn}\{f - f_c\} X(f - f_c) \quad (3.46)$$

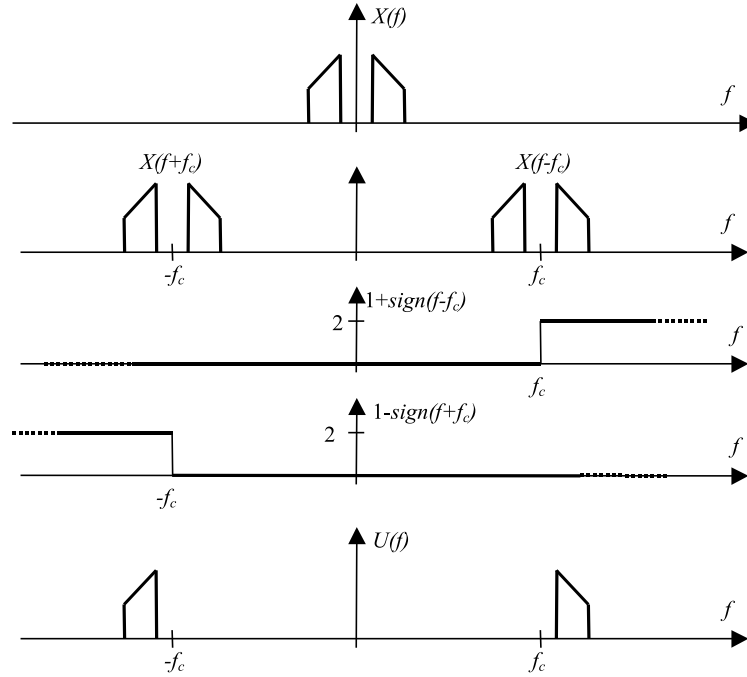
$$Y(f + f_c) = -j\text{sgn}\{f + f_c\} X(f + f_c) \quad (3.47)$$

Ezzel a kimenő jel spektruma:

$$U(f) = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{sgn}\{f - f_c\}] X(f - f_c) + \frac{1}{2} [1 - \operatorname{sgn}\{f + f_c\}] X(f + f_c) \quad (3.48)$$

A viszonyokat az alábbi ábráson követhetjük:

A fentebb lerajzolt modulátorral tehát a felső oldalsávot (**U**pper **S**ide **B**and, USB)



3.14. ábra. Az AM-SSB előállítása a frekvenciatartományban

választottuk ki. Ha a modulátorban az kivonó áramkört összeadó áramkörre cseréljük, akkor az alsó oldalsáv (**L**ower **S**ide **B**and, LSB) lesz a kimenő sáv. (Ennek bizonyítását az olvasóra bízunk.)

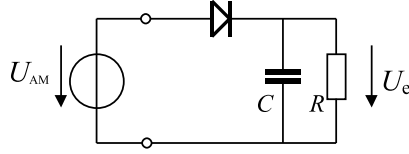
3.5. Példa: A burkoló detektor

Legyen az AM-DSB jel:

$$U_{AM} = [U_c + U_m \cos(\omega_m t)] \cos(\omega_c t) \quad (3.49)$$

Vezessük rá ezt a jelet egy ideális burkoló detektor áramkörre! (A generátor és a dióda belső ellenállása zérus.)

Rajzoljuk le a modulált jel spektrumát valamint az egyenirányító $U_e(t)$ kimenő feszültségének jelalakját! Milyen szempont szerint választaná meg az RC tag ($\tau = RC$) időállandóját?



3.15. ábra. A burkolódetektor

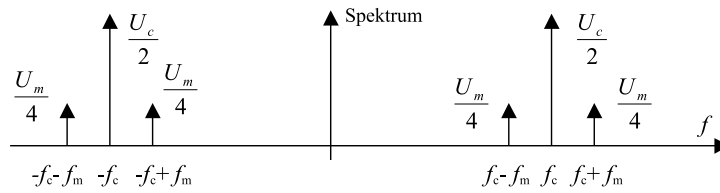
MEGOLDÁS

$$U_{AM} = [U_c + U_m \cos(\omega_m t)] \cos(\omega_c t) \quad (3.50)$$

$$= U_c \cos(\omega_c t) + \frac{U_m}{2} [\cos(\omega_c + \omega_m)t + \cos(\omega_c - \omega_m)t] = \quad (3.51)$$

$$= \frac{U_c}{2} [e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}] + \frac{U_m}{4} [e^{j(\omega_c + \omega_m)t} + e^{-j(\omega_c + \omega_m)t} + e^{j(\omega_c - \omega_m)t} + e^{-j(\omega_c - \omega_m)t}]$$

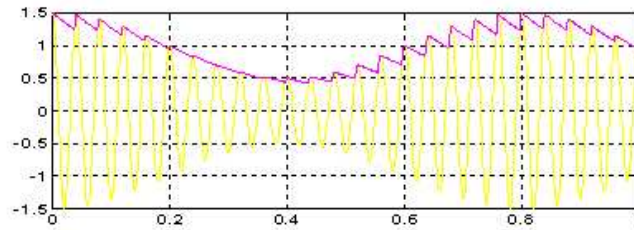
Ennek alapján a spektrum:

Azokban az időpillanatokban, amikor $U_{AM}(t) \geq U_e(t)$, akkor a dióda kinyit és a

3.16. ábra. A megoldás spektruma

kondenzátor feltöltődik $U_{AM}(t)$ értékre. Amikor $U_{AM}(t) < U_e(t)$ a dióda lezár, a kondenzátor feszültsége az RC tag időállandója szerint exponenciálisan csökken. A csökkenés addig tart, amíg a dióda újra ki nem nyit.

Ha az időállandó túlságosan nagy (az exponenciális lecsengés lassú), akkor a kimenő



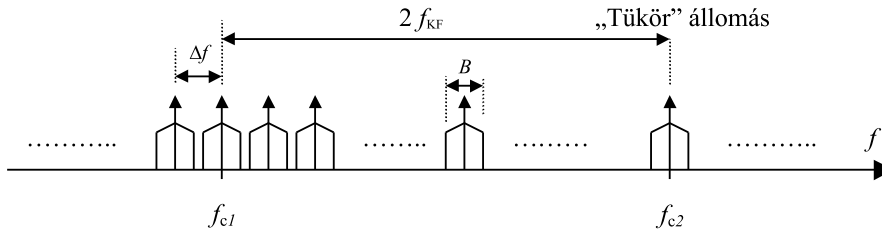
3.17. ábra. A burkolódetektorral demodulált jel időfüggvénye

jel nem tudja követni a modulált jel burkolóját. Ha túlságosan kicsi, akkor a járulékos „fűrész” jel lesz viszonylag nagy. A helyes érték az U_m/U_c modulációs mélység és az ω_m/ω_c viszony ismeretében méretezhető.

3.6. Példa: A szuper-heterodin elvű vevőkészülék

A rádiócsatornában az egyes állomások Δf távolságban helyezkednek el. A vevőkészülék szűrőjének már kellő csillapítást kell biztosítania a szomszéd állomás jelére (szelektivitás). Ugyanakkor ezt a szűrőt hangolni is kellene (állomás keresés).

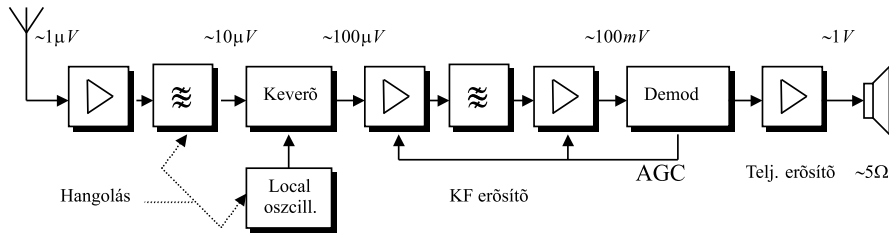
Kellő szelektivitású, hangolható szűrőt készíteni nem tudunk. Ezért a vevőben



3.18. ábra. A rádiósáv

a szűrési feladatot állandó frekvencia, az u.n. középfrekvencia (KF) környezetében végezzük el oly módon, hogy a venni kívánt állomás jelét a helyi (lokális) oszcillátor jelével a KF sávjába keverjük. A keverő szorzó típusú áramkör.

A bemenő jel f_{c1} környezetében lévő spektruma áthelyeződik a keverő kimenetén az



3.19. ábra. A szuper-heterodin készülék vázlata

összeg és különbségi frekvenciák tartományába. A helyi oszcillátor f_{osc} frekvenciáját úgy választjuk meg, hogy pld. az $f_{osc} - f_{c1} = f_{KF}$ különbségi frekvencia a középfrekvenciával egyezzen meg. A KF erősítő ezen frekvencia környezetében biztosítja a szelektív erősítést, míg az $f_{osc} + f_{c1} \neq f_{KF}$ összeg frekvencián nincs átvitel.

Az f_{KF} középfrekvencia viszont $f_{c2} - f_{osc} = f_{KF}$ és $f_{c3} + f_{osc} = f_{KF}$ képpen is ki tud keveredni, ami azt jelenti, hogy a készülék az f_{c2} és az f_{c3} frekvenciatartomány környezetét is erősíteni fogja. Az itt elhelyezkedő állomások az u.n. tükör állomások. A bemeneti fokozat hangolható szűrője ezeknek az állomásoknak az elnyomását szolgálja. A bemeneti szűrőnek tehát csak a $2f_{KF}$ frekvencia-távolságra lévő tükör adókra nézve kell megfelelő elnyomást (csillapítást) biztosítani (és nem a szomszédos állomásra!). Ilyen szűrőt hangolható kivitelben már meg tudunk valósítani.

Ha nagy KF frekvenciát választunk, a bemeneti szűrő feladatát könnyítjük meg, de a KF szűrő megvalósítása lesz nehezebb (kisebb lesz a relatív sávszélesség, ami a

fokszámot határozza meg).

Ennek a dilemmának a feloldására néha kétszeres transzponálást használunk, melynél az első KF a nagyobb, (a tükör állomások távolabb vannak, egyszerű a bemeneti szűrő) a második KF a kisebb frekvenciájú (ahol a szelektivitás a szomszédos adókra nézve könnyebben biztosítható).

4. fejezet

Mintavételezés és kvantálás

Manapság lassan kizárólagossá kezd válni a digitális információ továbbítás. Ugyanakkor az átviendő jelek zöme ma is folytonos természetű (beszéd, zene, kép, stb). A híradástechnika egyik legfontosabb feladata tehát arra a kérdésre válaszolni, hogyan lehet folytonos jeleket számsorozatokká alakítani úgy, hogy a vételi oldalon a számsorozatokból (kis hibával) újból elő lehessen állítani az eredeti folytonos jelet.

A feladat kettős: egyrészt a folytonos jelet időben kell diszkrétizálni, azaz adott időközönként megfigyelni az aktuális jelértéket. Ezt a lépést nevezzük mintavételezésnek. A fő kérdés: vajon milyen gyakorisággal kell a jelet mintavételezni ahhoz, hogy az eredeti folytonos jel visszaállítható legyen. Másrészt a diszkrét idejű számsorozat értékkészletét is diszkrétizálni kell, hiszen folytonos értékkészletű minták leírásához végtelen sok számjegyre van szükség. Ezt a kerekítést nevezzük kvantálásnak, így a minták véges hosszúságú számmal ábrázolhatóvá válnak.

4.1. Emlékeztető: Mintavételezett jelek rekonstrukciója

Legyen a folytonos idejű $x(t)$ abszolút integrálható jel. Ennek a spektruma $X(f)$:

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t), f\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (4.1)$$

Legyen ez a jel az f_h határfrekvenciára nézve sávhatárolt:

$$X(f) = \begin{cases} X(f) & \text{ha } |f| < f_h \\ 0 & \text{ha } |f| \geq f_h \end{cases} \quad (4.2)$$

Ha a jel sávhatárolt, akkor érvényes *Shannon mintavételi tétele*:

Az $|f| \leq f_h$ határfrekvenciára sávhatárolt $x(t)$ jel visszaállítható az nT diszkrét időpontokban vett $x(nT)$ mintáiból a következő képpen:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin(\pi(t - nT)f_s)}{\pi(t - nT)f_s} \quad (4.3)$$

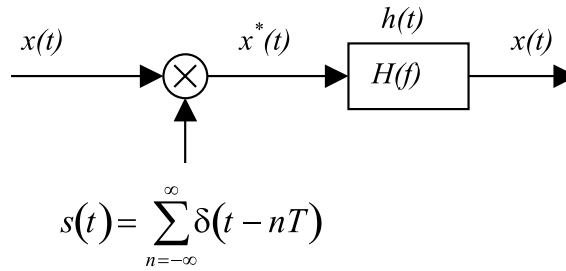
ahol f_s a mintavételi frekvencia és igaz, hogy

$$f_s = \frac{1}{T} \geq 2f_h \quad (4.4)$$

4.1.1. A mintavételi tétel értelmezése

A mintavételezés modellezése:

A mintavételezést matematikailag a következőképpen értelmezzük: (*-gal a min-



tavett jelet jelöljük)

$$x^*(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \quad (4.5)$$

A mintavételezést tehát egy T periódusidejű dirac-delta sorozattal való szorzásként értelmezzük (tulajdonképpen egyenletes időközönként "megjegyezzük" az aktuális jelértéket). A Shannon-féle mintavételi tétel arra ad útmutatást, milyen gyakorisággal kell a pillanatnyi jelértékeket felvennünk ahhoz, hogy csupán ezekből a mintákból visszailleszthető legyen az eredeti folytonos jel.

A jel rekonstruálása $h(t)$ impulzus válaszu szűrővel oldható meg:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau) h(t - \tau) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - nT) h(t - \tau) d\tau = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) h(t - nT) \end{aligned}$$

Itt a dirac-delta ($\delta(t)$) következő tulajdonságait használtuk fel: $\delta(t - t_0) \equiv 0$ ha $t \neq t_0$ és $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_0) f(\tau) d\tau = f(t_0)$.

Ebből a modelltől akkor jutunk a Shannon-féle mintavételi tételhez, ha a szűrő az $\frac{f_s}{2}$ határfrekvenciájú, *ideális aluláteresztő*:

$$H(f) = \begin{cases} T & \text{ha } |f| < f_s/2 \\ 0 & \text{ha } |f| \geq f_s/2 \end{cases} \quad (4.6)$$

Az ideális aluláteresztő impulzus válasza ugyanis

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-f_s/2}^{f_s/2} T e^{j2\pi ft} df = \frac{\sin(\pi f_s t)}{\pi f_s t} \quad (4.7)$$

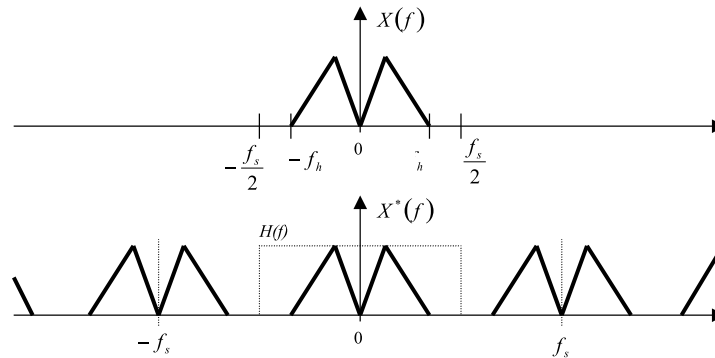
Ha $x^*(t)$ jelöli a matematikailag mintavételezett jelet, ennek spektruma:

$$\begin{aligned} X^*(f) &= \mathcal{F}\{x^*(t), f\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \exp(-j2\pi ft) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \exp(-j2\pi ft) dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \exp(-j2\pi ft) dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \exp(-j2\pi fnT) \end{aligned}$$

Amint látszik, a mintavett jel spektruma kifejezhető az időmintákkal (a diszkrét Fourier transzformáció definíciójára ismerhetünk rá):

$$X^*(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j2\pi fnT} \quad (4.8)$$

vagyis számsorozathoz rendeltünk spektrumot! Ugyanakkor a mintavett jel spekt-



4.1. ábra. A mintavételi tétel frekvenciatartományi alakjának szemléltetése

ruma (bizonyítás nélkül) kifejezhető a folytonos jel spektrumával is:

$$X^*(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_s) \quad (4.9)$$

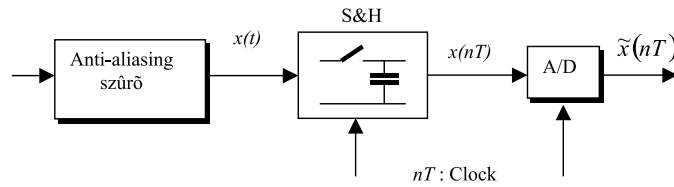
vagyis a mintavételezés hatására a folytonos jel spektruma periodikus lesz.

Fontos tanulság: A jel fenti rekonstrukciója csak akkor lehetséges, ha a jel *sávhatártartott*. Ellenkező esetben hamis (*alias*=ál) jelkomponensek jönnek létre a mintavételezés során. Ezt elkerülhetjük a mintavételezés előtt alkalmazott aluláteresztő (ú.n. *anti-aliasing*) szűrő használatával.

A gyakorlatban sajnos a fenti modell nem realizálható, mert

1. Nincs Dirac-delta generátorunk (végtelen impulzus amplitúdó)
2. Az ideális aluláteresztő nem realizálható (nem kauzális a hálózat)

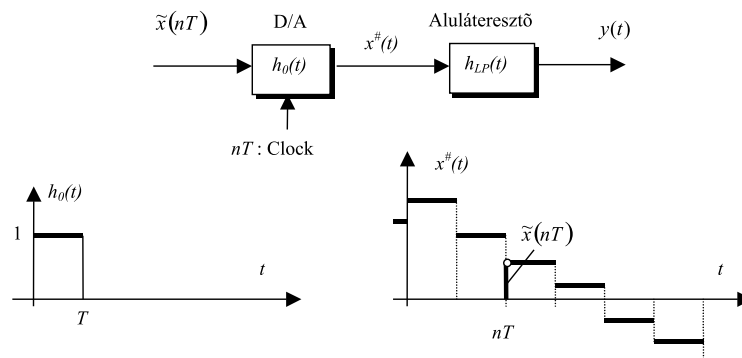
A valóságos mintavevő-tartó (Sampling&Hold) és A/D átalakító működésének vázlatja:



4.2. ábra. A valóságos mintavétel és AD átalakítás

A bemenet: az $x(t)$ folytonos idejű jel, a kimenet: az $\tilde{x}(nT)$ számsorozat (amplitúdóban diszkrét). A jel "tartására" az A/D átalakító működése miatt van szükség.

A valóságos rekonstrukció: A D/A konverter egy nulladrendű tartót (Zero Order Hold) valósít meg, melynek impulzus válasza (az egységnyi bemenő mintára adott válasz: $h_0(t)$).



4.3. ábra. A valóságos DA-átalakítás

A frekvencia tartományban a nulladrendű tartó átviteli függvénye:

$$\begin{aligned} H_0(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_0(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^T e^{-j2\pi ft} dt = \left[\frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \right]_0^T = \\ &= T e^{-j\pi f T} \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = T e^{-j\pi f T} \frac{\sin\left(\pi \frac{f}{f_s}\right)}{\pi \frac{f}{f_s}} \end{aligned}$$

Az eredő rekonstruáló aluláteresztő szűrő:

$$H_{er}(f) = H_0(f) H_{LP}(f) \quad (4.10)$$

Ha a $H_{LP}(f)$ aluláteresztő szűrő amplitúdó karakterisztikáját az alábbi összefüggés szerint igyekszünk kialakítani, akkor a korábbi modellben előírt eredő karakterisztikát kapjuk.

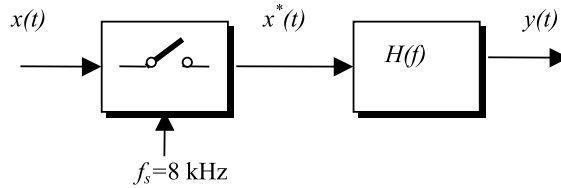
$$|H_{LP}(f)| = \begin{cases} \frac{T}{H_0(f)} & \text{ha } |f| < \frac{f_s}{2} \\ 0 & \text{ha } |f| \geq \frac{f_s}{2} \end{cases} \quad (4.11)$$

A valóságos szűrő zérustól eltérő fáziskarakterisztikája diszperziót okoz. Lineáris fáziskarakterisztika esetén a diszperzió jelképsíltetésnek felel meg. Valóságos esetben a jel rekonstruálás nem tökéletes, mert

1. A szűrő nem ideális (de, tetszőleges pontossággal közelíthető)
2. Az A/D konverzió az amplitúdót diszkrété teszi, emiatt kvantálási zaj keletkezik. (Az A/D konverter szóhosszúságának növelésével a zaj csökkenthető.)

4.2. Példa: szivárgás

Tekintsük az alábbi ábrán látható mintavételező rendszert! Ahol a rekonstruáló szűrő



4.4. ábra. Mintavételező rendszer sémája

zárótartománya nem tökéletes:

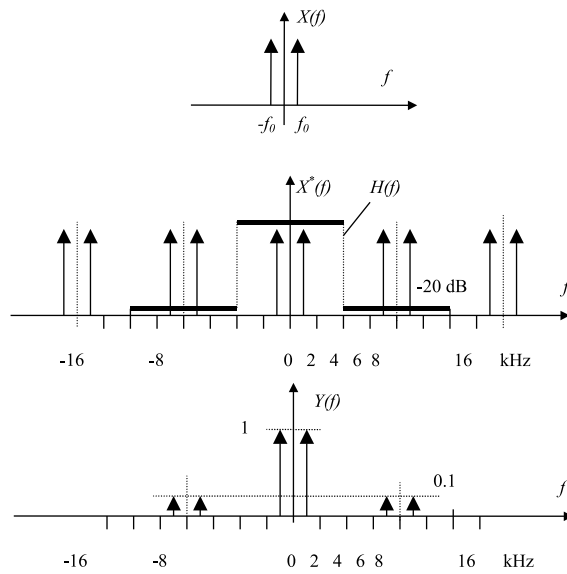
$$H(f) = \begin{cases} 0dB & \text{ha } |f| < 4kHz \\ -20dB & \text{ha } 4kHz \leq |f| < 12kHz \\ -\infty dB & \text{ha } |f| \geq 12kHz \end{cases}$$

Milyen lesz az $y(t)$ rekonstruált jel, ha a bemenő jel: $x(t) = U_0 \cos(2\pi f_0 t)$, és $U_0 = 2V$, $f_0 = 1kHz$, $f_s = 8kHz$?

MEGOLDÁS

$$x(t) = U_0 \cos(2\pi f_0 t) = \frac{U_0}{2} e^{+j2\pi f_0 t} + \frac{U_0}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$$

A mintavételezett jel spektruma az eredeti jel spektrumának a mintavételi frekvencia többszöröseivel eltolt változatainak szuperpozíciójaként kapható (magyarul a mintavételi frekvencia szerint periodikus lesz), ahogy ez a (4.2). ábrán látható. A kimenő jel a mintavett jel megszürt változata. Az időtartományban ugyanez:



4.5. ábra. Az eredeti, a mintavételezett és a rekonstruált jel spektruma

$$y(t) = U_0 \cos(2\pi f_0 t) + 0.1U_0 \cos[2\pi(f_s + f_0)t] + 0.1U_0 \cos[2\pi(f_s - f_0)t]$$

$$y(t) = U_0 \cos(2\pi f_0 t) + 0.2U_0 \cos(2\pi f_s t) \cos(2\pi f_0 t)$$

Megjegyzés: A -20 dB itt, mivel feszültségerősítésről van szó, 10-szeres csillapításnak felel meg.

4.3. Példa: átlapolódás

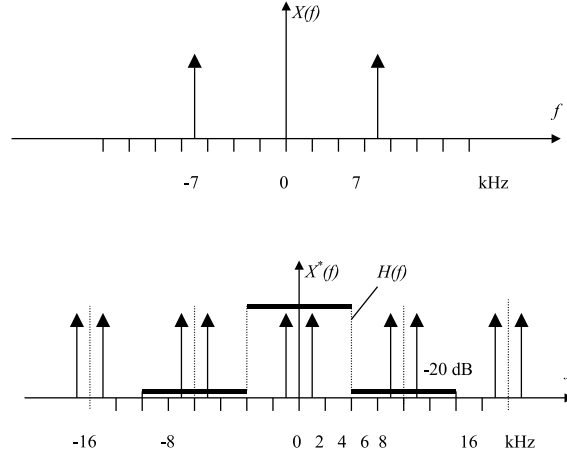
Az előző példában szereplő rendszerre vezessük rá az $x(t) = U_0 \cos(2\pi f_1 t)$ jelet, ahol most $U_0 = 2V$, $f_1 = 7kHz$, $f_s = 8kHz$! (Nem tartjuk be a Nyquist feltételt!) Mi lesz ebben az esetben a kimenő jel?

MEGOLDÁS

A mintavett jel spektruma (ahogy a (4.3). ábráról leolvasható) ugyanaz, mint az előző példában, tehát a kimenő jel is azonos lesz (1 kHz frekvenciájú fő komponens!):

$$y(t) = U_0 \cos(2\pi f_0 t) + 0.2U_0 \cos(2\pi f_s t) \cos(2\pi f_0 t)$$

ahol : $f_0 = 1 \text{ kHz}$.



4.6. ábra. Az eredeti és a mintavett jel spektruma

4.4. Példa: alulmintavételezés

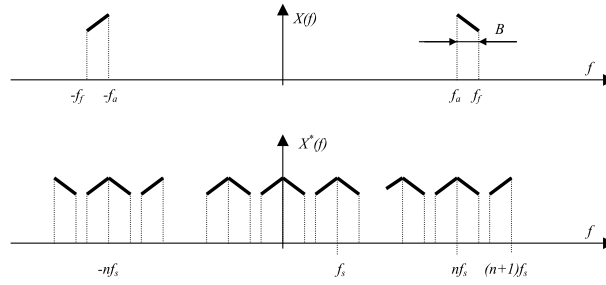
Legyen egy rádió vevőkészülék ú.n. középfrekvenciás kimenetén megjelenő jel spektruma a (4.4) ábra szerinti. Ezt a jelet digitalizálni kívánjuk, hogy egy digitális jelfeldolgozó processzorral további jelkezelést végezzünk rajta (pl. demoduláljuk). Milyen mintavételi frekvenciát válasszunk, hogy a legkisebb mintavételi frekvencia mellett a jel az alapsávba kerüljön?

$$f_a = 455 - 7.5 = 447.5 \text{ kHz} \quad f_f = 455 + 7.5 = 462.5 \text{ kHz} \quad B = f_f - f_a = 15 \text{ kHz}$$

MEGOLDÁS

Két dolgot kell teljesíteni: az első, hogy a jel az alapsávba kerüljön, azaz az f_a frekvencia a mintavételezés hatására megjelenjen a 0 helyen is. Vagyis: $nf_s = f_a$ ahol n egész. Másrésztől be kell tartani a mintavételi tételt, vagyis a mintavételi frekvenciára teljesülnie kell a $f_s \geq 2B$ feltételnek, méghozzá úgy, hogy minél jobban megközelítsük ezt az elvi alsó határt. Legyen első választásunk a minimálisan szükséges $f_{s0} = 2B = 30 \text{ kHz}$! Ekkor kiszámíthatóvá válik n , hiszen

$$n = \left\lfloor \frac{f_a}{f_{s0}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{447.5}{30} \right\rfloor = \lfloor 14.91166 \rfloor = 14$$



4.7. ábra. Az eredeti és a mintavett jel spektruma

Ezzel:

$$f_s = \frac{f_a}{n} = \frac{447.5}{14} = 31.96428 \text{ kHz}$$

4.5. Emlékeztető: az egyenletes kvantáló jel-zaj viszonya

Kvantálón azt a memória mentes nemlineáris egységet értjük, melynek y kimeneti értékei diszkrét és értékük csak a tetszőleges amplitúdójú x bemeneti minta pillanatnyi értékétől függ.

A kvantáló egyenletes, ha a kimeneti diszkrét értékek csak a q kvantálási lépcső egészszámu többszörösei lehetnek és az ugrások helyei q szerint változnak. Egy ilyen kvantálót definiál az alábbi összefüggés:

$$y = x + e = mq \quad \text{és} \quad -\frac{q}{2} \leq e < \frac{q}{2}$$

ahol m egész szám. Az alábbi ábrán (4.5) ezt a kapcsolatot rajzoltuk le, kiegészítve a telítési szakasszokkal, ahol a kvantáló túlvezérlődik. Túlvezérlés mentes esetben a véletlen változó jelek széles osztályára érvényes az a közelítés, hogy a kvantálási hiba korrelálatlannak tekinthető a kvantálandó jellel és egy additív fehér zajjal közelíthető a hatása. (4.5. ábra). A fenti karakterisztika esetén a zaj zérus várható értékű folyamat, melynek teljesítménye:

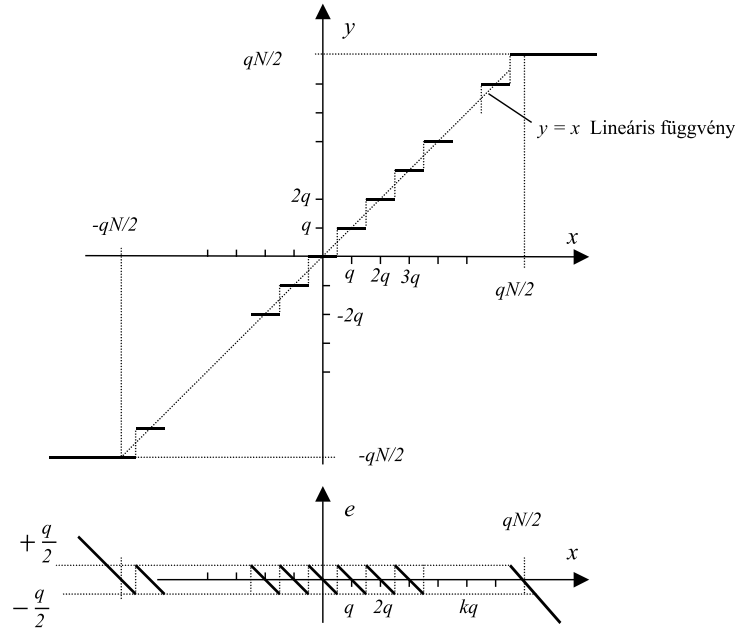
$$E[\varepsilon^2] = \frac{q^2}{12} \quad (4.12)$$

Az elérhető jel-zaj viszony a kvantálandó jeltől függ.

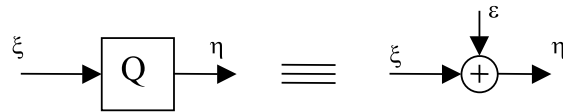
4.5.1. Kvantálási jel-zaj viszony egyenletes eloszlású bemenő jelre

Első példaként tekintsük egy olyan bemenő jelet, amelyik egyenletes eloszlású a $[-A, +A]$ intervallumban. Ennek sűrűség függvénye $1/(2A)$. A jel teljesítménye:

$$E[\xi^2] = \int_{-A}^A x^2 f_\xi(x) dx = \frac{1}{2A} \int_{-A}^A x^2 dx = \frac{A^2}{3} \quad (4.13)$$



4.8. ábra. Az egyenletes kvantáló karakterisztikája



4.9. ábra. A kvantálás legtöbbször additív fehér zajként modellezhető

Annak érdekében, hogy a túlvezérlést elkerüljük, teljesülnie kell az: $Nq = 2A$ kapcsolatnak, amiből:

$$\frac{A}{q} = \frac{N}{2} \quad (4.14)$$

Ezzel a jel-zaj viszony:

$$SNR = \frac{E[\xi^2]}{E[\delta^2]} = \frac{A^2}{3} \frac{12}{q^2} = 4 \left(\frac{A}{q} \right)^2 = 4 \left(\frac{N}{2} \right)^2 = N^2 \quad (4.15)$$

Ha a kvantált értéket b biten ábrázoljuk, akkor a lehetséges minták száma: $N = 2^b$. Ezt felhasználva: $SNR = 2^{2b}$ illetve

$$SNR^{[dB]} = 10 \lg SNR = 2b \lg 2 = 6.02b[\text{dB}]$$

4.5.2. Kvantálási jel-zaj viszony Gauss eloszlású bemenő jelre

Gauss-eloszlású bemenő jelre a túlvezérlésnek mindig véges valószínűsége van, mivel a jelben előfordulhatnak igen nagy pillanatértékek is. Jelöle A azt a pozitív amplitúdó

értéket, melynél a karakterisztika telítésbe megy.

$$A = q \frac{N}{2} \quad (4.16)$$

A túlvezérlődés valószínűsége:

$$p = P(|\xi| > A) = P(\xi \leq -A) + P(\xi > A) = 2P(\xi > A) = 2[1 - P(\xi \leq A)] \quad (4.17)$$

$$P(\xi \leq A) = F_\xi(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^A e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\left(\frac{A}{\sigma_\xi}\right)} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{A}{\sigma_\xi}\right) \quad (4.18)$$

Ahol $\Phi(x)$ a standard (egységnyi szórású) normális eloszlás eloszlásfüggvénye. Ezzel a túlvezérlés valószínűsége:

$$p = 2 \left[1 - \Phi\left(\frac{A}{\sigma_\xi}\right) \right] \quad (4.19)$$

Előírt valószínűség esetén:

$$\alpha_0(p) = \frac{A}{\sigma_\xi} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{p}{2}\right) \quad (4.20)$$

A túlvezérlés határa ezzel:

$$A = \frac{N}{2}q = \alpha_0(p)\sigma_\xi \quad (4.21)$$

amiből:

$$\frac{\sigma_\xi}{q} = \frac{N}{2\alpha_0(p)}$$

A maximálisan elérhető jel-zaj viszony:

$$SNR = \frac{E[\xi^2]}{E[\varepsilon^2]} = 12 \frac{\sigma_\xi^2}{q^2} = 12 \frac{N^2}{4\alpha_0^2(p)} = 3 \frac{2^{2b}}{\alpha_0^2(p)} \quad (4.22)$$

A dB-ben kifejezett érték

$$SNR^{[dB]} = 10 \lg SNR = 2b \lg 2 + 10 \lg \frac{3}{\alpha_0^2(p)} = 6.02b - \Delta(p) \quad (4.23)$$

Ahol:

$$\Delta(p) = 10 \lg \frac{\alpha_0^2(p)}{3} = 20 \lg \left[\Phi^{-1}\left(1 - \frac{p}{2}\right) \right] - 10 \lg 3 \quad (4.24)$$

Fontos, hogy a kvantáló kivezérlési tartományát tekintve illesztve legyen a bemenő jelhez. Ellenkező esetben gyakrabban lép fel túlvezérlés, vagy nem érjük el az elméletileg elérhető jel-zaj viszony értéket.

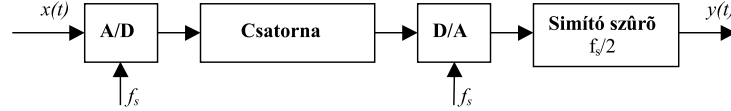
Az illesztés feltétele: a kvantáló telítési határát az

$$A = \sigma_\xi \alpha_0(p) = \sqrt{3} \sigma_\xi 10^{\frac{\Delta(p)}{20}} \quad (4.25)$$

értékre kell beállítani.

4.6. Példa

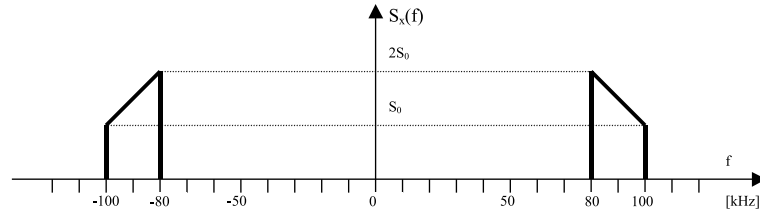
A gyengén stacionárius $x(t)$ jelet az alábbi ábrán látható (hibamentes) digitális csatornán kívánjuk átvinni. Az $x(t)$ jel teljesítmény sűrűség spektruma a 4.11. ábrán



4.10. ábra. Az átviteli rendszer

látható, ahol $S_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ V}^2/\text{Hz}$.

a) Rajzolja le az $y(t)$ kimenő jel spektrumát, ha az f_s mintavételi frekvencia:



4.11. ábra. Az $x(t)$ jel teljesítmény sűrűség spektruma

a1) 80 kHz; a2) 100 kHz; a3) 40 kHz. A rekonstruáló simító szűrő ideális aluláteresztő, $f_s/2$ határfrekvenciával.

b) Az A/D átalakítás okozta kvantálási zaj (az adott jelszint mellett) a digitális jelben 72 dB-es jel-zaj viszonyt eredményez. (A kvantálási zaj fehér zajnak tekinthető.) Mekkora lesz a kimenő jel jel-zaj viszonya?

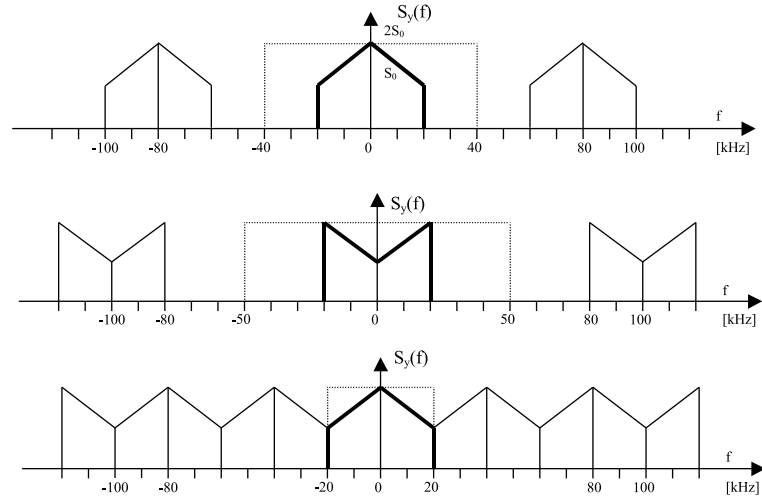
c) Ha az ideális bemenő jel mellett zaj is kerül a bemenetre, hogyan alakul a kimeneti jel-zaj viszony a fenti 3 mintavételi frekvencia esetén? A bemeneti zajról feltételezzük, hogy spektruma fehér a 60 kHz 120 kHz sávban, azon kívül zérus. A bemeneti jel-zaj viszony 60 dB.

MEGOLDÁS

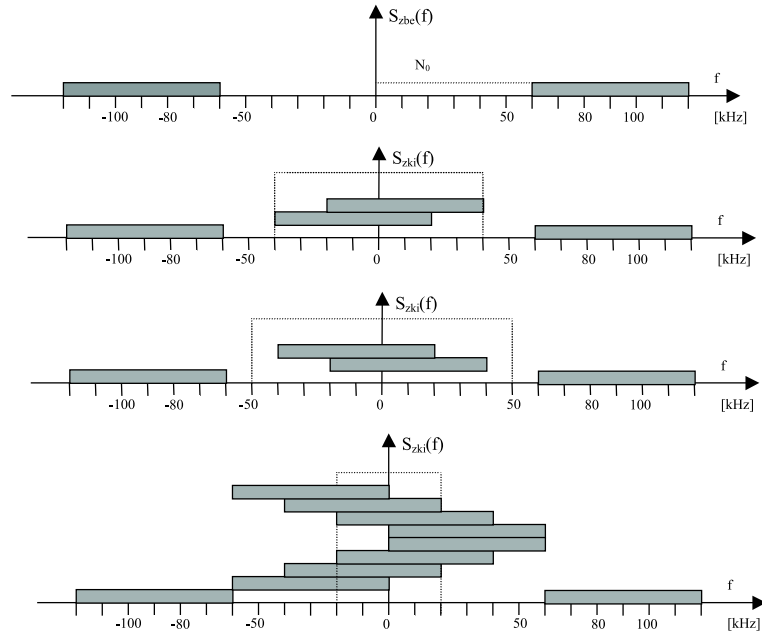
a) A mintavételezés hatására az eredeti (folytonos) jel spektruma f_s szerint periodikus lesz, amit az alábbi ábra szemléltet: b) A kvantálási zaj fehér, azaz egyenletes eloszlású a $[-f_s/2, +f_s/2]$ sávban és ez a simító szűrőn keresztül ki is jut a kimenetre, ezért a kimeneti jel-zaj viszony megegyezik a kvantálás jel-zaj viszonyával [72 dB=60+3+3+3+3dB].

$$SNR_{qki} = \frac{P_y}{P_{qki}} = \frac{P_x}{P_q} = SNR_q = 10^6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \cdot 10^6$$

$$P_{qki} = \frac{P_y}{SNR_q}$$



4.12. ábra. A mintavett jelek spektruma 80, 100 és 40 kHz mintavételezés esetén



4.13. ábra. A bemeneti zajspektrum és az AD-DA átalakítás utáni zajspektrumok 80, 100 és 40 kHz mintavételezés esetén

c) A bemeneti zajspektrum:

$$SNR_{be} = \frac{P_x}{P_{zbe}} = 10^6$$

$$P_{zbe} = \frac{P_x}{10^6} = N_0 \cdot 120kHz$$

c1) $f_s = 80\text{kHz}$ esete

$$P_{zki} = 2 \cdot N_0 \cdot 60\text{kHz} \frac{P_y}{P_x} = P_{zbe} \frac{P_y}{P_x} = \frac{P_y}{SNR_{be}}$$

$$SNR_{ki} = \frac{P_y}{P_{zki} + P_{yki}} = \frac{P_y}{\frac{P_y}{SNR_{be}} + \frac{P_y}{SNR_q}} = \frac{SNR_{be} \cdot SNR_q}{SNR_{be} + SNR_q} \approx 60\text{dB}$$

c2) $f_s = 100\text{kHz}$ esete:

A helyzet ugyan az mint az előző esetben.

c3) $f_s = 40\text{kHz}$ esete

$$P_{zki} = 6 \cdot N_0 \cdot 40\text{kHz} \frac{P_y}{P_x} = 240 \cdot N_0 \frac{P_x}{P_y} = 2 \cdot \frac{P_y}{SNR_{be}}$$

Az átlapolódásból adódó zaj most kétszerese az előző esetekhez képest.

$$SNR_{ki} = \frac{P_y}{P_{zki} + P_{yki}} = \frac{P_y}{2 \frac{P_y}{SNR_{be}} + \frac{P_y}{SNR_q}} = \frac{SNR_{be} \cdot SNR_q}{SNR_{be} + 2 \cdot SNR_q} \approx 57\text{dB}$$

4.7. Példa

Adott egy sávkorlátozott alapsávi jel a $[0, 4\text{kHz}]$ frekvenciatartományban

a) Mekkora mintavételi frekvenciát kell választanunk, ha a jel visszaállítására egy 180dB/D levágású meredekségű aluláteresztő szűrő áll rendelkezésre amelynek levágása a 4kHz-es frekvenciától kezdődik (a jel elnyomottnak tekinthető ha legalább 40dB csillapítást szenved).

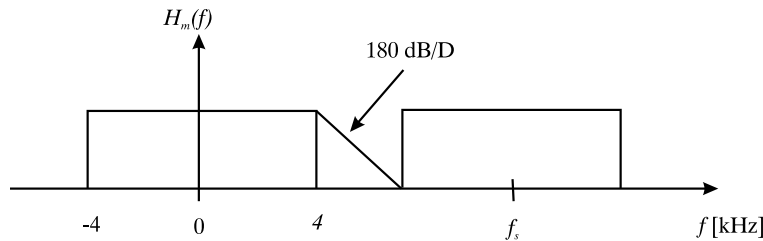
b) Mekkora a kvantálási jel-zaj viszony ha mintavételezés után egy 8 bites kvantálót alkalmazunk?

MEGOLDÁS

a)

$$H_m(f) = \sum_k H\left(f + \frac{k}{T}\right)$$

Ahhoz, hogy kellően elnyomjuk a mintavételezés miatt megjelenő spektrum-összetevőket,



4.14. ábra. A mintavett jel spektruma

akkora mintavételi frekvenciát kell választani, hogy ilyen komponensek csak a szűrő zárótartományában keletkezzenek:

$$f_m = 8 \text{ kHz} + \frac{40 \text{ dB}}{180 \text{ dB/D}} = 8 \text{ kHz} + 0.222 \text{ D} = 8 \text{ kHz} + 6.67 \text{ kHz} = 14.67 \text{ kHz}$$

Megjegyzés: a 0.222 dekád átváltása "frekvenciára":

$$\log_{10} \left(\frac{f}{4 \text{ kHz}} \right) = 0.222 \Rightarrow f = 6.67 \text{ kHz}$$

b) Használva az $SNR = \frac{3}{2} 2^{2n}$ formulát

$$SNR = 98304 \Rightarrow 49.95 \text{ dB}$$

Megjegyzés: a fenti formuláról és érvényességének korlátairól lásd e fejezet "Emlékeztető"-jét!

4.8. Példa

Egy 5 kHz mintavételi frekvenciával dolgozó mintavételező rendszer bemeneti és kimeneti szűrője azonos:

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{ha } |f| \leq 2 \text{ kHz} \\ 1.4 - |f/5| & \text{ha } 2 \text{ kHz} \leq |f| \leq 7 \text{ kHz} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

A rendszer az 1 kHz frekvenciájú szinuszos bemenő jelet amplitúdóhelyesen viszi át. Milyen jelösszetevők keletkeznek, ha a bemenet a következő:

$$u_{be}(t) = 2 \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_2 t)$$

A frekvenciák: $f_1 = 1 \text{ kHz}$; $f_2 = 2 \text{ kHz}$.

MEGOLDÁS

A bemeneten két koszinuszos összetevő szorzata van. (Ezt a két frekvencia arányától függően nevezhetjük keverésnek vagy modulációnak.) Az ismert addíciós összefüggéseket használva írható:

$$u_{be} = \cos(2\pi(f_1 + f_2)t) + \cos(2\pi(f_1 - f_2)t)$$

Vagyis azonos amplitudóval 1 és 3 kHz-es komponensek vannak a bemeneten. A bemeneti szűrő hatása:

- az 1 kHz-es összetevő amplitudója 1;
- a 3 kHz-es összetevő amplitudója $1.4 - 3/5 = 0.8$

A mintavételezés hatására a spektrum periodikussá válik a mintavételi frekvencia szerint, vagyis a mintavett jel összetevői: $n \cdot 5kHz \pm 1kHz$ ill. $n \cdot 5kHz \pm 3kHz$, vagyis esetünkben a kimeneti szűrő áteresztő ill. átmeneti tartományába eső komponensek: 1, 2, 3, 4, 6, 8 kHz-esek.

A kimeő szűrő az áteresztő sávjába eső komponenseket amplitúdóhelyesen viszi át, az átmeneti tartományba esőket csillapítja, illetve a zárótartományban tökéletes elnyomást biztosít. Így a kimenő jelben található komponensek amplitudója:

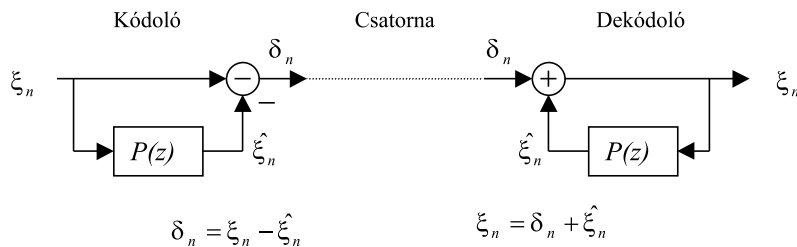
- 1 kHz-es: 1 V
- 2 kHz-es: $0.8 \cdot 1$ V
- 3 kHz-es: $0.8 \cdot 0.8$ V
- 4 kHz-es: $1 \cdot 0.6$ V
- 6 kHz-es: $1 \cdot 0.2$ V
- 8 kHz-es: 0 V

4.9. Prediktív kódolás

Legyen egy diszkrét idejű, véletlen változó, stacionárius forrás által szolgáltatott jel a zérus várható értékű ξ_n sorozat.

Tételezzük fel, hogy a ξ_n sorozat teljesítmény sűrűség spektruma „színes”. Ez azt jelenti, hogy az egyes minták nem függetlenek egymástól, vagyis a sorozatban redundancia van. (Van tehát a jelnek egy "előre látható" komponense, ami – mivel előre látható – információt nem hordoz.) Ha gazdaságosan kívánjuk a jel által hordozott információt továbbítani, akkor célszerű lenne ettől a redundanciától megszabadulni. Ez a gondolat veti fel a predikció kérdését.

Az n -ik mintavételi időpontban rendelkezésünkre áll a ξ_n folyamat múltja és a folyamat statisztikájának (autokorrelációs függvényének) ismerete. Ebből az ismeretből ha kiszámítanánk a $\hat{\xi}_n$ becsült értéket és csak a $\delta_n = \xi_n - \hat{\xi}_n$ különbségi jelet vinnénk át a csatornán, akkor várhatóan gazdaságosan járnánk el.



4.15. ábra. A predikciós kódolás alapötlete

A vételi oldalon a jel dekódolására ugyanazt a $P(z)$ prediktort használjuk. A kódoló és a dekódoló transzfer függvénye:

$$H_C(z) = 1 - P(z)$$

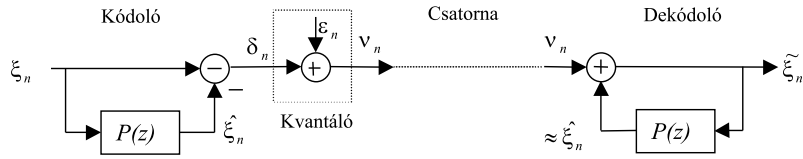
illetve

$$H_D(z) = \frac{1}{1 - P(z)}$$

A kódoló és a dekódoló eredő átviteli függvénye $H_E(z) = H_C(z) H_D(z) = 1$, ami a torzítás mentes átvitel feltétele.

Ha a csatorna digitális, az δ_n mintákat digitalizálni kell (véges szóhosszúságúvá, más szóval kvantálttá kell tenni). Ha már eleve digitális formátumú volt az δ_n minta, akkor gyakran az adattömörítés érdekében rövidebb szóhosszúságra kell áttérni, ami szintén kvantálást jelent. Ezért a vizsgálatot egészítsük ki a kvantáló hatásának vizsgálatával.

A kvantáló mint nemlineáris áramköri elem modellezhető egy additív független zajforrással (linearizált additív zajmodell). A linearizált modellben egy két bemenetű, egy kimenetű hálózatot látunk (a superpozíció elve érvényes).

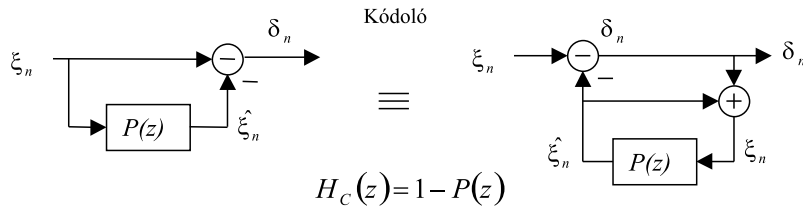


4.16. ábra. A predikciós kódoló linearizált zajmodellel

A jel-bemenetről a transzfer függvény „1” értékű, míg az ε_n zaj „bemenetről” $H_D(z)$ az átvitel. Ezen utóbi átvitel a kvantálási zaj értékét nagy mértékben felszorzozhatja a kimeneten, így a dekóderben a prediktor nem ugyanazon mintákat kapja a bemenetére mint a kódolóban lévő prediktor.

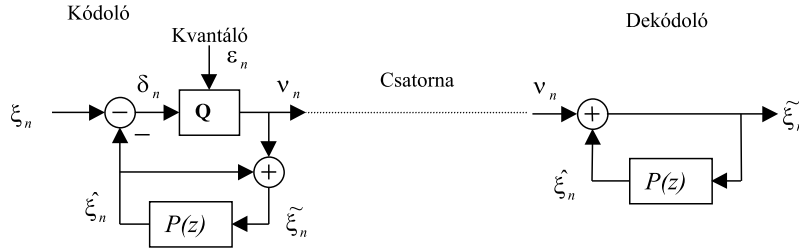
Ennek következtében a predikált jel sem lesz ugyanaz mint a kvantálási zaj nélküli esetben és ezért viszonylag nagymértékű torzításra (kimeneti zajra) számíthatunk.

A kvantáló fentebb leírt kellemetlen hatása kiküszöbölhető a kódoló megfelelő átalakításával. Könnyen belátható, hogy az átviteli függvény szempontjából az alábbi két hálózat ekvivalens:



4.17. ábra. A predikciós kódoló és ekvivalense

Helyezzük a kvantálót a kódolóban a különbség képző után! Ezzel az átalakítással a kódolási- dekódolási sémánk a következő lesz:

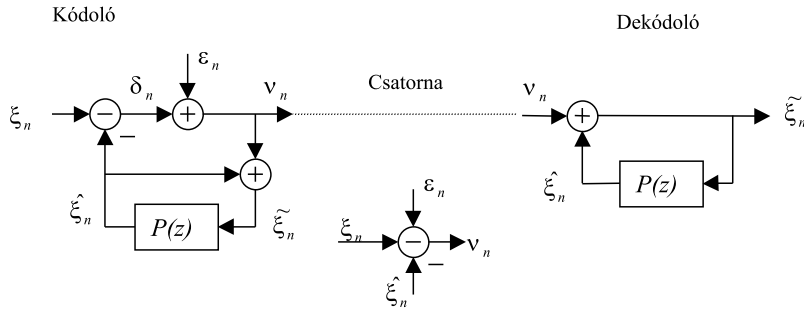


4.18. ábra. Javított predikciós kódoló

Továbbra is a különbségi jelet kvantáljuk, de most a dekódolóban a predikció ugyanabból a jeltől történik mint a kódolóban. Ennek következtében a zaj felszorzódása elmarad és így a ϱ_{ki} kimeneti jel-zaj viszony lényegesen nagyobb lesz a kvantáló ϱ_q jel-zaj viszonyánál.

A kódolás feladatát tipikusan egy jelfeldolgozó processzor végzi, ahol is a kvantálást úgy hajtjuk végre, hogy a $\delta_n = \xi_n - \hat{\xi}_n$ különbségi jelet kiszámítva a ν_n kimenő jelet kisebb szóhosszúságon mentjük el az akkumulátorból.

A fentebb említett kétbemenetű modellre hivatkozva beláthatjuk, hogy a „zaj-bemenetről” a transzfer függvény a módosított elrendezés esetében ugyan az, mint a jel-bemenetről ($H_e = 1$), ezért a kimeneti zaj megegyezik a keletkezés helyén lévő zajjal, amit az aditív modellben fehér zajnak tekintünk.



4.19. ábra. Az predikciós kódoló és dekódoló

A linearizált modellben a szuperpozíció elvét használva a kimeneti minta:

$$\tilde{\xi}_n = \xi_n + \varepsilon_n \quad (4.26)$$

A kimeneti jel-zaj viszony:

$$SNR_{ki} = \varrho_{ki} = \frac{E[\xi_n^2]}{E[\varepsilon_n^2]} \quad (4.27)$$

Vizsgáljuk meg azt a kérdést, hogy érdemes-e predikciós kódolást használni, illetve alkalmazásával mekkora nyereség érhető el! Ennek érdekében bővítsük (4.27)-at az alábbiak szerint!

$$SNR_{ki} = \varrho_{ki} = \frac{E[\xi_n^2]}{E[\varepsilon_n^2]} = \frac{E[\xi_n^2]}{E[\delta_n^2]} \frac{E[\delta_n^2]}{E[\varepsilon_n^2]} = G_P \varrho_q \quad (4.28)$$

Ahol G_P a predikciós nyereség:

$$G_P = \frac{E[\xi_n^2]}{E[\delta_n^2]} \quad (4.29)$$

és ϱ_q a kvantáló jel-zaj viszonya:

$$SNR_q = \varrho_q = \frac{E[\delta_n^2]}{E[\varepsilon_n^2]} \quad (4.30)$$

Ha nem használnánk predikciót és az üzenetet direkt módon kvantálnánk a kimeneti jel-zaj viszony a kvantáló jel-zaj viszonyával egyezne meg. Amennyiben a jelet jól tudjuk predikálni (előre jelezni) a $\delta_n = \xi_n - \hat{\xi}_n$ különbségi jel kicsi lesz ξ_n -hez képest, ami nagy predikciós nyereséget jelent.

Mielőtt az optimális prediktor kérdését megvizsgálunk, előre annyit mondhatunk, hogy a prediktor célja a redundancia kiszűrése volt a jelből. A redundancia mentes jel spektruma fehér, tehát a kódoló transzfer függvényének olyannak kell lennie, hogy a kódoló kimenő jele minél inkább közelítse a fehér folyamatot.

$$s_\nu(f) = \left| H_C \left(e^{j2\pi fT} \right) \right|^2 s_\xi(f) \approx const \quad (4.31)$$

Ha a bemenő jel már eleve fehér folyamat, akkor nincs predikciós nyereség.

4.9.1. Példa: Az optimális prediktor

Legyen ξ_n (legalább gyengén) stacionárius folyamat, melynek $R_\xi(k)$ autokorrelációs sorozata ismert.

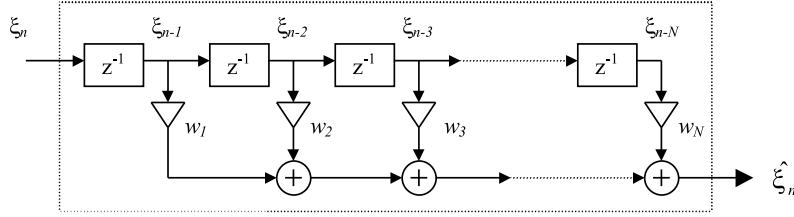
A prediktor a sorozat utolsó N mintájából becsülje az aktuálisan a bemenetre érkező mintát!

$$\hat{\xi}_n = \sum_{i=1}^N w_i \xi_{n-i} \quad (4.32)$$

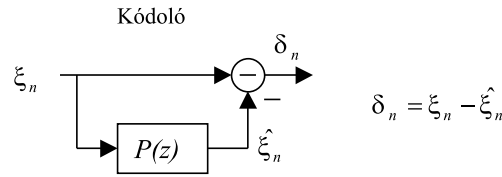
A becslés jóságát mérjük a $\delta_n = \xi_n - \hat{\xi}_n$ különbségi jel négyzetes várható értékével! Minél kisebb ez a várható érték, annál jobb a becslés.

A becslés hibája:

$$E[\delta_n^2] = E\left[(\xi_n - \hat{\xi}_n)^2\right] = E\left[\left(\xi_n - \sum_{i=1}^N w_i \xi_{n-i}\right)^2\right] \quad (4.33)$$



4.20. ábra. A lineáris prediktor



A számítások mellőzésével vektor-mátrix alakban (lásd az előadást):

$$E[\delta_n^2] = R_0 - 2\mathbf{w}^T \mathbf{r} + \mathbf{w}^T \mathbf{R} \mathbf{w} \quad (4.34)$$

ahol $\mathbf{w}^T = [w_1, w_2, \dots, w_k, \dots, w_N]$ a keresett együtthatókból alkotott (sor)vektor, $\mathbf{R}$ az $N \times N$ -es autokorrelációs mátrix:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} & & \\ & R_{i,j} & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0 & R_1 & R_2 \\ R_1 & R_0 & R_1 \\ R_2 & R_1 & R_0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

melyben

$$R_{i,j} = R_{i-j} = R_\xi(i-j) = R_\xi(j-i)$$

valamint $\mathbf{r}$ N dimenziós (oszlop)vektor, az autokorrelációs együtthatókkal

$$\mathbf{r}^T = [R_1, R_2, \dots, R_N] \quad (4.36)$$

Keressük azt a $\mathbf{w}$ vektort, amelyik minimalizálja a hibát. Az optimum feltétele:

$$\text{grad}_{\mathbf{w}} (R_0 - 2\mathbf{w}^T \mathbf{r} + \mathbf{w}^T \mathbf{R} \mathbf{w}) = -2\mathbf{r} + 2\mathbf{R} \mathbf{w} = 0 \quad (4.37)$$

amiből:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} \mathbf{w} \quad (4.38)$$

Ezt átrendezve, az optimális prediktor együttható vektor:

$$\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r} \quad (4.39)$$

Ekkor a hiba négyzetes várható értéke:

$$E[\delta_n^2] = R_0 - \mathbf{w}_{opt}^T \mathbf{r} \quad (4.40)$$

Tekintsünk egy egyszerű numerikus példát! Legyen a bemeneti sorozat autokorrelációs függvénye az alábbi sorozat:

$$R_{\xi}(k) = a^{|k|} \quad \forall k \quad \text{és} \quad |a| < 1$$

Tervezzünk ehhez a jelhez optimális másodfokú prediktort!

MEGOLDÁS

A bemenő jel teljesítménye:

$$E[\xi_n^2] = R_{\xi}(0) = R_0 = 1$$

A (4.17.)-ből:

$$R_1 = R_{\xi}(1) = a$$

és

$$R_2 = R_{\xi}(2) = a^2$$

Az autokorrelációs mátrix és vektor:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_0 & R_1 \\ R_1 & R_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a^2 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Az inverz mátrix:

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{1-a^2} \begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$$

Az optimális együttthatók vektora:

$$\mathbf{w}_{opt} = \frac{1}{1-a^2} \begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1-a^2} \begin{bmatrix} a-a^3 \\ -a^2+a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Az optimális szűrő elsőfokú, mivel $w_1 = a$ és $w_2 = 0$. A különbségi jel teljesítménye:

$$E[\delta_n^2] = R_0 - \mathbf{w}_{opt}^T \mathbf{r} = 1 - \begin{bmatrix} a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a^2 \end{bmatrix} = 1 - (a^2 + 0) = 1 - a^2 \quad (4.43)$$

Ezzel a predikciós nyereség:

$$G_P = \frac{E[\xi_n^2]}{E[\delta_n^2]} = \frac{1}{1-a^2} > 1 \quad (4.44)$$

5. fejezet

Forráskódolás

A forráskódolás célja az üzeneteink lehetőség szerinti legtömörebb ábrázolásának előállítása. A Híradástechnika tárgyban csak az ún. veszteségmentes tömörítési eljárásokkal foglalkozunk, ami azt jelenti, hogy a tömörített kódból az eredeti üzenet pontosan előállítható. Megjegyezzük, hogy manapság elterjedten használnak veszteséges tömörítési eljárásokat is, amelyeknek a lényege az, hogy az érzékszerveink számára kevésbé fontos információt eltávolítjuk az eredeti üzenetből. (Tipikus példa lehet például a "jpeg" képtömörítő eljárás, ahol a kép nagyfrekvenciás komponenseit elhagyják.) Magától értetődő, hogy veszteséges tömörítéssel elsősorban kép és hangjelet érdemes átvinni, egy szöveges üzenetnél vagy egy futtatható állománynál elengedhetetlen a bitről-bitre tökéletes átvitel.

5.1. Változó szóhosszúságú kódolás

A tárgyalásunkban szereplő üzenetek elemi szimbólumok egymás utáni sorozataként foghatók fel. (Gondoljunk pld. egy szövegre, amikor az elemi szimbólumok az ABC egyes karakterei.) Az elemi üzenetek alkotják az u.n. „szimbólum ABC”-t: $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_N\}$. Az ABC elemeihez rendeljük hozzá a $\{C_1, C_2, C_3, \dots, C_N\}$ bináris kódokat. Technológiai okok miatt ezeket a kódokat tudjuk továbbítani a csatornán.

A legegyszerűbb kódolási ötlet az, hogy az ABC elemeinek sorszámát választjuk kódnak. Egy 26 elemű ABC esetén akkor különböztethetők meg az egyes kódok, ha a kódszavak legalább 5 bitesek ($2^5 = 32 > 26$). Tekintetbe véve, hogy az ABC elemeinek előfordulási valószínűsége nem egyforma az üzenetben, valamint azt, hogy kihasználatlan kódok is léteznek, megállapíthatjuk, hogy ez a „kézenfekvő” eljárás nem gazdaságos.

Hatékonyabban járnánk el, ha elvetnénk az egyforma hosszúságú kódok alkalmazását: a nagyobb valószínűséggel előforduló elemekhez a rövidebb kódokat, a ritkábban előfordulókhöz a hosszabb kódokat rendelnénk hozzá. Ezt a megoldást nevezzük változó szóhosszúságú kódolásnak. Ha azonban a kódok nem egyforma hosszúak, a kódok dekódolása nehezebb.

5.1.1. Prefix-mentes kódok

Kérdés, hogy egy bitfolyamban hogyan vehetjük észre azt, hogy egy elemi üzenetnek vége van, és egy új elemi üzenet kezdődik, ha nem akarunk elválasztó jeleket használni? A megoldás: olyan kódokat kell választani, amelyek között egyik kódszó sem folytatása egy másiknak. Ekkor beszélünk *prefix-mentes kódról*. Ha ilyenkor a dekódolás során a beérkezett bitfolyamból már össze tudunk rakni egy létező kódot, akkor ez egyben azt is jelenti, hogy a kódszónak vége van, új kódszó következik (amit megint addig figyelünk, amíg az értelmezhető nem lesz).

Kérdés az, hogyan lehet szisztematikusan prefix-mentes kódokat előállítani az elemi üzenetek $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_N\}$ valószínűség eloszlásának ismeretében, illetve hogyan állítható elő a legtömörebb reprezentáció, továbbá mi a tömörítés elvi határa?

5.1.2. Kraft-egyenlőtlenség

Nyilván prefix-mentes a kódunk, ha az egy bináris fára illeszthető (úgy, hogy kódot csak végponthoz rendelünk), hiszen ebben az esetben lehetetlen, hogy egy kódszó egy másik folytatásaként álljon elő. Ezek után érdemes feltenni a kérdést: vajon lehetne-e egyszerű szabályt adni arra, hogy egy adott kódszó-hosszúság-készlet esetén definiálható-e prefix-mentes kódkiosztás. (Tehát elhatározom, hogy pl. az A, B és C szimbólumokat szolgáltató forrást rendre 1, 2 és 3 hosszúságú kódszavakkal kódolom. Kérdés, lehetséges-e ez? Itt triviális a válasz, nagy ABC-k esetén a kérdés igen bonyolulttá válik.) A választ a Kraft-egyenlőtlenség adja meg:

$$\sum_i 2^{-l_i} \leq 1 \quad (5.1)$$

ahol l_i az i -dik kódszó hosszát jelenti. (A bizonyítást itt mellőzzük.)

Megjegyzés: A Kraft-egyenlőtlenség tehát kizárólag azt mutatja meg, hogy egy adott kódszóhossz-készlet esetén készíthető-e prefix-mentes kód. Arról, hogyan kell a kódot előállítani, semmit sem mond.

5.1.3. Entrópia

Az X forrás veszteségmentes tömörítésének elvi határát az entrópia adja meg (az erre vonatkozó bizonyítások nélkül):

$$H(X) = - \sum_i p_i \log_2 p_i \quad (5.2)$$

ahol p_i -vel jelöltük az egyes szimbólumok előfordulási valószínűségét.

5.2. Példa: A Shannon-Fano kódolás:

Legyen egy üzenet szimbólum ABC-je: $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_N\}$. A szimbólumok valószínűség eloszlása: $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_N\}$. Keressük a prefix mentes kód ABC-t: $\{C_1, C_2, C_3, \dots, C_N\}$

A Shannon-Fano algoritmus:

1. A szóhosszúságok meghatározása: $l_i = \left\lceil \log_2 \frac{1}{p_i} \right\rceil$ $i = 1 \dots N$ szabály szerint, ahol $\lceil \cdot \rceil$ a felfelé kerekítést jelöli.
2. Egy segédmenyiség kiszámítása: $F_{i+1} = F_i + p_i$ ahol $F_1 = 0$, és $i = 1 \dots (N-1)$
3. A kód generálása: $C_i = \lfloor 2^{l_i} F_i \rfloor$ $i = 1 \dots N$ ahol $\lfloor \cdot \rfloor$ a lefelé kerekítést jelöli.

Egy numerikus példa:

A forrás eloszlás entrópiája:

i	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
p_i	0.49	0.14	0.14	0.07	0.07	0.04	0.02	0.02	0.01
l_i	2	3	3	4	4	5	6	6	7
F_i	0.00	0.49	0.63	0.77	0.84	0.91	0.95	0.97	0.99
C_i	0	3	5	12	13	29	60	62	126
C_i^{BIN}	00	011	101	1100	1101	11101	111100	111110	1111110

$$H(P) = \sum_{i=1}^9 p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = 2.3136$$

Az átlagos szóhosszúság:

$$L(P) = \sum_{i=1}^9 l_i p_i = 2.8900$$

A kód hatásfoka:

$$\eta(P) = \frac{H(P)}{L(P)} = 80.06\%$$

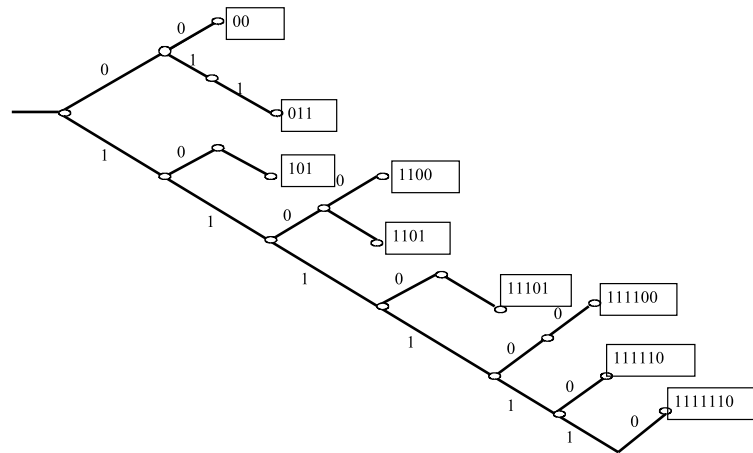
A bináris fát tekintve láthatjuk (5.1 ábra), hogy némi kódtömörítési lehetőség kínálkozik: Megjegyzés: *A Shannon-Fano algoritmus ugyan szisztematikus eljárás*

i	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
C_I	00	011	101	1100	1101	11101	111100	111110	1111110
C_I^*	00	01	10	1100	1101	1110	11110	111110	111111

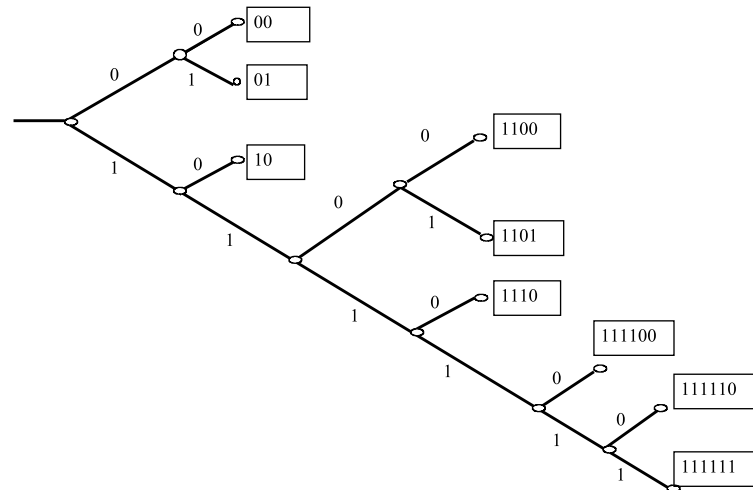
prefix-mentes kód előállítására, de láthatóan nem a legtömörebb kódot adja, mivel „kézi” módszerrel javítani tudtuk.

5.3. Példa: Huffman kódolás

Tekintsük a következő üzenetet: "felteszem, ma nem eszem". Karakterenként kódolva keresse meg az üzenet legtömörebb bináris ábrázolását azzal a feltételezéssel, hogy az üzenet egyértelműen dekódolható legyen a vevőben.



5.1. ábra. A kód ábrázolása bináris fán



5.2. ábra. A módosított kód bináris fája

- Adja meg a szimbólum-kód összerendelési táblázatot. (Az idézőjel nem, a vessző és a szóköz viszont része az üzenetnek.)
- Hány bittel lehet leírni az üzenetet, s mennyi így az átlagos kódszóhossz? (A kódtáblát a vevőben ismertnek tételezzük fel)
- 7 bites ASCII kódolást választva hány százalékkal vagyunk "bőbeszédűbbek"?

MEGOLDÁS

Szimbólumonkénti változó szóhosszúságú kódolások közül a Huffman-kódolás optimális, vagyis ezzel az eljárással közelíthető meg legjobban az entrópia.

A Huffman kódnak a következő tulajdonságai vannak, amelyek az optimalitást (legkisebb átlagos kódszóhossz) biztosítják:

szimbólum	relatív gyakoriság	kód	kódszóhossz
a	1/23	00101	5
e	6/23	01	2
f	1/23	00100	5
l	1/23	00011	5
m	4/23	11	2
n	1/23	00010	5
s	2/23	100	3
t	1/23	00001	5
z	2/23	0011	4
veszző	1/23	00000	5
szóköz	3/23	101	3

1. a kódhoz tartozó bináris fa minden belső szögpontjából két él indul ki;
2. monoton csökkenő valószínűségekhez monoton növekvő kódszóhosszak tartoznak;
3. az utolsó és utolsó előtti kódszó hossza megegyezik (ez az első tulajdonság folyománya).

A kódolás maga egy olyan algoritmus, amelyben minden lépésben biztosítjuk a fenti tulajdonságok teljesülését. Az algoritmus végrehajtásához szükség van az egyes szimbólumok előfordulási valószínűségére. Ennek hiányában, értelemszerűen, a relatív gyakoriságokkal helyettesítjük a valószínűségeket. Most is ezt kell tennünk. Első lépés tehát, hogy megszámoljuk, hogy melyik betű hányszor fordul elő a kódolni kívánt szövegben: (a táblázat már az algoritmus végén kiadódó kódokat is tartalmazza, ezt egyelőre hagyjuk figyelmen kívül) A kódolás algoritmus a következő: Először előfordulási valószínűség szerint csökkenő sorrendbe rendezzük a szimbólumokat. (A mellékelt ábrán a lépések nyomonkövethetők. A rövidebb írásmód kedvéért a rajzon a valószínűségek 23-szorosa szerepel.) Utána kiválasztjuk a két legkisebb valószínűségűt (ha több van, mint kettő, akkor azok közül tetszőlegesen választunk kettőt). Ezeket kinevezzük egy bináris fa elágazásához tartozó két végpontnak. Az elágazópontra ráírjuk a két összekötött szimbólum együttes valószínűségét. A továbbiakban ezt a pontot "szerepeltetjük a versenyben". A következő lépésben megint kiválasztjuk a két legkisebb valószínűségűt, összekötjük, s az elágazásra ráírjuk az együttes valószínűségüket. Mivel minden lépésben 1-gyel csökken a "versenyben" résztvevők száma, így világos, hogy összesen a szimbólumok számának megfelelő lépést kell végrehajtanunk. Ekkor érkezünk el az algoritmus során növesztett bináris fa gyökeréhez, amelyre (ha nem tévesztettünk), pont 1 valószínűségnek kell kerülnie. (Ez egyfajta ellenőrzési pont is, hogy jól számoltunk-e, illetve jól írták-e ki a feladatot.) A kódokat ezután a bináris fán a gyökértől a végpontokig (melyek egy-egy szimbólumot reprezentálnak) lépkedve olvashatjuk le. Példánkon a "felfele" lépéshez az 1-es, míg a lefele lépéshez a 0-s bitet rendeltük. Választásunk természetesen önkényes.

b) A választ arra, hogy egy adott szóhosszúság-készlettel lehet-e egyáltalán prefix-mentes kódot képezni, a Kraft-egyenlőtlenség adja meg. Ha teljesül, lehet, ha nem, akkor nem lehet. (Megjegyzés: A Kraft egyenlőtlenség arra nem ad semmilyen útmutatást, hogy ha lehet prefix-mentes kódot készíteni, azt hogyan kell megcsinálni.)

$$\sum_i 2^{-l_i} = 4 \cdot 2^{-2} + 2^{-3} = 1.125$$

tehát a Kraft-egyenlőtlenség nem teljesül, hiszen a szumma értékének legfeljebb 1-et szabadna adni.

c) A Shannon-Fano kodolás alapötlete, hogy mindig teljesül a Kraft-egyenlőtlenség, ha a kódszóhosszakat a következő szabály megválasztásával állítjuk elő:

$$l_i = \left\lceil \log_2 \frac{1}{p_i} \right\rceil$$

Az adott forrás szimbólumainak előfordulási valószínűségeire alkalmazva a szabályt, rendre a következő szóhosszak adódnak: 1,3,3,5,7. A konkrét kódot egy bináris fáról (hogy a kód prefix-mentes legyen) olvashatjuk le, adott hosszúságú ágakat választva.

Megjegyzés: Ne feledjük, a S-F kód nem optimális!

d) Az entropia számítása:

$$H(X) = - \sum_i p_i \log_2 p_i = 1.7188 \text{ bit}$$

A S-F kód átlagos kódszóhossza: $\bar{l} = \sum_i p_i l_i = 2.1$ bit, tehát a kettő közötti különbség 0.38 bit.

5.5. Példa

Egy X bináris forrás T időközönként szolgáltatja kimenetén a forrásszimbólumokat. A forrásszimbólumok függetlenek egymástól. A forrás entrópiája maximális. A forrásszimbólumokat forráskódolás nélkül a jelillesztőre kapcsoljuk, amely az 1-es forrásszimbólum esetében $+1V$, a 0-s forrásszimbólum esetében $-1V$ amplitudójú, $T = 1s$ hosszúságú négyszögimpulzust ad a csatornára.

- Határozza meg a forráseloszlást!
- Mondja meg, miért nincs szükség forráskódolásra!
- Határozza meg az átviteli csatorna bemenetén megjelenő $\xi(t)$ folyamat várható értékét és szórásnégyzetét!
- Határozza meg az átviteli csatorna bemenetén megjelenő folyamat autokorrelációs függvényét!

MEGOLDÁS

a) Abból, hogy a forrás entrópiája maximális (nyilván az azonos számú szimbólummal rendelkező források között keresgélve), következik, hogy a szimbólumok eloszlása

egyenletes. (A bizonyítást lásd a tankönyvben, vagy gondoljunk arra, hogy a legnehezebb a következő szimbólumot akkor megjósolni, ha egyenletes az eloszlásuk, s teljesen "váratlanul" jöhet bármelyik; ez az eset hordozza a legtöbb információt. Ennek ellentettje, mikor teljesen biztos egy esemény bekövetkezése, annak információtartalma zérus.)

b) Mivel a forrás egyenletes, nincs értelme változó szóhosszúságú kódolásnak.

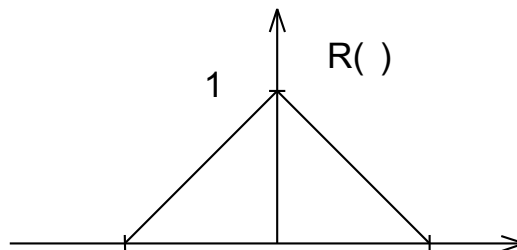
c) A forrás bináris, a szimbólumok előfordulási gyakorisága egyenletes, azaz $P(x=1) = P(x=0) = 0.5$, a csatornakódolás (ami most elemi jelalak hozzárendelést jelent a forrásszimbólumhoz) szimmetrikus, tehát a csatornára kerülő jel átlagértéke 0 V. A szórásnégyzet:

$$\sigma_\xi^2 = E[\xi(t)^2] = E[1V]^2 = 1V^2$$

d) Az autokorrelációs függvény:

$$R_\xi(\tau) = E[\xi(t)\xi(t+\tau)] = \begin{cases} 1 - \tau/T & \text{ha } |\tau| < 1s \\ 0 & \text{egyebkent} \end{cases}.$$

Okoskodásunk: ha $\tau > 1s$, a szimbólumok függetlensége miatt a korreláció értéke is biztosan 0. Ha $\tau < 1s$, akkor annak a valószínűsége, hogy a jelenlegi pillanathoz képest τ -val később még a jelenlegi szimbólum tart, pontosan $1 - \tau/T$. (A "váltás" valószínűsége τ/T .) A $\tau = 0$ esetben az átlagteljesítményt kapjuk, ami 1. Vagyis az autokorrelációs függvény lineárisan csökken, a 0-helyen az értéke 1, ahogy az alábbi ábrán látható:



5.6. Példa

Egy háromállapotú forrás eloszlása $p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.3$, $p_3 = 0.2$, illetve a kódolás során hozzájuk rendelt kódszavak hossza $l_1 = 2$ bit, $l_2 = 3$ bit, $l_3 = 4$ bit.

a) Lehet-e egyértelműen dekódolható kódot találni a fenti kódszóhosszakhoz?

b) Optimális kódolás esetén milyen hosszúságú blokkokba kellene a forrást kódolni, hogy az egy szimbólumra jutó átlagos kódszóhossz az elvi alsó határnál legfeljebb 1%-kal legyen hosszabb.

MEGOLDÁS

a) Mivel a Kraft egyenlőtlenség teljesül, igen:

$$\sum_i 2^{-l_i} \leq 1$$

Jó válasz adható úgy is, hogy rajzolunk egy olyan bináris fát, melyen van 3, a megadott szóhosszaknak megfelelő hosszúságú ágon ülő végpont. (Ebben az egyszerű esetben ez gyorsan megcsinálható, sok szimbolummal rendelkező források esetén ez a módszer nem használható.)

b) Blokk kódolás esetén biztosan teljesíthető az, hogy az egy szimbólumra jutó átlagos kódszóhossz ($\lambda^{(N)}$, ahol N jelöli a blokkhosszt) beszorítható az alábbi korlátok közé:

$$H(\xi) \leq \lambda^{(N)} \leq H(\xi) + \frac{1}{N}$$

Esetünkben, az 1%-os kritériumot a képletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{N} \geq 0.01H(\xi) = -0.01 \sum_{i=1}^3 p_i \log_2 p_i = 0.01485$$

amiből adódik, hogy $N \geq 68$.

5.7. Példa

Adott egy változó szóhosszúságú kód a kódszavaival: 1111, 0, 10, 1000, 1001, 1110

a) Miért nem lehet egyértelműen dekódolni a kódot? Indokolja válaszát, és mutasson példát többértelmű helyzetre.

b) Lehet-e egyáltalán ilyen hosszúságú kódszavakkal prefixmentes kódot csinálni? Ha igen, adjon rá példát.

c) Milyen legyen a forráseloszlás, hogy a fenti kódszóhosszakkal és Shannon-Fano kódolással optimális kódot kapjunk?

MEGOLDÁS

a) A harmadik kódszó előtagja a negyediknek és az ötödiknek. Baj akkor van, ha pl. az 1000 sorozatot vesszük, nem tudjuk ugyanis eldönteni, hogy a 3. utána meg két 2. kódszó, vagy egy 4. kódszó érkezett-e.

b) A Kraft-egyenlőtlenség teljesülését kell megvizsgálni:

$$\sum_{i=1}^6 2^{-l_i} = 1$$

tehát ez teljesül, lehet ilyen szóhosszakkal prefix-mentes kódot csinálni. Bináris fát rajzolva számtalan megoldás képzelhető el, pl.: 1111, 0, 10, 1100, 1101, 1110.

c) A Shannon-Fano kód esetében a kódszóhosszakat úgy határozzuk meg, hogy

$$l_i = \left\lceil \frac{1}{p_i} \right\rceil$$

Az entrópiának meg kell egyeznie a S-F kód átlagos kódszóhosszával. Ez a feltétel képlettel megfogalmazva a következő:

$$\sum_i p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = \sum_i p_i l_i = \sum_i p_i \left\lceil \frac{1}{p_i} \right\rceil \quad (5.3)$$

Tovább tudjuk, hogy

$$\sum_i p_i = 1 \quad (5.4)$$

mivel valószínűség-eloszlást keresünk. A képletekből látszik, hogy a feladatnak sok megoldása lehet, hiszen esetünkben 6 szabad paraméter van, ugyanakkor csak két egyenletet kell kielégíteni. A megoldást megtalálni mégsem egyszerű, adódik azonban egy kézenfekvő megoldás. Teljesítsük a következő feltételeket:

$$\log_2 \frac{1}{p_i} = \left\lceil \frac{1}{p_i} \right\rceil = l_i$$

vagy átírva:

$$\log_2 p_i = -l_i$$

Ekkor a következő megoldásra jutunk: $p_1 = 1/16$, $p_2 = 1/2$, $p_3 = 1/4$, $p_4 = p_5 = p_6 = 1/16$, amely (szerencsénkre) kielégíti a (5.4) egyenletet is.

5.8. Példa

Egy X forrásnak N db szimbóluma van (N páros szám). A forrás az első $N/2$ szimbólumot p valószínűséggel, míg a többi $2p$ valószínűséggel adja. Mennyi N és p , ha az entrópia $H(X) = \log_2 12 - \frac{2}{3}$?

MEGOLDÁS

Behelyettesítve az entrópia definíciójába (xxx):

$$H(X) = \frac{N}{2}p \log_2 \frac{1}{p} + \frac{N}{2}2p \log_2 \frac{1}{2p} = \frac{3}{2}Np \log_2 \frac{1}{p} - Np = \log_2 \frac{1}{p} - \frac{2}{3}$$

Felírható egy másik egyenlet is, hiszen tudjuk, hogy X szimbólumainak előfordulása teljes eseményteret alkot, vagyis a valószínűségek összege 1-et ad:

$$\sum_{i=1}^N p_i = \frac{N}{2}p + \frac{N}{2}2p = 1 \implies \frac{3}{2}Np = 1$$

A két egyenletből következik, hogy $p = 1/12$ és $N = 8$.

6. fejezet

Digitális adatátvitel analóg csatornán

Az előző fejezetekben azzal foglalkoztunk, hogyan kell a folytonos jeleket digitálissá alakítani, illetve hogyan kell (forráskódolással) előkészíteni az átvitelre. Most azt vizsgáljuk, hogyan lehet analóg csatornán (a valóságban ilyenek léteznek) digitális jeleket továbbítani. Ez a digitális moduláció.

Legyen a feladat adatállományok (digitálisan tárolt adatok) nagy távolságú átvitele. Az adatátviteli csatorna kábel (csavart érpár, koax), nyilvános távbeszélő hálózat, rádió csatorna, stb lehet.

Ha a csatorna kábel, a zérus frekvencia környezetét lefoglaló un. alapsávi összeköttetés jöhet szóba. Ha az átvitelt rádió csatornában valósítjuk meg (vagy a kábelt a többszörös kihasználás érdekében frekvencia osztásban használjuk), akkor valamilyen vivőfrekvenciás modulációs eljárás alkalmazása szükséges.

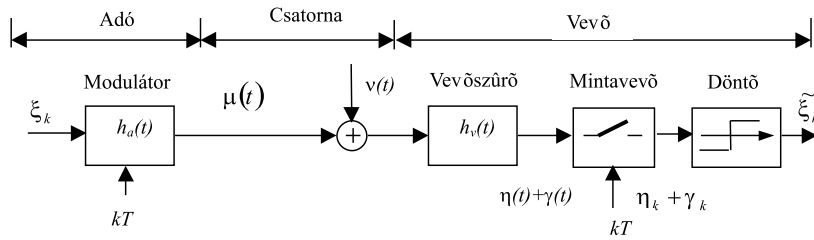
Az adatátvitel során törekedni kell arra, hogy a rendelkezésre álló sávszélesség és jel-zaj viszony mellett, a lehető legnagyobb adatátviteli sebességet érjük el a zajos csatornában kis adatátviteli hiba arány mellett.

6.1. Az impulzus-amplitúdó moduláció (PAM)

Az adó oldalon az állomány biteit megfelelő protokoll szerint soros bit-folyammá alakítjuk át, majd ezeket a biteket T időközönként a modulátor bemenetére vezetjük. A modulátor a '0' vagy '1' szimbólumoktól függően vagy egy pozitív, vagy egy negatív előjelű impulzust bocsájt ki, amit bizonyos jelformálás után átküldünk a csatornán.

A vevő oldalon T szerint mintavételezzük a jelet és annak előjeléből következtünk a küldött szimbólumra. A vett szimbólumokból a választott protokoll szerint visszaállítjuk az adatállományt. Ez az eljárás a kétszintű PAM. A választott modell a 6.1 ábrán látható.

Az adó oldali jelformáláson aluláteresztő szűrőt kell érteni azért, hogy a kibocsátott impulzus sávhatárolt legyen (illeszkedve a csatornában rendelkezésre álló sávszélességhez).



6.1. ábra. A PAM adatátvitel modellje

A vevő bemenetén is célszerű (aluláteresztő) szűrőt alkalmazni, annak érdekében, hogy a csatornában lévő, sávon kívüli idegen jelektől és a zajtól megszabaduljunk, mert ezek a döntés helyességét elronthatják.

Az impulzus-amplitúdó moduláció a fenti elképzelés szerint csak alapsávi összeköttetés (kábel) esetén jöhet számításba.

Az adatátviteli sebesség növelhető, ha a bitfolyamból több bitet foglalunk össze egy szimbólummá, majd a lehetséges kombinációknak megfelelően, többféle impulzus-amplitúdó értéket engedünk meg moduláló jelként. Ekkor a vevő oldalon a döntés is ennek megfelelően többszintű. Adott jel- és zajteljesítmény mellett ilyenkor a döntési értékek közelebb kerülnek egymáshoz és ezért az adatátviteli hiba valószínűsége növekszik.

A továbbiakban a fenti modellt vizsgáljuk: Mi lehet a szimbólum-áthallás mentes csatorna átviteli függvényét, illetve kifejezzük a bit hiba valószínűség jel-zaj viszonytól való függését.

6.1.1. A szimbólum-áthallás mentes csatorna

Mint fentebb indokoltuk, mind az adóban, mind a vevőben sávhatároló szűrést kell végeznünk. Mint tudjuk, a szűrés következtében a keskeny impulzusok az időben (esetleg több szimbólum-idő intervallumban is) szétterülnek. A döntés alapját képező pillanatértéket így nem csak egyetlen (az éppen küldött) impulzus, hanem az azt megelőző és azt követő impulzusok sokasága befolyásolja.

Ezt a jelenséget nevezzük *szimbólum-áthallásnak* (intersymbol interference: ISI).

Első lépésben magát az átviteli csatornát zaj- és torzítás mentesnek tételezzük fel. Erre az esetre fogjuk megvizsgálni, milyen eredő $H(f)$ átviteli karakterisztika szükséges ahhoz, hogy ne lépjen fel szimbólum-áthallás. Az eredő karakterisztika ismeretében tudjuk a felbontást elvégezni adó- ill. vevőoldali szűrőre.

Mint látni fogjuk, a szűrők (az egyszerű tárgyalhatóság érdekében) nem-kauzális szűrőknek adódnak. A szűrők súlyfüggvényeinek eltolásával a nem-kauzális szűrők kauzálissá tehetők, és így már realizálhatók lesznek. A súlyfüggvények eltolása a jel késleltetésének felel meg. (Ennek a késleltetésnek a figyelembe vétele nehezítené a tárgyalást.) A valóságos rendszerekben a vevő oldali mintavételi időpont szinkronizálása a vett jelhez (az időzítés visszaállítása) magából a vett jelből történik, így a vett jel késleltetése ebből a szempontból nem érdekes.

A modulátor diszkrét idejű bemenettel és folytonos idejű kimenettel rendelkező rendszer. Jelöljük $h_a(t)$ -vel a modulátor impulzus válasz függvényét (az egységnyi impulzusra adott választ).

Az átvendő „0” vagy „1” szimbólumokhoz rendeljük hozzá a $\xi_k \in \{-A_0, +A_0\}$ amplitúdó értékeket. Az eredeti üzenet k -ik bitje ezzel a ξ_k amplitúdó értékre konvertálódott. A továbbiakban ezt tekintjük az üzenetnek.

A jelzés sebessége: $f_b = 1/T$ Baud [szimbólum/secundum], ami kétszítű moduláció esetében megegyezik az adatátviteli sebességgel [bit/sec] (egy szimbólumhoz egy bit tartozik).

Mivel a modulátor lineáris és időinvariáns, annak kimenő jele:

$$\mu(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k h_a(t - kT) \quad (6.1)$$

A modulátor tehát az egy darab (egységnyi) diszkrét idejű jelre a folytonos idejű, u.n. elemi csatorna jellel ($h_a(t)$) válaszol. Ennek a jelnek a Fourier-transzformáltja (Fourier-integrálja) az adószűrő $H_a(f)$ átviteli karakterisztikája.

$$H_a(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.2)$$

A vevőszűrőt a $H_v(f)$ átviteli karakterisztikájával definiáljuk, melyhez a $h_v(t)$ impulzusválasz tartozik.

$$h_v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_v(f) e^{+j2\pi ft} df \quad (6.3)$$

Az eredő átviteli karakterisztika a kaszkád kapcsolásnak megfelelően:

$$H(f) = H_a(f) H_v(f) \quad (6.4)$$

Az eredő csatorna impulzusátviteli függvénye (súlyfüggvénye) $h(t)$ az adó- és vevőoldali impulzusválasz függvények konvolúciója.

A mintavételező bemenetén a jel (a zajtól az első lépésben tekintsünk el):

$$\eta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n h(t - nT) \quad (6.5)$$

A mintavételező kimenete a kT -ik időpontban:

$$\eta_k = \eta(kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n h(kT - nT) = \xi_k h(0) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq k}}^{\infty} \xi_n h((n - k)T) \quad (6.6)$$

A memória mentes döntő kimenete a bemenet (pillanatnyi) előjelétől függ:

$$\tilde{\xi}_k = A_0 \cdot \text{sgn}(\eta_k) \quad (6.7)$$

A (6.6)-ból láthatóan a (6.7) szerinti döntésben $\tilde{\xi}_k = \xi_k$, ha:

$$h_n = h(nT) = \delta_{n0} = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

A vevő oldali mintavételezés után egy diszkrét idejű bemenettel és diszkrét idejű kimenettel rendelkező rendszert kaptunk, melynek az impulzus válasz sorozata a h_n sorozat.

Ennek a diszkrét idejű rendszernek a frekvencia tartományban a $H_{mv}(f)$ átviteli függvény felel meg, amely karakterisztika ideális (ISI mentes) esetben:

$$H_{mv}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-j2\pi f n T} = 1 \quad (6.9)$$

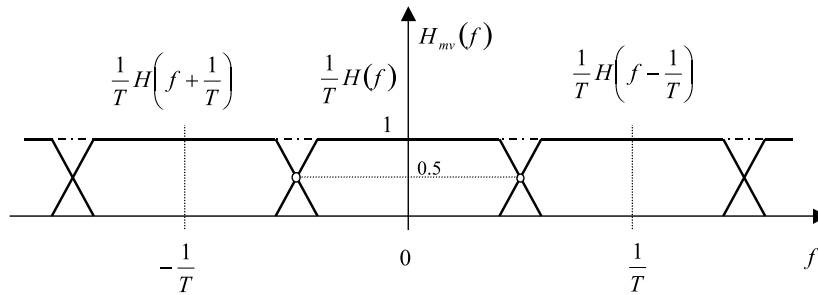
A mintavételi tétel értelmében viszont a mintavett rendszer átviteli függvénye kifejezhető a folytonos idejű csatorna eredő $H(f)$ átviteli függvényének periódikus kiterjesztéseként:

$$H_{mv}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left(f - n\frac{1}{T}\right) = 1 \quad (6.10)$$

A $H(f)$ -től ezen kívül még megköveteljük, hogy aluláteresztő karakterisztikájú legyen.

A (6.10)-ben szereplő végtelen összegből így a $[-1/T, +1/T]$ frekvencia tartományban csak az $n = 0, +1, -1$ indexekhez tartozó tagok maradnak meg:

$$H(f) + H\left(f + \frac{1}{T}\right) + H\left(f - \frac{1}{T}\right) = T = \text{const} \quad (6.11)$$

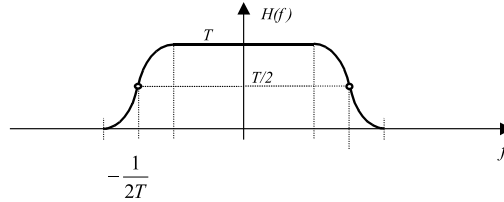


6.2. ábra. A mintavételezett csatorna eredő karakterisztikája

Szavakban kifejezve ez azt jelenti, hogy a mintavételezésből adódó periódikus kiterjesztés következtében fellépő átlapolódásnak olyannak kell lennie, hogy kiadódjon a konstans (1) érték. Ennek a feltételnek minden olyan karakterisztika eleget

tesz, amelyik aluláteresztő jellegű és páratlan szimmetriájú az $1/2T$ (és a $-1/2T$) pontokhoz tartozó 0.5 függvény értékekre (lásd 6.3 ábra).

Annak érdekében, hogy az impulzus válasz függvény az időben gyorsan csillapodó jellegű legyen, a csatorna átviteli karakterisztikáját emelt koszinuszos (raised cosine) függvénynek választjuk:



6.3. ábra. Az emelt-koszinuszos csatornakarakterisztika

Formulákban ez a következőt jelenti:

$$H(f) = \begin{cases} T & \text{ha } 0 \leq |f| \leq f_1 \\ \frac{T}{2} \left[1 + \cos \left(\pi \frac{|f| - f_1}{f_2 - f_1} \right) \right] & \text{ha } f_1 \leq |f| \leq f_2 \\ 0 & \text{ha } f_2 \leq |f| \end{cases} \quad (6.12)$$

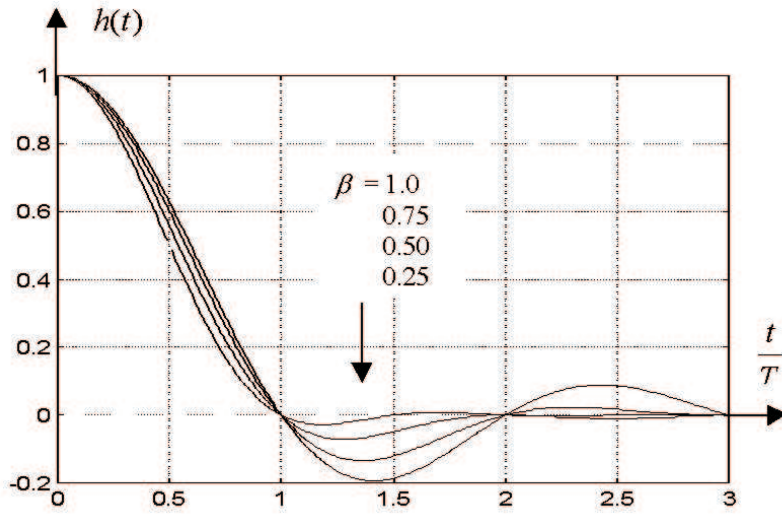
ahol $f_1 = \frac{1-\beta}{2T}$ és $f_2 = \frac{1+\beta}{2T}$. Lekerekítési (roll-off) paraméter: β , tipikus értéke: 0.25, 0.50, 0.75 vagy 1.0. Az impulzusválasz (a részlet számítások mellőzésével):

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df = 2 \int_0^{f_2} H(f) \cos(2\pi ft) df = \dots = \\ &= \frac{\sin \pi \frac{t}{T}}{\pi \frac{t}{T}} \frac{\cos(\beta \pi \frac{t}{T})}{1 - (2\beta \frac{t}{T})^2} \end{aligned} \quad (6.13)$$

A 9.4. ábra a súlyfüggvénynek (csak a pozitív) időtengely feletti alakulását mutatja a lekerekítési paraméter különböző értékei mellett (a súlyfüggvény páros függvény!). A függvény várakozásunknak megfelelő, T egész számú többszöröseinél zérus értékű, azaz biztosítja az áthallás mentességet.

Ha a sávszélességgel takarékoskodunk, akkor a β értékét kicsire választjuk (lásd 9.3. ábra). Ekkor a nullátmenetek meredeksége nagyobb, ami viszont abból a szempontból kedvezőtlen, hogy a vevő oldalon az időzítés visszaállítást (a mintaveteli időpontok kijelölését) pontosabbá kell tenni, mivel annak kis ingadozása (jitter) nagyobb szimbólum áthallást okoz.

A kiszámított szűrő súlyfüggvényére nem kauzális jelet kaptunk, ami abból adódott, hogy az átviteli függvényt valósnak tételeztük fel. A súlyfüggvényt négyszögletes ablakkal ablakolva pld a $[-8T, +8T]$ tartományra és a pozitív időtengely irányában eltolva $8T$ értékkel, azt kauzálissá tehetjük (A $t > 8T$ esetén a súlyfüggvény



6.4. ábra. A normalizált súlyfüggvény (csak a pozitív időtengely felett ábrázolva)

már elhanyagolhatóan kicsi.). Az időtartományban történő eltolás a frekvencia tartományban lineáris fázist eredményez. Mivel az időzítés visszaállítás a vett jelből van megoldva, az eltolásból adódó késleltetés nem okoz gondot.

Ha egy oszcilloszkóppal megvizsgáljuk a szűrő kimenetén a jelalakot úgy, hogy az oszcilloszkóp vízszintes eltérítését szinkronizáljuk a jelzési órajelhez, a 9.5. ábrán látható jeleket látnánk. Ezt az ábrát nevezzük szemábrának.

A konkrét jelalak természetesen a küldött üzenettől függ (az ábrán 10 különböző üzenet részlethez tartozó választ rajzoltunk fel). A vétel minőségére a szemábra „nyitottsága” jellemző, vagyis az a tény, hogy a döntési pillanatokban (az ábrán a $t = 0$ -ban) milyen távol vannak a döntés alapját képző értékek. Ha a csatornában lineáris torzítás (és zaj) van, a szemábra „záródik”, ami (különösen többszintű moduláció esetén) megnöveli a hibás döntés valószínűségét.

Ezek után bontsuk fel az eredő átviteli karakterisztikát adó- és vevőoldali szűrő átviteli karakterisztikákra. Gyakorlati megvalósításokban a szokásos választás az, hogy a két karakterisztikát egyformára választjuk úgy, hogy a szorzatuk az eredőt adja:

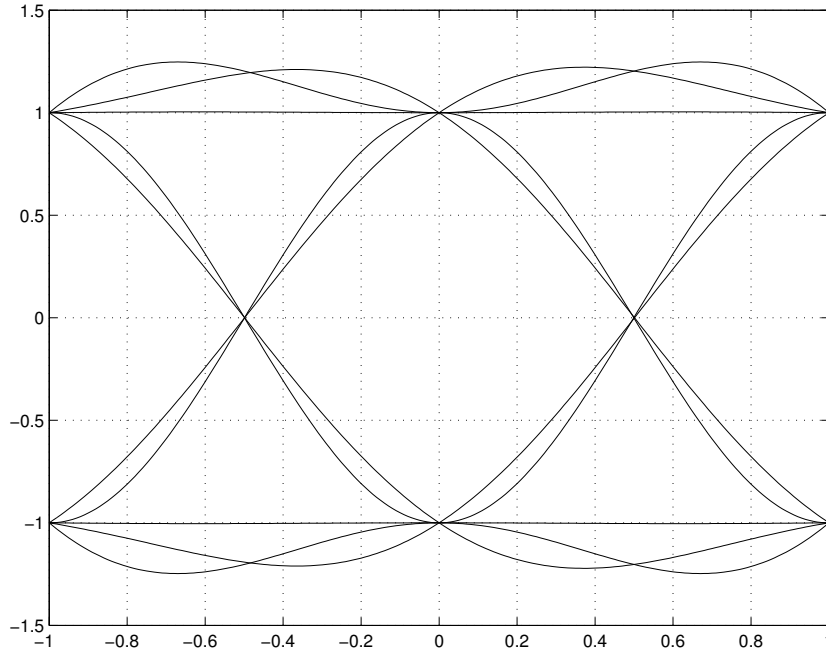
$$H_a(f) = T H_v(f) \quad (6.14)$$

A (6.4) alapján az amplitúdó karakterisztikák:

$$|H_a(f)| = T \sqrt{\frac{1}{T} H(f)} \quad (6.15)$$

$$|H_v(f)| = \sqrt{\frac{1}{T} H(f)} \quad (6.16)$$

(A különbség abból adódik, hogy az adó oldalán a szűrő $h_a(t)$ súlyfüggvényét, míg a vevő oldali szűrő $H_v(f)$ átviteli függvényét definiáljuk dimenzió mentesnek.) A (6.12)

6.5. ábra. Az ideális csatorna szemábrája kétszintű PAM esetén ($\beta = 0.25$)

kifejezéssel adott átviteli függvényből négyzetgyököket vonva (felhasználva a kétszeres szög koszinuszára vonatkozó azonosságot) írhatjuk:

$$H_v(f) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \leq |f| \leq f_1 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{|f| - f_1}{f_2 - f_1}\right) & \text{ha } f_1 \leq |f| \leq f_2 \\ 0 & \text{ha } f_2 \leq |f| \end{cases} \quad (6.17)$$

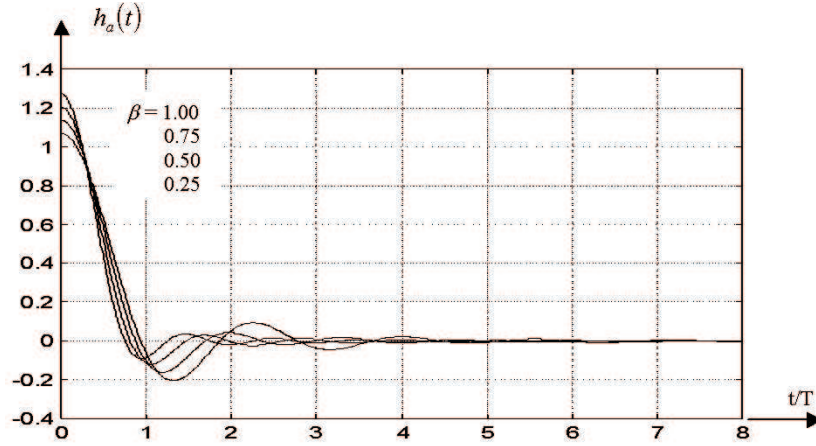
A (9.13.) szerinti aluláteresztő jellegű átviteli függvényt inverz-Fourier transzformálva, kapjuk az adósűrő impulzus válasz függvényét:

$$\begin{aligned} h_a(t) = (1 - \beta) \frac{\sin\left(\pi(1 - \beta)\frac{t}{T}\right)}{\pi(1 - \beta)\frac{t}{T}} + \beta \cos\left(\pi\frac{t}{T} + \frac{\pi}{4}\right) \frac{\sin\left(\beta\pi\frac{t}{T} + \frac{\pi}{4}\right)}{\beta\pi\frac{t}{T} + \frac{\pi}{4}} + \\ + \beta \cos\left(\pi\frac{t}{T} - \frac{\pi}{4}\right) \frac{\sin\left(\beta\pi\frac{t}{T} - \frac{\pi}{4}\right)}{\beta\pi\frac{t}{T} - \frac{\pi}{4}} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Az ábrából látható, hogy ez a szűrő T egész számú többszöröseinél nem zérus, de $h_v(t)$ -vel vett konvolúciója (kaskád kapcsolás!) visszaadja a 9.3. ábra szerinti függvényt.

A jel-zaj viszony

Kezdjük a számításokat a forrás analízisével! A modulátor bemenete a $\xi_k \in \{-A_0, +A_0\}$ halmazból veszi fel értékeit. A továbbítandó szimbólumok előfordulásának valószí-



6.6. ábra. Az adószűrő súlyfüggvénye a β parameter különböző értékei esetén (csak a pozitív időtengely felett ábrázolva a páros függvényt)

nűsége egyforma (hiszen optimális forráskódolást tételezünk föl):

$$P\{\xi_k = +A_0\} = P\{\xi_k = -A_0\} = \frac{1}{2} \quad (6.19)$$

A csatornán átvitt, hibajavító kóddal ellátott üzenetekre ez a megkötés sokszor nem teljesül. A vevő oldalon az időzítés helyreállító áramkör azonban csak akkor tud jól működni, ha (a továbbítandó állomány tartalmától függetlenül) a modulátor gyakran váltja a küldött impulzusok előjelét, ugyanis ekkor könnyű kinyerni a szükséges órajelet a vett jelből. Ezért az adóban szükség van (még a moduláció előtt) egy olyan fokozatra, amelyik tetszőleges bitsorozatból álvéletlen sorozatot állít elő. Ezt a fokozatot nevezik scrambler-nek. A vevőben az álvéletlen sorozatból állítja vissza a de-scrambler az eredeti üzenetet. Az álvéletlen sorozatra már teljesül a (6.15) szerinti feltevés.

A modulátor bemenetén lévő ξ_k diszkrét idejű folyamatot valószínűségi változónak tekintjük, melynek várható értéke és szórása (átlag teljesítménye):

$$E[\xi_k] = 0 \quad (6.20)$$

$$\sigma_\xi^2 = E[\xi_k^2] = A_0^2 \quad (6.21)$$

Ha a modulátor bemenetére érkező minták egymástól függetlenek, akkor korrelálatlanok is:

$$R_{\xi\xi}(m) = E[\xi_k \xi_{k+m}] = \begin{cases} A_0^2 & \text{ha } m = 0 \\ 0 & \text{ha } m \neq 0 \end{cases} \quad (6.22)$$

melynek spektrális teljesítménysűrűség függvénye konstans (fehér folyamat):

$$S_{\xi\xi}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{\xi\xi}(m) e^{-jm2\pi fT_s} = A_0^2 = \text{const} \quad (6.23)$$

A modulátor kimenő jele:

$$\mu(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n h_a(t - nT) \quad (6.24)$$

melynek várható értéke (6.16) alapján:

$$E[\mu(t)] = E\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n h_a(t - nT)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E[\xi_n] h_a(t - nT) = 0 \quad (6.25)$$

A kimenő jel teljesítményének a jel másodrendű momentumát tekintjük:

$$\begin{aligned} P_\mu(t) &= E[\mu^2(t)] = E\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n h_a(t - nT) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k h_a(t - kT)\right] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E[\xi_k \xi_n] h_a(t - kT) h_a(t - nT) \end{aligned} \quad (6.26)$$

Felhasználva (6.22)-et, a belső összegből csak az $n = k$ indexű tag marad meg, amivel:

$$P_\mu(t) = E[\mu^2(t)] = A_0^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_a^2(t - kT) \quad (6.27)$$

A kimenő jel (mint valószínűségi változó) másodrendű momentuma függ az időtől, annak periódikus függvénye (az elemi csatornájel négyzetének periódikus kiterjesztje). Így a csatornába került jel nem lehet stacionárius (ciklo-stacioner folyamat).

Az átlagteljesítményt úgy kapjuk meg, hogy a teljesítmény (6.27) szerinti kifejezését egy periódusra átlagoljuk (integráljuk és osztjuk a periódus hosszával).

$$\bar{P}_\mu = \frac{1}{T} \int_0^T P_\mu(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T A_0^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_a^2(t - kT) dt = \frac{A_0^2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^T h_a^2(t - kT) dt \quad (6.28)$$

A (6.28.)-ben bevezetve a $t' = t - kT$ változót, írhatjuk:

$$\bar{P}_\mu = \frac{A_0^2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^T h_a^2(t - kT) dt = \frac{A_0^2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-kT}^{-(k-1)T} h_a^2(t') dt' = \frac{A_0^2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} h_a^2(t') dt' \quad (6.29)$$

A Parseval-tétel értelmében:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_a^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |H_a(f)|^2 df \quad (6.30)$$

amivel a kimenő jel átlag teljesítménye:

$$\bar{P}_\mu = \frac{A_0^2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |H_a(f)|^2 df \quad (6.31)$$

Mivel az átviteli karakterisztika valós, a teljesítmény értéke zárt alakban:

$$\bar{P}_\mu = \frac{A_0^2}{T} \int_{-f_2}^{f_2} H_a^2(f) df = A_0^2 \int_{-f_2}^{f_2} H(f) df = A_0^2 \quad (6.32)$$

(Ahol felhasználtuk (9.13.) -ből a $H_a^2(f) = TH(f)$ összefüggést, valamint a 9.3. ábra alapján látható, hogy az integrál értéke egy.)

Modellünkben additív, Gauss-eloszlású, zérus várható értékű, stacionárius fehér zajt tételezünk fel ($\nu(t)$), melynek spektrális teljesítmény sűrűség függvénye (N_0) konstans.

$$S_{\nu\nu}(f) = N_0 \quad (6.33)$$

A vevőszűrő kimenetén (a mintavételező bemenetén) a $\gamma(t)$ zaj szintén stacionárius, Gauss-eloszlású lesz, melynek spektrális teljesítmény sűrűség függvénye:

$$S_{\gamma\gamma}(f) = |H_v(f)|^2 N_0 = H_v^2(f) N_0 = \frac{1}{T} H(f) N_0 \quad (6.34)$$

Ennek a zajnak az átlag teljesítménye (szórásnégyzete):

$$P_\gamma = \sigma_\gamma^2 = E[\gamma^2] = \int_{-f_2}^{f_2} S_{\gamma\gamma}(f) df = \frac{N_0}{T} \int_{-f_2}^{f_2} H(f) df = \frac{N_0}{T} \quad (6.35)$$

A jel-zaj viszonyt a csatornában lévő hasznos jel és a mintavételező bemenetén lévő zaj teljesítményének hányadosaként értelmezzük:

$$SNR = \frac{\bar{P}_\mu}{P_\gamma} = \frac{A_0^2}{\sigma_\gamma^2} = \frac{A_0^2 T}{N_0} \quad (6.36)$$

A jel-zaj viszony tehát a modulátort tápláló jel A_0 amplitúdójától, a csatornában lévő zaj N_0 spektrális sűrűségétől és az $1/T$ effektív sávszéleségtől függ.

A bithiba valószínűsége

Az alábbiakban az ISI mentes csatornában a zaj hatására bekövetkező szimbólum-tévesztés valószínűségének meghatározásával foglalkozunk. Keressük annak az eseménynek a valószínűségét, amikor a $\tilde{\xi}_k$ vett üzenet nem egyezik meg a ξ_k küldött üzenettel. Ezt az alábbi, egymást kizáró, két esemény feltételes valószínűségének összegeként tudjuk felírni;

$$P_{berr} = P\left\{\tilde{\xi}_k \neq \xi_k\right\} = \quad (6.37)$$

$$= P \left\{ \tilde{\xi}_k = -A_0 \mid \xi_k = +A_0 \right\} P \left\{ \xi_k = +A_0 \right\} + P \left\{ \tilde{\xi}_k = +A_0 \mid \xi_k = -A_0 \right\} P \left\{ \xi_k = -A_0 \right\}$$

A scrambler kimenetén előálló üzenet folyamra igaz, hogy:

$$P \left\{ \xi_k = +A_0 \right\} = P \left\{ \xi_k = -A_0 \right\} = \frac{1}{2} \quad (6.38)$$

A döntési szabályt figyelembe véve, a feltételes valószínűségek kifejezhetők a zaj amplitúdók előfordulási valószínűségeivel:

$$P \left\{ \tilde{\xi}_k = -A_0 \mid \xi_k = +A_0 \right\} = P \left\{ +A_0 + \gamma_k < 0 \right\} = P \left\{ \gamma_k < -A_0 \right\} \quad (6.39)$$

$$P \left\{ \tilde{\xi}_k = +A_0 \mid \xi_k = -A_0 \right\} = P \left\{ -A_0 + \gamma_k \geq 0 \right\} = P \left\{ \gamma_k \geq +A_0 \right\} \quad (6.40)$$

A (6.39)-ban felírt valószínűség, (definíció szerint) a Gauss-eloszlású zaj F_γ eloszlásfüggvényéből határozható meg:

$$P \left\{ \gamma \leq -A_0 \right\} = F_\gamma(-A_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\gamma} \int_{-\infty}^{-A_0} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\gamma^2}} dx \quad (6.41)$$

Vezessük be a $t = \frac{x}{\sigma_\gamma}$ (a zaj szórására normált) változót, amivel a keresett valószínűség a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényével válik kifejezhetővé:

$$F_\gamma(-A_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-A_0/\sigma_\gamma} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi \left(-\frac{A_0}{\sigma_\gamma} \right) \quad (6.42)$$

ahol a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (6.43)$$

Mivel feltevésünk szerint a zaj várható értéke zérus, így a valószínűségi sűrűség függvény páros, ezért a (6.39)-ban és a (6.40)-ben felírt események valószínűsége egyforma:

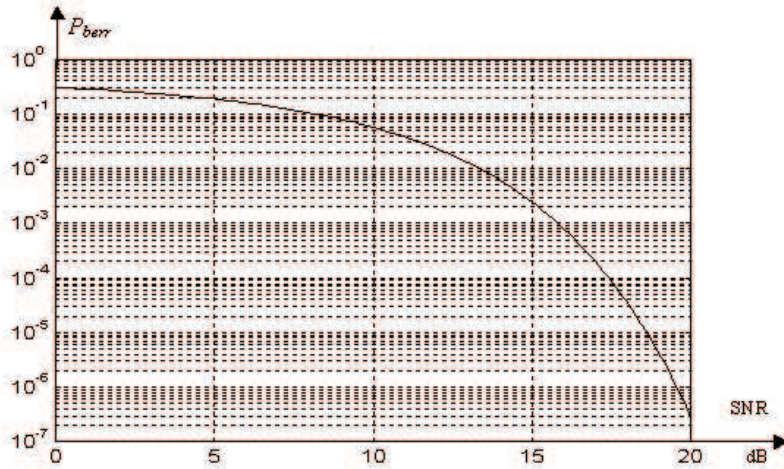
$$P \left\{ \gamma_k \leq -A_0 \right\} = P \left\{ \gamma_k > +A_0 \right\} = \Phi \left(-\frac{A_0}{\sigma_\gamma} \right) = \Phi \left(-\sqrt{SNR} \right) \quad (6.44)$$

A (6.44)-ban felhasználtuk a jel-zaj viszony (6.36) szerinti alakjából, az impulzus amplitúdójának és a zaj szórásának hányadosára adódó összefüggést. Ezzel az üzenet tévesztésének valószínűsége, a bithiba arány:

$$P_{berr} = \frac{1}{2} \left[\Phi \left(-\sqrt{SNR} \right) + \Phi \left(-\sqrt{SNR} \right) \right] = \Phi \left(-\sqrt{SNR} \right) \quad (6.45)$$

A 9.7. ábra a bithiba arány alakulását mutatja a dB-ben kifejezett jel-zaj viszony függvényében.

Ezt az eredményt úgy kaptuk, hogy tökéletes időzítés visszaállítást, és ISI mentes csatornát tételeztünk fel. Valóságos rendszerekben (ahol ISI is van), az elérhető hibaarány a fentieknél rosszabb.



6.7. ábra. A kétszintű PAM bithiba valószínűsége a jel-zaj viszony függvényében

6.2. A BPSK moduláció

A PAM eljárás hátránya, hogy csak az alapsávban működhet. Így pld. egy kábeles összeköttetés esetén is a kábel többszörös kihasználására alkalmatlan. Ha azonban a PAM modulátor kimenő jelét egy szorzó típusú keverőbe vezetjük, akkor az alapsávi jel spektrumát „felkeverjük” az ω_c vivőfrekvencia környezetébe. Különböző vivőfrekvenciák használatával így lehetőségünk van a kábel (vagy a rádió csatorna) többszörös kihasználására. A vivőfrekvencia alkalmazása lehetővé teszi az adatátvitelt sáváteresztő típusú csatornában is, mint amilyen pld. a nyilvános telefonhálózat.

A PAM modulátor (alapsávi) kimenő jele:

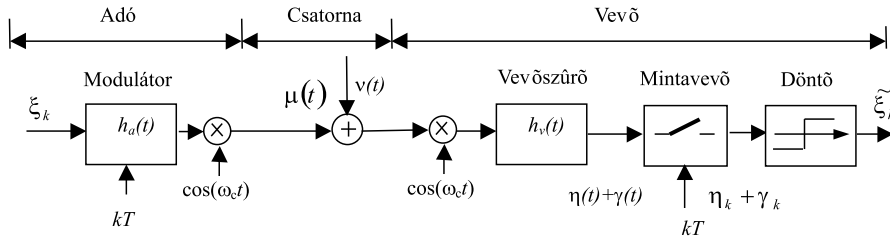
$$\mu_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k h_a(t - kT) \quad (6.46)$$

A csatornába felkevert jel:

$$\mu(t) = \mu_a(t) \cos(\omega_c t) \quad (6.47)$$

A (6.47) összefüggés egy elnyomott vívőjű amplitúdó modulált jelet (AM-DSB/SC) ír le, amit értelmezhetünk úgy is, hogy az ω_c vivőfrekvenciás jelet a $\mu_a(t)$ jel fázisban modulál. Ugyanis, ha $\mu_a(t)$ előjelet vált, akkor a vivőhullámban 180 fokos fázisugrás következik be. Az amplitúdó előjel váltása egy speciális fázis modulációként fogható fel: két állapot lehetséges, ha $\mu_a(t)$ pozitív, a kimenő jel fázisa a referencia fázis, ha $\mu_a(t)$ negatív, a fázis a referenciához képest 180 fokkal megváltozott. Ez a fázis-moduláció járulékos amplitúdó modulációval jár együtt, amit felfoghatunk a $h_a(t)$ súlyfüggvényű adószűrő sávhatárolásának következményeként.

A PAM modulátor és a keverő tehát egy sávhatárolt fázismodulátort valósít meg (a PAM a küldött szimbólumtól függően változtatja a kimeneti impulzus előjelét,



6.8. ábra. A BPSK modulátor és demodulátor

amit a keverő fázisváltozásba konvertál: **B**inary **P**hase **S**hift **K**eying= bináris fázis billentyűzés).

A vevőben a BPSK jel demodulációját egy keverővel és egy PAM demodulátorral valósítjuk meg. A keverő a jelet egyrészt az alapsávba, másrészt a $2\omega_c$ frekvencia környezetében lévő sávba keveri. Az utóbbi sávban lévő jelet a $h_v(t)$ súlyfüggvényű vevőszűrő kiszűri, így a PAM demodulátorra az alapsávi PAM jel kerül.

$$\mu(t) \cos(\omega_c t) = \mu_a(t) \cos(\omega_c t) \cos(\omega_c t) = \frac{\mu_a(t)}{2} + \frac{\mu_a(t)}{2} \cos(2\omega_c t) \quad (6.48)$$

Vegyük észre, hogy a vevőben a keverő jelét az adóban lévő keverő jelével azonos fázisúnak tételeztük fel (koherens vétel). Ezt csak úgy tudjuk biztosítani, hogy magából a vett jelből nyerjük ki azt az információt, ami a vevő oldalon az oszcillátor jelének szinkronizálásához szükséges (carrier recovery). Ez a kérdéskör azonban vizsgálataink lehetőségeit meghaladja.

6.3. A kvadratúra moduláció

Legyen $i_1(t)$ és $q_1(t)$ két valós, az ω_2 frekvenciára nézve sávhatárolt jel, melynek spektrumai $I_1(\omega)$ és $Q_1(\omega)$. (Sávhatárolt: $I_1(\omega) = Q_1(\omega) = 0$ ha $|\omega| > \omega_2$.) (Az i jelet az azonos fázisú (in-phase), a q jelet a kvadratúra (quadrature-phase) jelnek szokás nevezni). A modulátor kimenő jele:

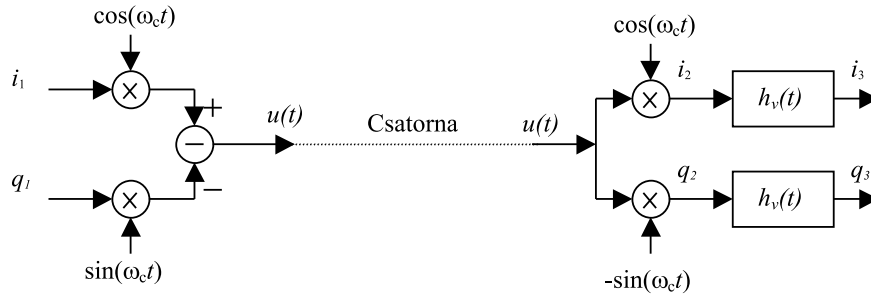
$$u(t) = i_1(t) \cos \omega_c t - q_1(t) \sin \omega_c t \quad (6.49)$$

ahol a vivőhullám (carrier) frekvenciája : $\omega_c > 2\omega_2$

A frekvencia tartományban (a 8.48. alapján):

$$\begin{aligned} U(\omega) &= \frac{1}{2} [I_1(\omega - \omega_c) + I_1(\omega + \omega_c)] + j \frac{1}{2} [Q_1(\omega - \omega_c) - Q_1(\omega + \omega_c)] = \\ &= \frac{1}{2} [I_1(\omega - \omega_c) + jQ_1(\omega - \omega_c)] + \frac{1}{2} [I_1(\omega + \omega_c) - jQ_1(\omega + \omega_c)] \end{aligned} \quad (6.50)$$

Vegyük észre a (6.50)-ben, hogy az elvileg független $i_1(t)$ és $q_1(t)$ jel spektruma a keverés után ugyanazt a frekvenciasávot foglalja el ($\omega_c \pm \omega_2$ és $-\omega_c \pm \omega_2$).



6.9. ábra. A kvadratúra modulátor és demodulátor

A demodulátorban először a koherens, kétfázisú oszcillátor jelével alapsávba keverünk:

$$\begin{aligned} i_2(t) &= u(t) \cos \omega_c t = i_1(t) \cos^2 \omega_c t - q_1(t) \sin \omega_c t \cos \omega_c t = \\ &= \frac{1}{2} [i_1(t) + i_1(t) \cos 2\omega_c t - q_1(t) \sin 2\omega_c t] \end{aligned} \quad (6.51)$$

$$\begin{aligned} q_2(t) &= -u(t) \sin \omega_c t = q_1(t) \sin^2 \omega_c t - i_1(t) \sin \omega_c t \cos \omega_c t = \\ &= \frac{1}{2} [q_1(t) - q_1(t) \cos 2\omega_c t - i_1(t) \sin 2\omega_c t] \end{aligned} \quad (6.52)$$

Második lépésben aluláteresztő szűrőkkel mindkét csatornában megszabadulunk a $2\omega_c$ frekvencia környezetében elhelyezkedő komponensektől. Ha az aluláteresztő ideális:

$$i_3(t) = \frac{1}{2} i_1(t) \quad \text{és} \quad q_3(t) = \frac{1}{2} q_1(t)$$

Szavakban ez azt jelenti, hogy a két csatorna jelét a vevő oldalon sikerült maradéktalanul helyreállítani. A speciális demodulátor ugyanabból a frekvenciasávból mindkét jelet ki tudja nyerni. Nem ideális szűrők esetében (valóságos szűrők) a kimenő jelekben a szűrők lineáris torzítása és késleltetése érezteti a hatását.

A demodulátorban a koherens keverést tételeztünk fel, vagyis azt, hogy a vevő oldalon a kétfázisú oszcillátor azonos fázisban rezeg a modulátor oszcillátorával. Ha fázishiba van, pld ha a demodulátor oszcillátora φ szöggel siet a modulátor fázisához képest:

$$i_2(t) = u(t) \cos(\omega_c t + \varphi) \quad \text{és} \quad q_2(t) = -u(t) \sin(\omega_c t + \varphi)$$

akkor a szűrés után a kimenő jelek (a levezetés mellőzésével):

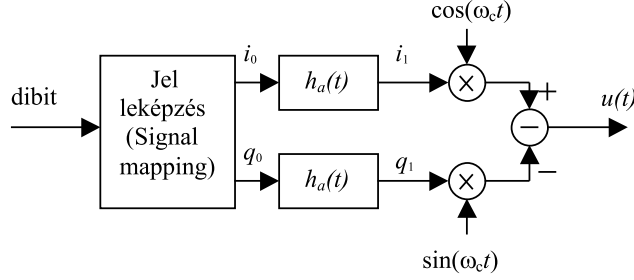
$$i_3(t) = \frac{1}{2} [i_1(t) \cos \varphi - q_1(t) \sin \varphi] \quad (6.53)$$

$$q_3(t) = \frac{1}{2} [q_1(t) \cos \varphi + i_1(t) \sin \varphi] \quad (6.54)$$

vagyis *áthallás lép fel* a csatornák között!

6.4. A QPSK moduláció

Kvadratúra fázisbillyentyűzéses modulációt (**Q**uadrature **P**hase **S**hift **K**eying) két PAM modulátorral és egy kvadratúra modulátorral hozhatunk létre:

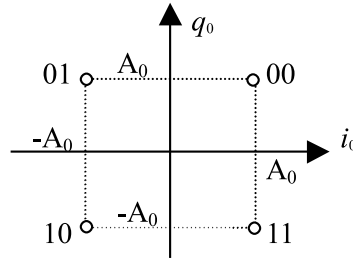


6.10. ábra. A QPSK modulátor

A PAM modulátorok legyenek kétszintűek. Így mindkét PAM bemenetére egy-egy bit, azaz összesen két bit (dibit) érkezik a bemenetre T szimbólum időnként. A jel leképező fokozat mindkét kimenete (i_0 és q_0) $\pm A_0$ értékű lehet a bemenő dibit tartalmától függően. Képezzük az i_0 és q_0 mennyiségekből az alábbi komplex számot:

$$z_0(kT) = i_0(kT) + jq_0(kT) \quad (6.55)$$

Ezt a komplex számot ábrázolva egy komplex síkon, kapjuk az u.n. konstellációs diagrammot:



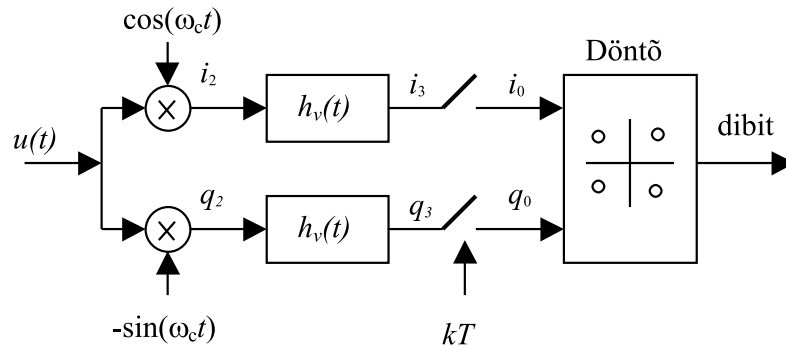
6.11. ábra. A QPSK konstellációs diagramja

A konstellációs diagram a leképezés eredményét mutatja, azaz, hogyan függ a dibit értékétől az alapsávi z_0 jel fázisa. Ennél a modulációnál a z_0 jel amplitúdója állandó ($\sqrt{2}A_0$), a fázisugrások szimbólum időnkénti ugrása: 0^0 , 90^0 , 180^0 illetve 270^0 lehet.

$$z_0(kT) = i_0(kT) + jq_0(kT) = \sqrt{2}A_0 e^{j(\frac{\pi}{4} + d(kT)\frac{\pi}{2})} \quad (6.56)$$

ahol $d(kT)$: 0,1,2,3 a dibit értéke.

A kvadratúra modulátor/demodulátor működését az előzőekben már tárgyaltuk. A demodulátor $i_3(t)$ és $q_3(t)$ kimeneteit mintavételezve (a szűrők késleltetésétől eltekintve) visszkapjuk az $i_0(kT)$ és $q_0(kT)$ jeleket.



6.12. ábra. A QPSK demodulátor

A szűrők késleltetése a demodulációs eljárásban azért nem okoz gondot, mert az időzítés visszaállítását (timeing recovery) az $i_3(t)$ és $q_3(t)$ jelek felhasználásával végezzük el.

A döntő feladata, hogy megállapítsa, hogy az $i_0(kT) + j \cdot q_0(kT)$ komplex vektor melyik síknegyedbe mutat. A síknegyed alapján eldönthető, mi volt a küldött dibit értéke. (Döntő = vektor kvantáló, egy vektor értékétől függ a kimenet.)

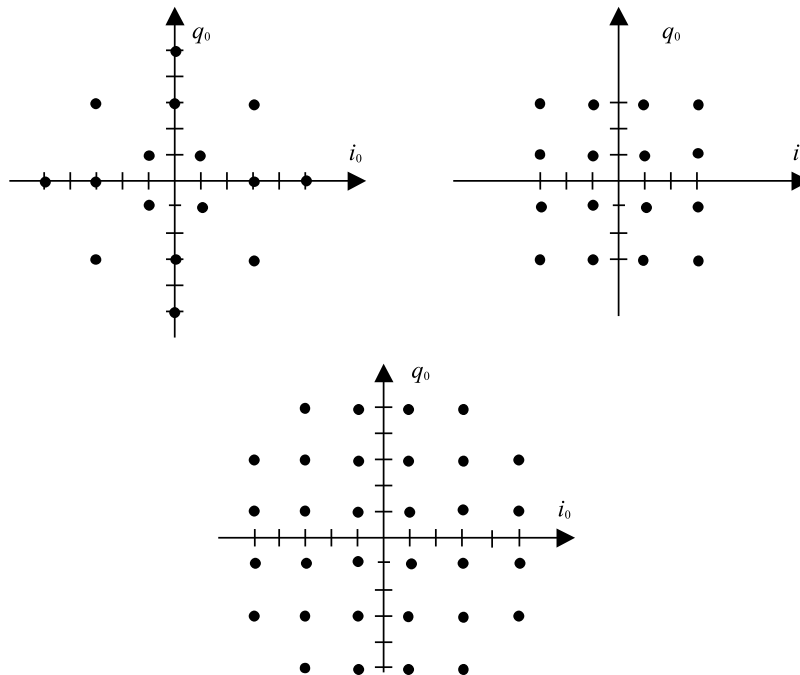
Itt jegyezzük meg, hogy a vivőhullám fázisának visszaállítása (még ideális körülmények között is) csak $\pi/2$ egész számú többszörösének bizonytalanságával lehetséges. Ezért valóságos rendszerekben a konstellációs pontokhoz nem a dibit értékeket rendeljük hozzá. A dibitekhez célszerű a fázis megváltozását hozzárendelni, mert így az abszolút fázis ismeretének hiányában is az érvényes adathoz tudunk hozzájutni. Ezt az elvet nevezzük *differenciális kódolásnak*.

6.5. A QAM moduláció

A kvadratúra amplitúdó moduláció a QPSK modulációból származtatható, azzal a kis eltéréssel, hogy a két ágban (in-phase, quadrature-phase) elhelyezkedő PAM modulátorok nem két állapotúak, hanem több állapotot is felvehetnek. A QAM modulátor / demodulátor felépítését tekintve megegyezik a 9.9. és a 9.11. ábrán látható rendszerekkel, azzal a különbséggel, hogy a jel leképezése ill. a vektor kvantálást végző döntő kicsit bonyolultabb.

A különböző QAM rendszereket a konstellációs diagramjaik alapján különböztetjük meg. Az alábbi ábrákon néhány, a gyakorlatban használt QAM eljárás konstellációs diagramját mutatjuk meg.

Használatosak még a 64, 128, 256, 512, 1024 pontos QAM rendszerek. Minél magasabb a pontszám, a konstellációs pontok annál közelebb kerülnek egymáshoz (azonos jelteljesítményt feltételezve), így a döntőben (vektor kvantálóban) már kisebb zaj is hibás döntést eredményezhet. Jó minőségű átvitelhez ezért a jel-zaj viszonyoknak is nagyobboknak kell lennie a pontszám növekedtével.



6.13. ábra. A 16-X-QAM, a 16-M-QAM és a 32-QAM konstellációs diagramja

A konstellációs pontok száma 2-nek egész számú hatványa. A BPSK modulációnál a szimbólum idő alatt 1 bitet tudunk átvinni, a QAM modulációnál az átvihető bitek száma a hatvány számával egyezik meg. Pld. az $1/T = 2400$ Baud [szimbólum/sec] mellett, 128 QAM esetén az adatátviteli sebesség $2400 \cdot 7 = 16\,800$ bit/sec lenne.

Az előbbi példában azért használtunk feltételes módot, mert az ilyen magas állapotszámú QAM adatátviteli rendszerekben a hibajavítás érdekében redundáns biteket is használunk. Egy ilyen létező rendszer a nyilvános telefon hálózaton üzemelő adatátviteli modem (CCITT V32). Ennél a rendszernél az egy redundancia bitet egy beépített konvolúciós kódoló szolgáltatja. Az előző példánál maradva a 128 QAM adatkapcsolat esetén a hasznos bitek száma ezért csak 6, így az effektív adatátviteli sebesség $2400 \cdot 6 = 14\,400$ bit/sec.

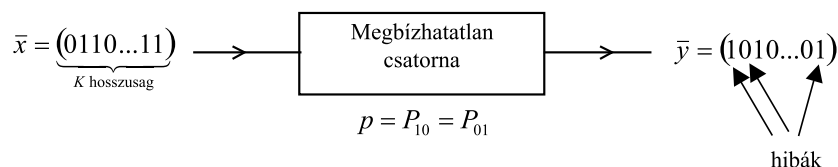
7. fejezet

A Digitális csatornamodell

Az előző fejezetben azzal foglalkoztunk, hogyan lehet a valós analóg csatornákon digitális szimbólumokat továbbítani. Most ettől a valóságközeli látásmódtól eltávolodunk, és a hírközlő csatornát, mint digitális bementű és kimenetű digitális rendszert modellezzük. A Híradástechnika tárgy keretein belül csak egészen rövid bevezetőt adunk a digitális hírközlő csatornák elméletébe: a legegyszerűbb esetet: a bináris szimmetrikus csatornát tárgyaljuk.

7.1. A csatornkapacitás, avagy hogyan lehet megbízhatóan kommunikálni megbízhatatlan csatornán

Modellünk a következő: megbízhatatlan csatornán szeretnénk bináris információt továbbítani, bittévesztés nélkül. Hogyan lehetséges ez, illetve milyen következménnyel kell számolnunk? Ezekre a kérdésekre keressük a választ.



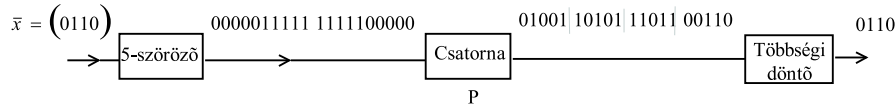
7.1. ábra. Az átviteli modell

Az ötletünk az, hogy okosan kiegészítjük az üzenetet információt nem hordozó bitekkel, olyan módon, hogy egyes bitek meghibásodása esetén minél nagyobb valószínűséggel megmondhassuk, melyik pozícióban romlott el az üzenet.

Például tekintsük azt a legegyszerűbb esetet, amikor minden bitet többször egymás után elküldünk (lásd az alábbi ábrát).

A hibavalószínűség a következő képpen számítható:

$$P_E = P(\text{az 5 vett bitből legalább 3 hibás}) = \sum_{k=3}^5 \binom{5}{k} p^k (1-p)^{5-k}$$



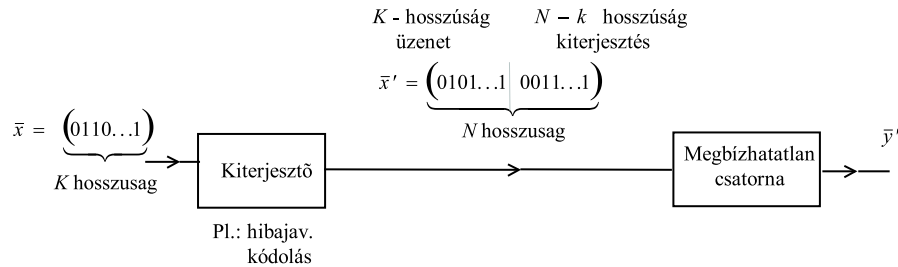
7.2. ábra. Bit-töbszörözéses átvitel

Ha 5-szörözés helyett N -szerezést alkalmazunk, akkor

$$P_E = \sum_{k=N/2+1}^N \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

Tanulság: az átvitel aszimptotikusan hibamentessé tehető!

Az üzenet kiterjesztésének általános modellje a (7.3). ábrán látható.



7.3. ábra. Az üzenet kiterjesztése

Következmény: A megbízható információ továbbítás érdekében az információ közlés sebessége relatíve lassul:

$$\frac{K}{N} \leq 1$$

A lassulás mértéke jellemző a csatornára (minnél rosszabb a csatorna, annál hosszabb kiterjesztés kell, annál inkább csökken az átvitel sebessége). A *Csatorna-kapacitás* definíciója:

$$C = \max \frac{K}{N}$$

amivel garantálni lehet, hogy

$$P_E \rightarrow 0$$

Ehhez a legügyesebb kódolási eljárás, azaz a legkisebb kiterjesztés szükséges!

7.1.1. A BSC kapacitása

Tekintsük a p hibavalószínűségű BSC-t. Legyen az üzenetvektorunk K hosszúságú. A vett vektor bitjei p valószínűséggel eltérnek a küldött vektor bitjeitől. Ötletünk az, hogy elküldünk egy $\mathbf{c}^1$ javítóvektort, mely K hosszú, majdnem mindenütt 0-t tartalmaz, kivéve azokban a pozíciókban, ahol az átvitel hibás. Mivel p általában

kicsi szám, ezért a javító vektorban az 1-esek előfordulása lényegesen kisebb, mint a 0-ké. Vagyis ez a javítóvektor tömöríthető. A tömöríthetőségének a határát ennek a "javítóvektor-forrásnak" az entrópiája adja meg: $H(p)$. A javítóvektor hossza (tömörítve) tehát $KH(p)$. Ez a javítóvektor azonban szintén meghibásodik p valószínűséggel, tehát egy újabb $\mathbf{c}^2$ javítókéddet kell átküldeni. Ennek (tömörítés utáni) hossza az előbbi megfontolást újból alkalmazva: $KH^2(p)$. És így tovább. Végül is a hibamentes átvitelhez szükséges összhosszúság:

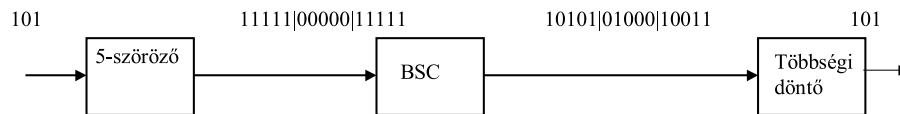
$$N = \sum_{k=0}^{\infty} KM^k(p) = K \frac{1}{1 - H(p)}$$

ahol a mértani sor összegképletét használtuk. A kapacitás tehát:

$$C = \frac{K}{N} = 1 - H(p)$$

7.2. Példa

Egy $p=0.1$ hibavalószínűségű BSC-n minden átküldött bit megötszörözésével próbáljuk javítani az összeköttetés minőségét.



7.4. ábra. A vizsgált átviteli rendszer

A többségi döntő úgy működik, hogy minden 5 bites blokkban megnézi, hogy a nullák vagy az egyesek száma nagyobb és ennek megfelelően nullát vagy egyet ad a kimenetén.

- Mennyire csökkent így a hibavalószínűség?
- Tételezzük fel, hogy ugyanazon a csatornán nem ötszörözést, hanem az elvileg leghatékonyabb hibavédelmi eljárást alkalmazva, egy 10^{13} hosszúságú blokkot viszünk át. Elvileg, az üzenet milyen mértékű megnövelése mellett várhatunk így hibamentes átvitelt?
- Mekkora lesz annak a valószínűsége, hogy egy $N = 10^6$ hosszúságú blokkban a hibák száma kisebb mint 3, ha a BSC hibavalószínűsége $p = 10^{-9}$? (Megjegyzés: Használja ki, hogy N nagy, p kicsi, valamint $Np = 10^{-3} < \infty$).

MEGOLDÁS

- Hiba akkor következik be, ha 5-ből legalább 3 hibás:

$$P_E = \sum_{i=1}^5 \binom{5}{i} p^i (1-p)^{5-i} = 10 \cdot 0.001 \cdot 0.81 + 5 \cdot 0.0001 \cdot 0.9 + 0.00001 = 0.00856$$

Azaz az eredeti hibavalószínűség kb a 12-ed részére csökkent.

b.) A BSC-re, ha elvileg a legjobb kódot alkalmazzuk, akkor az eredeti és kiterjesztett üzenet hányadosa $C = \frac{K}{N} = 1 - H(p)$, amiből

$$H(p) = p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p} = 0.33219 + 0.1368 = 0.46899$$

és

$$N = \frac{K}{1 - H(p)} = \frac{10^{13}}{0.53101} = 1.8832 \cdot 10^{13}.$$

Tanulság: Az 5-szörösítés, azaz az eredeti átviteli sebesség ötödére való csökkentése helyett, elvileg már az átviteli sebesség felére csökkentésével is biztonságos adatátvitel valósítható meg.

c.) Mivel a p hibavalószínűség kicsi és N nagy, valamint $pN = 10^{-3} < \infty$, ezért a hibák jó közelítéssel Poisson eloszlásúak lesznek:

$$P(\text{hibák száma} = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

ahol $\lambda = pN$. És végül

$$P(\text{hibák száma} < 3) = (10^{-6} + 0.510^{-6})e^{10^{-3}} = 1.5015 \cdot 10^{-6}$$

7.3. Példa

A z -csatorna olyan nem szimmetrikus bináris csatorna, amely a 0 biteket hibátlanul képes átvinni, az 1-eseknél viszont hibázik p valószínűséggel. Legyen most $p = 0.1$! Az $\mathcal{U}$ forrás, amelynek az üzeneteit szeretnénk ezen a csatornán továbbítani a következő eloszlással rendelkezik:

$$P(u = 0) = 0.8 \quad P(u = 1) = 0.2$$

Határozza meg a bináris z -csatorna

- kapacitását (a válaszában kihasználhatja, hogy az adónak tudomása van a vételi oldalon történő téves detekcióról és ennek megfelelően javító sorozatot tud küldeni),
- és hibavalószínűségét!

MEGOLDÁS

A csatorna egy N hosszú üzenetben pp_1N hibát vét ($p_1 = 0.2$ az 1-es szimbólum előfordulási valószínűsége). A javítóüzeneteket küldő forrás eloszlása:

$$p_0^{(2)} = 1 - pp - 1; \quad p_1^2 pp - 1$$

Entrópiája:

$$H(p) = -(1 - pp_1) \log_2(1 - pp_1) - pp_1 \log_2 pp_1 = 0.1414$$

Az előbbieken bemutatott gondolatmenet alapján a kapacitás most is $C = 1 - H(p)$ -nek adódik, azaz $C = 0.8586$.

A hibázási valószínűség nyilván: $pp_1 = 0.02$.

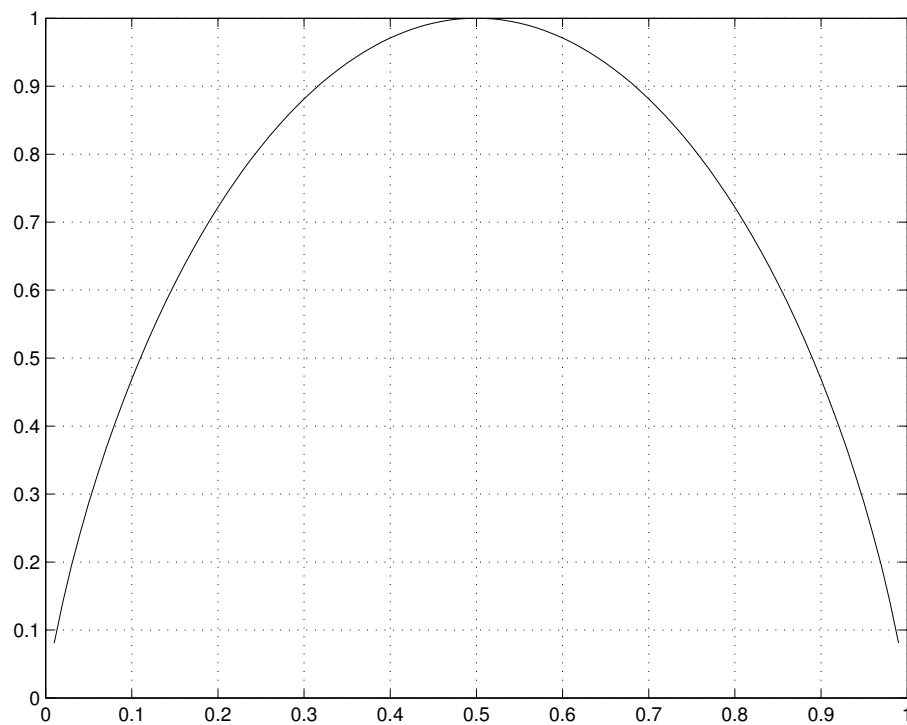
7.4. Példa

Adott egy bináris szimmetrikus csatorna p hibázási valószínűséggel, melyen $K = 250$ bit hosszú üzeneteket szeretnénk átküldeni.

a.) Legalább mekkorára kell az üzeneteket növelni ahhoz, hogy $p = 0.01$ mellett hibátlan átvitelt tudjunk elérni?

b.) Mekkora lehet a csatorna hibavalószínűsége, ha az üzenetek hosszának növekedéséből adódó sebességcsökkenés nem lehet 30%-nál több?

Az $f(x) = x \log_2 \frac{1}{x} + (1-x) \log_2 \frac{1}{1-x}$ függvény grafikonja az alábbi ábrán látható:



7.5. ábra. $f(x) = x \log_2 \frac{1}{x} + (1-x) \log_2 \frac{1}{1-x}$

MEGOLDÁS

Levezettük a bináris szimmetrikus csatorna kapacitását; ez a mennyiség pontosan azt mutatja meg, hogy mennyivel kell hosszabb üzeneteket küldeni a biztonságos adatátvitel érdekében (legalábbis elvileg).

$$C = \frac{K}{N} = 1 - H(p) = 1 - \left(p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p} \right) = 0.92$$

$$N = \frac{K}{C} = 272$$

b.)

$$C = \frac{K}{N} = 1 - H(p) = 1 - \left(p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p} \right) \geq 0.3$$

$$p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p} \leq 0.7$$

Az ábráról leolvassa a feltétel akkor teljesül, ha $p < 0.2$.

8. fejezet

Hibajavító kódolás

Az előző fejezetben tárgyalt csatornkapacitás azt mutatta meg, hogy elvileg milyen hosszú javítószorozattal kell mindenképpen kiegészíteni az üzeneteinket a hibátlan adatátvitel érdekében. Arról azonban nem esett szó, hogyan kell ilyen javítószorozatot készíteni. Ez a hibajavító kódolás kérdésköre. Itt most csak a legegyszerűbb, lineáris hibajavító kódokkal foglalkozunk.

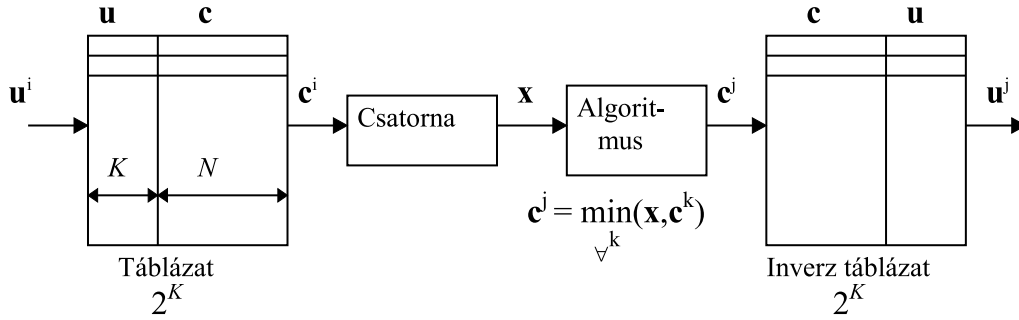
Tételezzük fel, hogy K hosszúságú bináris $\mathbf{u}^i$ üzeneteket (üzenet vektorokat) kívánunk átküldeni egy digitális csatornán, mely csatornában egy-egy bit átvitele $p > 0$ valószínűséggel hibás (szimmetrikus, memória mentes, bináris csatorna). Kódolási eljárással hiba elleni védelmet kívánunk megvalósítani, azaz automatizálni szeretnénk a hiba felismerését és annak lehetőség szerinti kijavítását. Az eredetileg K dimenziós (bináris) tér minden pontjához értelmes üzenet vektor tartozik. A hiba *felismerése* (és kijavítása) azonban csak *akkor lehetséges*, ha a hiba olyan üzenetet eredményez, ami *nem értelmezhető* értelmes kódnak. Annak érdekében, hogy „értelmezhetetlen” pontok is keletkezzenek, egy nagyobb dimenzió számú térbe (a kódok N dimenziós terébe) képezzük le az eredeti üzeneteket ($N > K$). Ezt a lépést nevezzük kódolásnak: az eredeti $\mathbf{u}^i$ üzenet helyett a hozzárendelt $\mathbf{c}^i$ kód vektort küldjük át a csatornán ($\mathbf{u}^i \Rightarrow \mathbf{c}^i$).

Jelölje $\mathbf{x}$ a vett (és esetleg hibás) N dimenziós üzenetet! Ha $\mathbf{x}$ nem tartozik az eredetileg megbeszélt kód ABC-hez (olyan pontra mutat a kódtérben, amihez nincs kód rendelve), akkor *hibát detektáltunk*.

A *hiba javítása* ezek után úgy történhet, hogy megkeressük, melyik $\mathbf{c}^k$ kódhoz van legközelebb $\mathbf{x}$. Kis p értékeknél ugyanis sokkal nagyobb a valószínűsége annak, hogy kevés bit hibásodott meg és ezért $\mathbf{x}$ „közel” marad az eredeti kódszóhoz. (Az üzenet *maximum-likelihood* becslése). Két N dimenziós bináris vektor (szám) *Hamming távolságán* azt a d egész számot értjük, ami megadja, hogy hány koordinátája (helyiértéke) különbözik a két vektornak (számoknak). ($0 \leq d \leq N$)

Több átviteli hiba esetén $\mathbf{x}$ és a helyes $\mathbf{c}^i$ kód távolsága növekszik, ugyanakkor más kódszavakhoz $\mathbf{x}$ egyre közelebb kerül.

A kód ABC-re a *minimális Hamming távolság* (d_{min}) a jellemző adat. (A két



8.1. ábra. A kódoló-dekódoló blokk-diagramja

legközelebbi kód távolsága.)

A kód hibajelző képessége (az észlelt hibák száma):

$$d_{\min} - 1 \quad (8.1)$$

A kód hibajavító képessége (a javítható hibák száma):

$$\left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor \quad (8.2)$$

ahol: $\lfloor \cdot \rfloor$ a lefelé kerekítést jelöli.

A hatékonyság érdekében olyan kódszavakat kell választani, hogy $d_{\min}$ a lehető legnagyobb legyen.

8.1. Lineáris szisztematikus kódok

A fentebb leírt kódolási eljárás hátránya, hogy a keresés 2^K db reláció kiértékelését igényli, (amire nagysebességű adatátvitelnél általában nincs elég idő) vagy 2^N méretű táblázatokat kell tárolni (nincs elég hely).

A lineáris, szisztematikus hibajavító kódok alkalmazásával a műveleti igény csak polinomiálisan növekszik az üzenetek hosszával (ellentétben az előző esettel, ahol a növekedés exponenciális).

Egy kód *lineáris*, ha $\mathbf{c}^i \in \mathbf{C}$ és $\mathbf{c}^j \in \mathbf{C}$ ekkor $\mathbf{c}^k = \mathbf{c}^i + \mathbf{c}^j \in \mathbf{C} \quad \forall i, j$. (Az összegzés átvitel nélküli összeadást jelent: bitenkénti XOR művelet.) Így : $\mathbf{c}^0 = \mathbf{c}^i + \mathbf{c}^i = \mathbf{0} \in \mathbf{C} \quad \forall i$.

Legyen: $\mathbf{u}^i = [u_1^i \ u_2^i \ \dots \ u_K^i]$ és $\mathbf{c}^i = [c_1^i \ c_2^i \ \dots \ c_K^i \ \dots \ c_N^i]$. Lineáris kódok esetén a kód képzése a $K \times N$ dimenziós $\mathbf{G}$ generátor mátrix segítségével történik:

$$\mathbf{c} = \mathbf{u}\mathbf{G}^{K,N} \quad (8.3)$$

Szisztematikus kódnak nevezzük az olyan kódokat, ahol a kód eleje maga az üzenet:

$$\mathbf{c} = [\mathbf{u}, \mathbf{p}] = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_K \ p_{K+1} \ \dots \ p_N] \quad (8.4)$$

ekkor $\mathbf{G}$ speciális felépítésű:

$$\mathbf{G}^{K,N} = [\mathbf{I}^{K,K} \quad \mathbf{A}^{(N-K),K}] \quad (8.5)$$

ahol $\mathbf{I}^{K,K}$ egy $K \times K$ dimenziós egységmátrix. A vételi oldalon az átviteli hibák felfedésére és javítására az $(N-K) \times N$ dimenziós $\mathbf{H}$ (ú.n. *paritás ellenőrző*) mátrixot használjuk. Ettől azt követeljük, hogy teljesüljön:

$$\mathbf{H}\mathbf{c}^T = \mathbf{0} \quad (8.6)$$

ahol T a transzponáltat jelöli. A (7.4.) alapján írhatjuk:

$$\mathbf{H}\mathbf{c}^T = \mathbf{H}\mathbf{G}^T \mathbf{u}^T = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{u} \quad (8.7)$$

amiből:

$$\mathbf{H}\mathbf{G}^T = \mathbf{0} \quad (8.8)$$

Egyszerűen belátható, hogy a szorzat akkor adja a zérus mátrixot, ha:

$$\mathbf{H}^{(N-K),N} = [\mathbf{A}^{(N-K),K^T} \quad \mathbf{I}^{(N-K),(N-K)}] \quad (8.9)$$

Írjuk fel az $\mathbf{x}$ vett üzenetet a küldött $\mathbf{c}$ kód és egy $\mathbf{e}$ hibavektor (error) összegeként:

$$\mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{e} \quad (8.10)$$

Ahol az $\mathbf{e}$ vektorban „1” a koordináta értéke, ott az aktuális bit az ellenkezőjére vált, azaz hiba keletkezik (XOR művelet). Ugyanakkor a (8.10) összefüggés fordítottja is érvényes. Ha ismernénk az $\mathbf{e}$ vektort, akkor vissza tudnánk állítani az $\mathbf{x}$ hibás üzenetből a hibátlan kódot (XOR):

$$\mathbf{c}' = \mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (8.11)$$

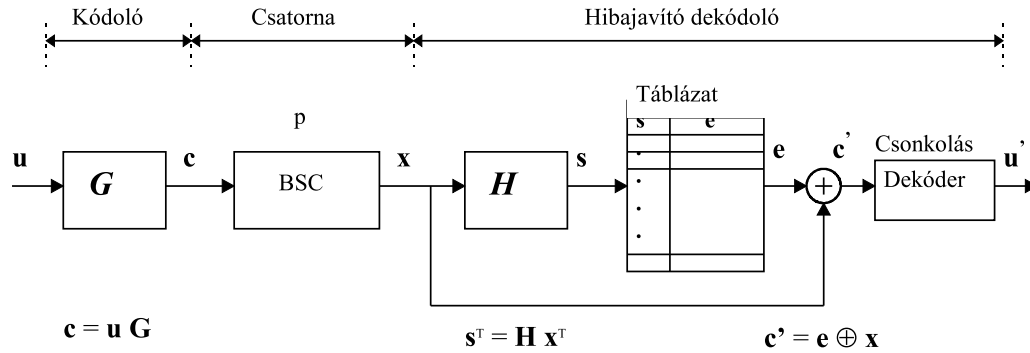
Vegyük észre, hogy az $\mathbf{e}$ -ben lévő „1”-esek száma: az üzenetben lévő hibák számát adja. A hiba vektor meghatározását az $\mathbf{s}$ *szindróma vektor* kiszámításával fogjuk kezdeni.

$$\mathbf{s} = \mathbf{H}\mathbf{x}^T \quad (8.12)$$

A (8.10) és a (8.6) alapján:

$$\mathbf{s} = \mathbf{H}\mathbf{x}^T = \mathbf{H}(\mathbf{c}^T + \mathbf{e}^T) = \mathbf{H}\mathbf{c}^T + \mathbf{H}\mathbf{e}^T = \bar{\mathbf{0}} + \mathbf{H}\mathbf{e}^T = \mathbf{H}\mathbf{e}^T \quad (8.13)$$

Az eredményül kapott $\mathbf{s} = \mathbf{H}\mathbf{e}^T$ összefüggésből a hibavektort egyszerűen nem tudjuk kifejezni, mivel a $\mathbf{H}$ paritás ellenőrző mátrix nem négyzetes mátrix, így az nem invertálható. (Viszont a tervezés fázisában kiszámíthatjuk és táblázatba foglalhatjuk az összes lehetséges hibavektorhoz tartozó szindróma vektort, mely táblázatból – fordított irányban – ki tudjuk olvasni az adott szindrómához rendelt hiba vektort.) A vételi oldalon elvégezzük a (8.12) műveletet, majd az $\mathbf{s}$ szindróma vektor ismeretében az inverz táblázat segítségével meghatározzuk az $\mathbf{e}$ hiba vektort. A (8.10)



8.2. ábra. A kódolás és dekódolás szemléltetése

felhasználásával kiszámítjuk a javított $\mathbf{c}'$ kódvektort, amiből egyszerű csonkolással kinyerhető az $\mathbf{u}$ üzenet (szisztematikus kód). A fenti eljárás természetesen az összes elképzelhető hibát nem tudja kijavítani. Az inverz táblázat elkészítése ugyanis nem egyértelmű. Az N dimenziós hibavektorok lehetséges száma 2^N , az $(N - K)$ dimenziós szindróma vektorok lehetséges száma viszont csak $2^{(N-K)}$. Így az inverz táblázat nem lesz egyértelmű: azonos szindrómákhoz több hiba vektor is tartozik.

Az egyes szindrómákhoz az összetartozó hibavektorok közül azt a hibavektort választjuk, melyekben az „1”-esek száma a lehető legkisebb. Ugyanis kis hibavalószínűségű csatorna esetén a kevés hibának sokkal nagyobb a valószínűsége mint a több hibának (*maximum-likelihood* becslés).

8.2. Példa: Hibajavító lineáris kódoló tervezése

Tervezzünk lineáris hibajavító kódolót $\mathbf{C}(5,2)$ kódok használatával ($N = 5$ és $K = 2$). A kódoló generátor mátrixa legyen:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ahol} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Adjuk meg a kódszavakat! Lineáris-e a kód?
- Milyen hibajavítási és hibajelzési képességgel rendelkezik a kód?
- Határozzuk meg a $\mathbf{H}$ paritásellenőrző mátrixot!
- Tervezzük meg a szindróma dekódolási táblázatot!
- Ha a memóriamentes, szimmetrikus, bináris csatorna hibavalószínűsége $p = 10^{-3}$, mekkora lesz annak a valószínűsége, hogy a csatornában kettőnél több hiba keletkezik?

MEGOLDÁS

- Az üzenet vektorok: $\mathbf{u}^0 = [0 \ 0]$, $\mathbf{u}^1 = [0 \ 1]$, $\mathbf{u}^2 = [1 \ 0]$ és $\mathbf{u}^3 =$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, A kód vektorok $\mathbf{c} = \mathbf{u} \mathbf{G}$ alapján:

$$\begin{aligned}\mathbf{c}^0 &= [0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ \mathbf{c}^1 &= [0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1] \\ \mathbf{c}^2 &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1] \\ \mathbf{c}^3 &= [0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0]\end{aligned}$$

A kód lineáris, mert: $\mathbf{c}^0 = \mathbf{0}$ és teljesül a $\mathbf{c}^k = \mathbf{c}^i + \mathbf{c}^j \in \mathbf{C}$ feltétel, ahol: $i, j, k = 0, 1, 2, 3$. A kód szisztematikus, mert $\mathbf{c}^i = [\mathbf{u}^i, \mathbf{p}^i]$.

b.) A kódszavak Hamming távolsága:

$$\begin{aligned}d(0, 1) &= 3, & d(0, 2) &= 3, & d(0, 3) &= 4 \\ d(1, 2) &= 4, & d(1, 3) &= 3, \\ d(2, 3) &= 3\end{aligned}$$

A minimális Hamming távolság: $d_{\min} = 3$,

A kód hibajelző képessége: $d_{\min} - 1 = 2$,

A kód hibajavító képessége: $\left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor = 1$.

c.) A paritás ellenőrző mátrix:

$$\mathbf{H}_{3,5} = [\mathbf{A}_{3,2}^T \ \mathbf{I}_{3,3}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d.) Az $\mathbf{s} = \mathbf{H}\mathbf{e}^T$ összefüggésből kiszámítjuk a szindróma vektorokat olyan sorrendben, hogy a hibavektorokban az „1”-esek száma növekedjen:

$\mathbf{e}(\text{dec})$	$\mathbf{e}(\text{bin})$	„1” száma	$\mathbf{s}(\text{bin})$	$\mathbf{s}(\text{dec})$
0.	00000	0	000	0.
1.	00001	1	001	1.
2.	00010	1	010	2.
4.	00100	1	100	4.
8.	01000	1	101	5.
16.	10000	1	011	3.
3.	00011	2	011	-
5.	00101	2	101	-
6.	00110	2	110	6.
9.	01001	2	100	-
10.	01010	2	111	7.
12.	01100	2	001	-
17.	10001	2	010	-
18.	10010	2	001	-
20.	10100	2	111	-
24.	11000	2	110	-
7.	00111	3	111	-
11.	01011	3	110	-
13.	01101	3	000	-
14.	01110	3	011	-
19.	10011	3	000	-
21.	10101	3	110	-
22.	10110	3	101	-
25.	11001	3	111	-
26.	11010	3	100	-
28.	11100	3	010	-
23.	10111	4	100	-
15.	01111	4	010	-
27.	11011	4	101	-
29.	11101	4	011	-
30.	11110	4	000	-
31.	11111	5	001	-

A táblázat kitöltését a 10. jelű sora után abbahagyhattuk volna, mivel addigra a szindróma szavak összes lehetséges kombinációja már előállt. A szindróma szavakhoz tartozó hibavektorok egy lehetséges hozzárendelése:

$s(\text{dec})$	$s(\text{bin})$	$e(\text{bin})$
0.	000	00000
1.	001	00001
2.	010	00010
3.	011	10000
4.	100	00100
5.	101	01000
6.	110	00110
7.	111	01010

A dekódoló rendszert kialakíthatjuk úgy, hogy a 6. és 7. szindróma szavak kialakulását észlelve, a rendszer hibajelzést (figyelmeztetést) szolgáltatson.

Az alábbi táblázat a dekódolás $\mathbf{c}'$ eredményét (számítógépes kiértékelését) mutatja az összes lehetséges $\mathbf{x}$ bemeneti vektor függvényében. Tételezzük fel, hogy az átvitel hibák száma (hsz) egy szóban maximálisan 2. A táblázatban $\mathbf{c}$ jelöli a küldött kódot, az $\mathbf{x}$ -ben a félkövér karakter jelöli a hiba helyét.

x(dec)	x(bin)	hsz	c	s	e	c'	javítás után	hiba jelzés
0.	00000	0	00000	000	00000	00000	ok	-
1.	00001	1	00000	001	00001	00000	ok	-
2.	00010	1	00000	010	00010	00000	ok	-
3.	00011	1	10011	011	10000	10011	ok	-
4.	00100	1	00000	100	00100	00000	ok	-
5.	00101	1	01101	101	01000	01101	ok	-
6.	00110	2	00000	110	00110	00000	ok	+
7.	00111	2	01101	111	01010	01101	ok	+
8.	01000	1	00000	101	01000	00000	ok	-
9.	01001	1	01101	100	00100	01101	ok	-
10.	01010	2	00000	111	01010	00000	ok	+
11.	01011	2	01101	110	00110	01101	ok	+
12.	01100	1	01101	001	00001	01101	ok	-
13.	01101	0	01101	000	00000	01101	ok	-
14.	01110	1	11110	011	10000	11110	ok	-
15.	01111	1	01101	010	00010	01101	ok	-
16.	10000	1	00000	011	10000	00000	ok	-
17.	10001	1	10011	010	00010	10011	ok	-
18.	10010	1	10011	001	00001	10011	ok	-
19.	10011	0	10011	000	00000	10011	ok	-
20.	10100	2	00000	111	01010	11110	hiba	+
21.	10101	2	01101	110	00110	10011	hiba	+
22.	10110	1	11110	101	01000	11110	ok	-
23.	10111	1	10011	100	00100	10011	ok	-
24.	11000	2	00000	110	00110	11110	hiba	+
25.	11001	2	01101	111	01010	10011	hiba	+
26.	11010	1	11110	100	00100	11110	ok	-
27.	11011	1	10011	101	01000	10011	ok	-
28.	11100	1	11110	010	00010	11110	ok	-
29.	11101	1	01101	011	10000	01101	ok	-
30.	11110	0	11110	000	00000	11110	ok	-
31.	11111	1	11110	001	00001	11110	ok	-

Ugyanakkor ha a hibák száma nagyobb mint 2, akkor előfordulhat, hogy *nem kapunk hibajelzést* miközben az átvitel hibás. Például ha a küldött kód [00000] és a hibák száma 4 (úgy, hogy a táblázat 29. sora szerinti **x** vektort kapjuk), a „javított” **c'** [01101] lesz.

x(dec)	x(bin)	hsz	c	s	e	c'	javítás után	hiba jelzés
29.	11101	4	00000	011	10000	01101	hiba	-

e.) A memória mentes, bináris, szimmetrikus csatornában egy bit átvitelekor keletkező hiba valószínűsége legyen: p ($= 10^{-3}$). Annak az eseménynek a valószínűsége, hogy a hiba nem lép fel: $1-p$ ($= 0.999$).

Több bit átvitelekor a csatornában a hibák elmaradása illetve bekövetkezése egymástól *független eseménynek* tekinthető. Annak valószínűsége ezért, hogy mind az 5 bit hibátlan:

$$P_0 = P(e_1 = 0 \text{ és } e_2 = 0 \text{ és } e_3 = 0 \text{ és } e_4 = 0 \text{ és } e_5 = 0) = (1-p)^5 = 0.9860$$

Hasonlóan, ha mind az 5 bit hibás:

$$P_5 P(e_1 = 1 \text{ és } e_2 = 1 \text{ és } e_3 = 1 \text{ és } e_4 = 1 \text{ és } e_5 = 1) = p^5 = 10^{-15}$$

Ha az 5 bitből k darab hibás (ez az esemény „5 alatt a k ”-féle képpen lehetséges):

$$P_k = \binom{5}{k} p^k (1-p)^{5-k}$$

Így:

$$P_1 = \binom{5}{1} p (1-p)^4 = \frac{5!}{1!4!} p (1-p)^4 = 5p (1-p)^4 = 4.980 \cdot 10^{-3}$$

$$P_2 = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = \frac{5!}{2!3!} p^2 (1-p)^3 = 10p^2 (1-p)^3 = 9.997 \cdot 10^{-6}$$

$$P_3 = \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 = \frac{5!}{3!2!} p^3 (1-p)^2 = 10p^3 (1-p)^2 = 9.998 \cdot 10^{-9}$$

$$P_4 = \binom{5}{4} p^4 (1-p) = \frac{5!}{1!4!} p^4 (1-p) = 5p^4 (1-p) = 4.995 \cdot 10^{-12}$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy a hibák száma nagyobb mint kettő:

$$P(\text{h.sz.} > 2) = P_3 + P_4 + P_5 \cong 10^{-8}$$

8.3. Példa

Egy lineáris, szisztematikus blokk-kódban a paritásелеmek száma 16.

- Meghatározható-e a kódszavak hosszának ismerete nélkül, milyen méretű a hibajavítási folyamat során előállított szindrómavektor?
- Milyen kódszóméret választása esetén biztosítható, hogy a kód javítson minden egyhibás hibamintát?
- Milyen kódszóméretek esetén képzelhető el, hogy a kód minimális távolsága 5?
- Általánosítsa a c) kérdésre adott válaszát!

MEGOLDÁS

- A szindrómavektornak annyi eleme van, mint a paritásелеmek száma, tehát 16.
- Az egyhibás hibaminták száma legfeljebb annyi lehet, ahány (nem csupa nulla komponensű) szindróma van. Ez viszont $2^{16} - 1 = 65\,535$. Tehát n *legfeljebb* 65 535.

c.) Ha a kódtávolság 5, akkor legfeljebb két hibás kódszavak javíthatók. Ezt felismerve hasonlóan gondolkodhatunk, mint az előbb: a legfeljebb kéthibás hibaminták száma

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2} \leq 2^{16} - 1.$$

Ez $n = 361$ -re még igaz, 362-re már nem. Tehát legfeljebb 361 bites blokkok esetén lehet (esetleg) 5 a kódtávolság, hosszabb bloknál semmiképpen sem (legalábbis így, hogy megkötöttük a paritásелемек számát).

d.) Bizonyára többféle általánosítási lehetőség is felmerülhet. Egy kézenfekvő változat az ún. Hamming korlát, amely szerint ahhoz, hogy egy bináris kód t hibát javítson (a kódtávolsága legalább $2t + 1$ kell legyen), teljesülnie kell a

$$\sum_{i=0}^t \binom{n}{i} \leq 2^{n-k},$$

relációnak.

8.4. Példa

Adott egy lineáris kód a

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

paritásmátrixával.

- Határozza meg a generátormátrixot!
- Számítsa ki a kódszavakat!
- Adja meg a minimális kódtávolságot!
- Optimális dekódolási algoritmust használva hány darab hibát lehet jelezni és hány darab hibát lehet kijavítani?

MEGOLDÁS

a.) A Generátormátrix:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ugyanis szisztematikus kód esetén $\mathbf{H} = [\mathbf{A}, \mathbf{I}]$ és $\mathbf{G} = [\mathbf{I}, \mathbf{A}^T]$.

b.) A kódszavakat $\mathbf{c} = \mathbf{uG}$ szorzások útján kapjuk:

Kódszavak	$d(\mathbf{c}, 00000)$	$d(\mathbf{c}, 10110)$	$d(\mathbf{c}, 01101)$
00 000	-		
10 110	3	-	
01 101	3	4	-
11 011	4	3	3

- c.) A táblázatból kiolvasható, hogy $d_{\min} = 3$.
 d.) Hibajelzés: $d_{\min} - 1 = 2$. Hibajavítás: $\left\lfloor \frac{d_{\min}}{2} \right\rfloor = 1$.

8.5. Példa

Adott egy lineáris hibajavító kód a generátormátrixával:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- a.) Határozza meg a kód paritás mátrixát!
 b.) Döntse el, hogy a $[0\ 0\ 0\ 1\ 1]$ vektor eleme-e a kódnak.
 c.) A kapott eredmények alapján indokolja meg, miért értelmetlen ezen kód használata?

MEGOLDÁS

A kód nem szisztematikus, így a paritásmátrix meghatározásához a definícióból kell kiindulni:

$$\mathbf{G}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$$

vagyis $\mathbf{H}$ minden $\mathbf{h}_i$ sorára teljesülni kell, hogy

$$\mathbf{G}\mathbf{h}_i^T = \mathbf{0} \quad \forall i$$

Legyen $\mathbf{h} = [a\ b\ c\ d\ e]$. Ekkor az előzők alapján három egyenlet írható föl:

1. $a + b + d + e = 0$
2. $c + d = 0$
3. $a + c + e = 0$

Mivel modulo 2 számolunk, ezért a 2. egyenletből következik, hogy $c = d$. Ezt felhasználva és a 2. ill. 3. egyenletet összeadva adódik, hogy $b = 0$. Azaz $c = d$, $b = 0$ és $a + c + e = 0$. Ez utóbbinak 4 megoldása van, ezeket végignézzük, majd a ??? ellenőrzést hajtjuk végre:

A paritásmátrix tehát

ace	$abcde$	ellenőrzés
000	00000	-
011	00111	+
110	10110	-
101	10001	+

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az, hogy egy vett szó kódszó-e, úgy dönthető el, hogy a vett vektort megszorozzuk a paritásmátrix transzponáltjával. Ha az így kapott szindróma vektor minden komponense 0, akkor a vett szó kódszó, ellenkező esetben hiba történt. Rögtön látszik viszont, hogy a paritásmátrixnak a 2. oszlopa csupa 0, ami azt jelenti, hogy a vett vektor második bitje akármi is legyen, a paritásmátrix ezzel a pozícióval "nem törődik", így ez a kód hibajelzésre is alkalmatlan, nemhogy hibajavításra. Így ezen kód használata teljesen értelmetlen.

8.6. Példa

A bináris, szisztematikus (23,12) Golay-kód 3 hiba javítására képes.

- Hány hiba jelzésére lehet alkalmas ez a kód?
- Hányféle szindróma képződhet a kód alkalmazásakor? Hány szindróma jelez egy-, két- és háromhibás hibamintát?
- Mutassa meg, hogy ez a kód nem lehet alkalmas négy hiba javítására.
- Mely elemei hibásodhattak meg a kódszónak, ha a dekódolásnál számolt szindróma $\mathbf{s} = [00100000100]$?

MEGOLDÁS

- A javítható hibák száma a minimális Hamming-távolságtól függ: $3 = \left\lfloor \frac{d_{min}}{2} \right\rfloor$. Ebből az következik, hogy $6 \leq d_{min} \leq 7$. A jelezhető hibák száma tehát legfeljebb $d_{min} - 1 = 6$.
- A szindróma vektornak $n - k = 23 - 12 = 11$ komponense van, tehát összesen $2^{11} = 2048$ -féle szindrómavektor lehetséges. Mivel a kód 3 hibát javítani tud, ezért biztosak lehetünk, hogy az összes lehetséges 1, 2 és 3-hibás hibamintákhoz "egyedi" szindróma van a dekódolási táblázatban. Ezek után csak az a kérdés, mennyi 1, 2, 3-hibás hibaminta létezik összesen. Az m -hibás hibaminták száma $\binom{n}{m}$, amiből az 1-, 2- és 3-hibás hibaminták száma rendre 23, 253 ill. 1771.
- Ha ehhez még hozzávesszük a csupa 0 vektort, akkor éppen 2048-at kapunk, vagyis elfogytak a szindrómák, így önálló szindróma másféle hibát nem jelezhet és nem javíthat. (Ez is "csoda".)
- A paritásellenőrző mátrix (illetve transzponáltja) ismeretlen, de mivel a kód szisztematikus, ezért tudjuk, hogy az alsó 11 sora egységmátrix. A szindróma e sorok lineárkombinációja. Az egy, két ill. három egyest tartalmazó szindrómák létrejöhetnek az említett egységmátrix egy, két ill. három sorának összeadásával, sőt csakis ezek jellemezhetik az efféle szindrómákhoz tartozó javítható hibamintákat. Mindebből következik, hogy a megadott szindróma egy kódszó $12+3=15$., ill. $12+9=21$. elemének hibáját jelzi.