

Kalkulus harmadik feladatsor

Gauss-elimináció

1. Hány ismeretlen szerepel az alábbi lineáris egyenletrendszerben? Hány egyenlet? Írjuk fel a kibővített együttható mátrixot! Milyen méretű lesz ez a mátrix?

$$\begin{aligned}x + y + z + 2u + v &= 2 \\ -2x - 2y - 6z - 8u &= 10 \\ 2y - 3z - u &= 17 \\ -x - y + z + 4v &= 9\end{aligned}$$

2. Tegyük fel, hogy az alábbi mátrixok egy lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixai. Hány olyan egyenlet van, amely nem fejezhető ki a többiből, azaz hány érdemi egyenlet?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 13 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -6 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Oldjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi lineáris egyenletrendszereket!

a,

$$\begin{aligned}2x + 3y + 2z &= 7 \\ 4x + 3y + 3z &= 10 \\ 6x + 8z &= 14\end{aligned}$$

b,

$$\begin{aligned}x + 3y + 5z &= -5 \\ -3x - 8z &= 19 \\ x + 21y + 19z &= 3\end{aligned}$$

c,

$$\begin{aligned}x + 4y + 2z &= -1 \\ 3x + 17y + 7z &= -11 \\ -x + 6y &= 8\end{aligned}$$

4. Legyen A egy olyan valós számokból álló mátrix, amelyről tudjuk, hogy determinánsa 1, azaz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, ahol $ad - bc = 1$. Számítsuk ki a $B = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ mátrixszal vett szorzatát. Ennek felhasználásával bizonyítsuk be, hogy bármely 2×2 -es $C = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ mátrixra, amelyre $\det(C) \neq 0$ teljesül, hogy $C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \begin{bmatrix} h & -f \\ -g & e \end{bmatrix}$