2017/2018.

Bevezetés a számításelméletbe 1

Kidolgozott vizsgatételek

Összeállította: Csia Kitti

Tartalomjegyzék

Felhasznált irodalom:

Szeszlér Dávid - Bevezetés a számításelméletbe 1

Fleiner Tamás - A számítástudomány alapjai

Talált **HIBA** esetén jelzés: nospatium@gmail.com

BACK

1. tétel: Számelmélet, kongruencia

Tételcím

Oszthatóság, prímszámok, a számelmélet alaptétele (csak a felbonthatóság bizonyításával). Prímek száma, $\pi(n)$ nagyságrendje (bizonyítás nélkül). Kongruencia fogalma, alapműveletek kongruenciákkal.

1. Oszthatóság

- Definíció
  - $a \in \mathbb{Z}$ osztója $b \in \mathbb{Z}$, ha létezik olyan $c \in \mathbb{Z}$, melyre $a \cdot c = b$
  - ugyanezt fejezzük ki, ha b-t az a *többszörös*ének mondjuk
- Jelölés
  - ha a osztója b-nek: $a|b$
  - ha a nem osztója b-nek: $a \nmid b$
  - *valódi osztó*ja, ha fennáll $a|b$ és $1 < |a| < |b|$
- Példa
  - **igaz**: $13|91$, $-7|63$, $2|0$, $-8 \nmid -36$, még $0|0$ hiszen $0 \cdot c = 0$ bármilyen c-re igaz

2. Prímszám

- Definíció
  - $p \in \mathbb{Z}$ prímszámnak nevezzük, ha $|p| > 1$ és p-nek nincs valódi osztója
    - $|p| > 1$ kikötés a $-1, 0, 1$ számok miatt kell, ugyanis ezek se nem prímek, se nem összetettek
  - tehát $p = a \cdot b$ csak akkor lehetséges, ha $a = \pm 1$ vagy $b = \pm 1$
  - ha $|p| > 1$ és p nem prím, akkor *összetett szám*

[K1] megjegyzést írt: A lilával szedett, dőlt szövegek általában egy addig elő nem fordult fontos szó, definíció vagy tétel neve, melynek ismerete fontos.

3. Számelmélet alaptétele

- **Tétel**
  - **(1)** minden 1-től, 0-tól, (-1) -től különböző $\mathbb{Z}$ szám felbontható prímek szorzatára
  - **(2)** ez a felbontás tényezők sorrendjétől, előjelétől eltekintve egyértelmű
    - pl. 100 felbontása lehet $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ vagy $(-5) \cdot 2 \cdot 5 \cdot (-2)$
- **Bizonyítás (1)**
  - *(felbonthatóság bizonyítása)*
  - tetszőleges $n \in \mathbb{Z}$ felbontása $|n| > 1$ *prímtényezők* szorzatára
  - eljárás végig fenntartja az n egy (± 1-től különböző) egészek szorzatára való bontását
  - ha $n = a_1 \cdot \ldots \cdot a_k$, ahol a_i mind prím → eljárás megáll
  - ha tényezők között van összetett szám pl. a_i → van valódi osztója, így felírható: $a_i = b \cdot c$, ahol $|b|, |c| > 1$, a_i helyettesíthető $b \cdot c$-vel → eljárás folytatódik
  - felbontáskor tényezők száma mindig 1-gyel nő, tényező | | legalább 2 → eljárás véges sok lépésben elvégezhető (max. $\log_2 |n|$ tényezős szorzattal)

4. Prímek számossága

- **Tétel**
  - prímek száma végtelen
- **Bizonyítás**
  - TFI. prímek száma véges
  - $p_1, \ldots, p_k$ az összes +p
  - ! $N = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$ → N prímtényezők szorzatára bomlik vagy maga is prím
  - N nem osztható egyik p-vel sem, mert +1 maradékot ad mindig, így N minden prímtényezője hiányzik p_k felsorolásból → ellentmondás

[K2] **megjegyzést írt:** Szintén egészek.

[K3] **megjegyzést írt:** Tegyük fel indirekten, hogy…

[K4] **megjegyzést írt:** Pozitív prím.

[K5] **megjegyzést írt:** Legyen

[K6] **megjegyzést írt:** Előző tételnek megfelelően.

5. Szomszédos prímek

- Tétel
  - minden $N > 1$ $\mathbb{Z}$ találhatóak olyan $p < q$ prímek, hogy p és q között nincs további prím és $q - p > N$
- Bizonyítás
  - be kell látni, hogy létezik N db szomszédos összetett szám
    - ezeknél kisebb prímek közül a legnagyobb p
    - ezeknél nagyobb prímek közül legkisebb q
  - ! $a_i = (N+1)! + i$
    - $i = 2, 3, \dots, (N+1)$
    - N db $a_2, a_3, \dots, a_{N+1}$
    - összetettek, mert minden $2 \le i \le N+1$ esetén a_i-nek valódi osztója $i \to (N+1)!$ nyilván osztható $\to$ i-t adva ismét i-vel osztható számot kapunk

6. Nagy prímszámtétel

- Tétel

  $\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n}$ vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{\frac{n}{\ln n}} = 1$

  - $\pi(n)$ értékére jó becslés $\frac{n}{\ln n}$ abban az értelemben, hogy a becslés relatív hibája n növekedtével 0-hoz konvergál

7. Kongruencia

- Definíció
  - ! $a, b, m \neq 0, \in \mathbb{Z}$ *kongruens* b modulo m, ha a-t és b-t m-mel maradékosan osztva azonos maradékot kapunk
- Jelölés
  - $a \equiv b\ (m)$
- Állítás
  - fenti akkor és csak akkor igaz, ha $m | a - b$
- Bizonyítás
  - ! a maradéka r_1 és b maradéka r_2, m-mel osztva
  - valamely $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, ahol $0 \le r_1, r_2 \le m - 1$

[K7] megjegyzést írt: Aszimptotikus egyenlőség: $a_n \approx b_n \to$ tehát a_n sorozat akkor aszimptotikusan egyenlő b_n-nel, ha a 2 sorozat hányadosa 1-hez konvergál.

[K8] megjegyzést írt: Legyen…

- $a = k_1 \cdot m + r_1$
- $b = k_2 \cdot m + r_2$

▪ a és b szerep szimmetrikus → $r_1 \geq r_2$:

$a - b = (k_1 - k_2) \cdot m + (r_1 - r_2) \qquad /:m$

- maradék $r_1 - r_2$

▪ $m|a - b$ akkor teljesül, ha $r_1 = r_2$,

▪ definíció szerint ez *ekvivalens* ezzel: $a \equiv b\ (m)$

8. Alapműveletek kongruenciákkal

○ **Tétel**

▪ TFH. $a \equiv b\ (m)$ és $c \equiv d\ (m)$ fennállnak $a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}, \mathrm{k} \geq 1$ tetszőleges

(1) $a + c \equiv b + d\ (m)$

(1) $a - c \equiv b - d\ (m)$

(2) $a \cdot c \equiv b \cdot d\ (m)$

(3) $a^k \equiv b^k\ (m)$

○ **Bizonyítás (1)**

▪ előző definícióra alapozva

▪ m-mel osztható számok (+) és (-) is m-mel osztható →

$m|(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$

$m|(a - b) - (c - d) = (a - c) - (b - d)$

- definíció miatt ismét igaz

○ **Bizonyítás (2)**

▪ mivel egy m-mel osztható szám bármely többszöröse is m-mel osztható, így

$m|a - b$

$m|c \cdot (a - b)$

$m|a \cdot c - b \cdot c$

- (hasonló $b(c - d)$), tehát:

$m|(ac - bc) + (bc - bd) = ac - bd$

- **Bizonyítás (3)**
  - Bizonyítás **(2)**-re alapozva, de itt most $c = a$ és $d = b$
  - ekkora kapjuk: $a^2 \equiv b^2\ (m)$
  - újra alkalmazva előző bizonyítást kapjuk: $a^3 \equiv b^3\ (m)$
  - és ezt folytatva jutunk el: $a^k \equiv b^k\ (m)$

9. A kongruencia tétel

- **Tétel**
  - ! a, b, c, m tetszőlegesek és $d = (c, m)$
  - $a \cdot c \equiv b \cdot c\ (m)$
  - akkor, és csak akkor igaz, ha $a \equiv b\ \left(\frac{m}{d}\right)$
- **Bizonyítás**
  - ! $c' = \frac{c}{d}$ és $m' = \frac{m}{d}$ ($c', m' \in \mathbb{Z}$, mert d közös osztójuk)
  - $(c', m') = 1$, ellenkező esetben d egy d-nél nagyobb közös osztó volna
  - kongruencia állítás:

    $a \cdot c \equiv b \cdot c\ (m) \rightarrow\ m|ac - bc = c(a - b)$

    - ez ekvivalens azzal, hogy:
    - $m'|c'(a - b) \rightarrow$ tovább ekvivalens $m'|a - b$

[K9] megjegyzést írt: $d = (c, m)$, tehát $d = c$ és m legnagyobb közös osztójával.

[K10] megjegyzést írt: Mert az $m \cdot k = c(a - b)$ egyenlet is ekvivalens az $m' \cdot k = c'(a - b)$

BACK

2. tétel:
Lineáris kongruencia

Tételcím

Lineáris kongruenciák: a megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele, a megoldások száma. Euklideszi algoritmus, annak lépésszáma, alkalmazása lineáris kongruenciák megoldására is (konkrét, megadott példán).

1. Eukleideszi algoritmus

- Definíció
  - input: $a, m\ (0 < a < m)$
  - output: (a, m)
  - **1. lépés:**
    - m-et maradékosan osztjuk a-val, megkapva a maradékot, felírjuk őket a következő módon:

      $$a = b \cdot q_1 + r_1$$
  - **2. lépés:**
    - a-t elosztjuk a kapott maradékkal:

      $$b = r_1 \cdot q_2 + r_2$$
  - **… i. lépés:**
    - $(i-2)$ lépésben kapott maradékot elosztjuk $(i-1)$.-ben kapottal:

      $$r_{i-2} = ri - 1 + r_i$$
  - **utolsó lépés:**
    - akkor érünk el ide, ha $r_i = 0$, ekkor r_{i-1} lesz az lnko

2. Eukleideszi algoritmus

- Állítás
  - Eukleideszi algoritmus végrehajtása után $r_k = (a, m)$

[K11] megjegyzést írt: Példa:
$(121, 39)$ legnagyobb közös osztója:
$121 = 39 \cdot 3 + 4$
$39 = 4 \cdot 9 + 3$
$4 = 3 \cdot 1 + 1 \rightarrow$ maradék 1, megoldások száma tehát: 1

[K12] megjegyzést írt: a, m legnagyobb közös osztóját kapjuk meg.

- **Bizonyítás**
  - $m \equiv r_1 \ (a)$
  - ha $a \equiv b \ (m)$ teljesül, akkor $(a, m) = (b, m)$
    - ezt alkalmazva: $(a, m) = (a, r_1)$

      $a \equiv r_2 \ (r_1)$

      $(a, r_1) = (r_1, r_2) \rightarrow$

      $(a, m) = (a, r_1) = (r_1, r_2) = \ldots = (r_{k-1}, r_k)$
  - legutolsó $(k+1)$ lépés szerint

    $r_k | r_{k-1} \rightarrow (r_{k-1}, r_k) = r_k$

3. Eukleideszi algoritmus lépésszáma

- **Állítás**
  - Eukleideszi algoritmus *polinomiális idő*ben lefut
  - legfeljebb $2 \cdot [\log_2 a]$ maradékos osztás után áll meg
- **Bizonyítás**
  - vizsgáljuk meg az eljárás egy tetszőleges lépést:
    - $r_{i-2} = t_i \cdot r_{i-1} + r_i$, ahol a fentiek szerint

      $r_{i-2} > r_{i-1} > r_i$
  - tehát:
    - $t_i \geq 1$ ($r_{i-2} > r_{i-1}$ miatt) következik:
    - $r_{i-2} \geq r_{i-1} + r_i$, ebből viszont
    - $r_{i-1} > r_i$ miatt $\rightarrow r_{i-2} > 2r_i$
  - így az eljárás páros számú soraiból ezt kapjuk:

    $a = r_0 > 2r_2 > 4r_4 > \ldots > 2^k \cdot r_{2k}$
  - a $k = [\log_2 a]$ választással $2^k \geq a$
  - (TFI r_{2k} maradékkal még nem ért véget)
    - $0 < r_{2k} < \frac{a}{2^k} \leq 1 \rightarrow$ ellentmondást kapnánk

[K13] megjegyzést írt: Ebből következik, hogy az Eukleideszi algoritmus polinomiális futásidejű (de még ezen belül is nagyon hatékony), hiszen $\log_2 a$ az a jegyei számának konstanszorosa.

4. Lineáris kongruenciák megoldhatósága

- **Tétel**
  - $a \cdot x \equiv b\ (m)$ lineáris kongruencia akkor és csak akkor megoldható, ha $(a, m)|b$
  - ha teljesül, akkor megoldásainak száma modulo m egyenlő (a, m)-val
- **Bizonyítás**
  - *(szükségesség igazolása)*
    - $!\, d = (a, m),\ a = a'd,\ \ m = m'd$
    - ha az $a \cdot x \equiv b\ (m)$ megoldható, akkor

$d \mid m \mid ax - b \rightarrow$

$d \mid a \mid ax \rightarrow$

$d \mid ax - (ax - b) = b$

  - TFH. $d \mid b$, azaz $b = db' \quad /: d$ (modulust is)
  - $a'x \equiv b'(m')$
  - mivel $d = (m, a)$, így leosztás után $(a', m') = 1$
  - Eukleideszi algoritmus segítségével lnko előáll → kiszámíthatunk olyan $k, l\ \in \mathbb{Z}$, amire $ka' + lm' = 1$
    - k, l nem lehet közös prímosztója → relatív prímek

$$a'x \equiv b'\ (m')\ \ /\cdot k$$

$$ka'x \equiv kb'\ (m')$$

$$(1 - lm')x \equiv kb'\ (m') \quad / + lm'x \equiv 0\ (m')$$

$$x \equiv kb'(m')$$

  - megoldások modulo m megadása
    - mivel $m = m'd$, ezért minden m' szerinti *maradékosztály* pontosan d db m szerinti maradékosztály uniója
    - konkrét esetben:

$x \equiv kb'(m)$ vagy…

$x \equiv kb' + m'\ (m)$ vagy…

$x \equiv kb' + 2m'\ (m)$…

[K14] megjegyzést írt: Ebből következik, hogy…

[K15] megjegyzést írt: Legnagyobb közös osztó.

[K16] megjegyzést írt: Az elvégzett átalakítások ekvivalens volta miatt az $a \cdot x = b$ kongruencia megoldásai pontosan azok az $x \in \mathbb{Z}$, amelyek modulo m' a kb'-vel egy maradékosztályba tartoznak.

BACK

3. tétel: Euler-Fermat tétel

Tételcím

Euler-féle φ-függvény, képlet a meghatározására (csak prímhatvány esetre bizonyítva). Redukált maradékrendszer, Euler-Fermat-tétel, kis Fermat-tétel. Két kongruenciából álló kongruenciarendszer megoldása (konkrét, megadott példán).

1. **Euler-féle φ-függvény**
   - Definíció:
     - ha $n \geq 2, \in \mathbb{Z}$, akkor az $1, \dots, n-1$ számok között n-hez relatív prímek számát $\varphi(n)$-nel jelöljük
2. **Euler-féle φ-függvény képlet**
   - Tétel
     - ! az $n \geq 2, \in \mathbb{Z}$ kanonikus alakja $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, ekkor:

       $$\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}) \cdot (p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1}) \cdot \dots \cdot (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1})$$
   - Bizonyítás
     - TFH. $n \in \mathbb{Z}$ prímtényezős felbontásban csak 1 prím (p) van
     - $n = p^\alpha \ (\alpha \geq 1)$
     - ekkor $(n, a) > 1$, akkor és csak akkor igaz, ha $p|a$
     - $1, \dots, n$ számok közül $\frac{n}{p} = p^{\alpha-1}$ db nem relatív prím n-hez
     - definíció szerint: $\varphi(n) = n - p^{\alpha-1} = p^\alpha - p^{\alpha-1}$
     - $\rightarrow$ tehát igaz minden prímhatványra
3. **Redukált maradékrendszer**
   - Definíció
     - $R = \{c_i, \dots, c_k\}$ számhalmaz *redukált maradékrendszer* modulo m, ha a következő feltételek teljesülnek:

[K17] megjegyzést írt: $n \rightarrow \varphi(n)$

[K18] megjegyzést írt: Különben a és n prímtényezős felbontásában nem lehetne közös prím.

[K19] megjegyzést írt: Ugyanis nyilván ennyi a p-vel oszthatók száma.

- **(1)** $(c_i, m) = 1$ minden $i = 1, \dots, k$ esetén
- **(2)** $(c_i \not\equiv c_j)\ (m)$ bármely $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq k$ esetén
- **(3)** $k = \varphi(m)$

- Példa
  - modulo 10 redmar. az $\{1, 3, 7, 9\}, \{21, 43, 67, 89\}, \{1, -1, 3, -3\}$

[K20] megjegyzést írt: Redukált maradékrendszer.

4. Redukált maradékrendszer állítás

- Állítás
  - ! $R = \{c_i, \dots, c_k\}$ redmar. modulo $m \in \mathbb{Z}$, amely $(a, m) = 1$
  - $\rightarrow R' = \{a \cdot c_i, \dots, a \cdot c_k\}$ szintén redmar. modulo m
- Bizonyítás
  - megmutatni, hogy R'-re is igaz, ami R-re is
  - **(1)** (*1. tétel, Számelmélet alaptétel szerint)* $a \cdot c_i$ és m prímtényezős felbontásában nem lehet közös prím, ha külön a-ban és m-ben vagy c-ben és m-ben ⊘

[K21] megjegyzést írt: Nincs.

  - **(2)** bizonyításához TFH.:

$$a \cdot c_i \equiv a \cdot c_j \quad (m) \quad /: a$$

[K22] megjegyzést írt: Valamely $1 \leq i, j \leq k$

$$c_i \equiv c_j \quad (m)$$

[K23] megjegyzést írt: $(a, m) = 1$ miatt modulus nem változik.

  - mivel R-re teljesül **(2)**, amely csak $i = j$ esetben fordulhat elő
  - mivel R és R' elemszáma $=$, így **(3)** teljesül R'-re

5. Euler-Fermat-tétel

- Tétel
  - ha az $(a, m) = 1$, akkor $a^{\varphi(m)} \equiv 1\ \ (m)$

[K24] megjegyzést írt: $a, m \geq 2,\ \in \mathbb{Z}$

- Bizonyítás
  - ! $R = \{c_1, \dots, c_k\}$ tetszőleges redmar. modulo m
  - mivel $(a, m) = 1$ redmar. def. miatt $R' = \{a \cdot c_1, \dots, a \cdot c_k\}\ \ (m)$

[K25] megjegyzést írt: Redukált maradékrendszer definíciója.

  - R és R' elemei párba állíthatók, párok kongruensek modulo m
  - (*1. tétel, Alapműveletek kongruenciákkal (3) tulajdonságot használva*) $\rightarrow$ R és R' elemeit összeszorozva modulo m kongruens eredményeket kapunk:

$$c_1 \cdot \ldots \cdot c_k \equiv (a \cdot c_1) \cdot \ldots \cdot (a \cdot c_k) \quad (m)$$

$$c_1 \cdot \ldots \cdot c_k \equiv a^{\varphi(m)} \cdot c_1 \cdot \ldots \cdot c_k \quad (m) \quad /: c_1 \cdot \ldots \cdot c_k$$

- mivel $(c_i, m) = 1$, ezért (*1. tétel, Számelmélet alaptétel következtében)* $(c_1 \cdot \ldots \cdot c_k, m) = 1$ is igaz
- osztással a modulus nem változik, így megkapjuk a tételt

6. „Kis" Fermat-tétel

- **Tétel**
  - ha p prím és $a \in \mathbb{Z}$, akkor $a^p \equiv a \quad (p)$
- **Bizonyítás**
  - tétel állítása magától értetődő, ha $p|a$
    - ekkor $p|a^p$ is igaz $p|a \to a^p \equiv 0 \equiv a \quad (p)$
  - ha $p \nmid a \to (a, p) = 1$ is igaz
    - Euler-Fermat-tétel a-ra és p-re
    - $\varphi(p) = p - 1$ miatt

      $a^{p-1} \equiv 1 \quad (p) \quad /\cdot a$

      $a^p \equiv a \quad (p)$

[K26] megjegyzést írt: Mert p prím.

BACK

4. tétel: Algoritmusok, nyilvános kulcsú titkosítás, RSA

Tételcím

Polinomiális futásidejű algoritmus (vázlatos) fogalma. Számelmélet és algoritmusok: alapműveletek, hatványozás az egészek körében és modulo m (ez utóbbi konkrét, megadott példán), ezek lépésszáma. Prímtesztelés, Carmichael számok. Nyilvános kulcsú titkosítás, megvalósítása RSA-kóddal.

1. Polinomiális futásidejű algoritmus

- Definíció
  - az algoritmust *polinomiális futásidejű*nek tekintjük, ha n méretű bemenethez tartozó $f(n)$ függvényre, mely az *algoritmus lépésszám*át határozza meg
  - minden n esetén fennáll:

$$f(n) \leq c \cdot n^k$$

[K27] **megjegyzést írt:** c és k rögzített konstansok.

2. Számelméleti algoritmusok

- Összefoglaló (*számelméleti algoritmusok hatékonysága)*
  - bemenet méretét mindig a bemenetet adó számok összes számjegyének számával mérjük
  - algoritmus *hatékony*, ha:
    - n jegyű számokon max $c \cdot n$ vagy $c \cdot n^2$ vagy $c \cdot n^k$ lépést tesz meg

[K28] **megjegyzést írt:** Azonosítható a számok (pl. 10-es alapú) logaritmusával.

[K29] **megjegyzést írt:** Elméletben és többnyire gyakorlatban, gyakorlatban ezek többszáz jegyű számok, melyeket a példák kedvéért 2-3 jegyű számokon illusztrálják.

[K30] **megjegyzést írt:** Valamely fix k-ra.

- **Alapműveletek**
  - összeadás feladata:
    - bemenet: $a, b \in \mathbb{Z}$
    - kimenet: $a + b$
    - ezzel analóg a kivonás, szorzás

- maradékos osztás feladata:
  - $\frac{a}{b}$ alsó egészrésze, jelölés: $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$
  - a-nak b szerint vett osztási maradéka, jelölése: $a \ mod \ b$
- már alsó tagozatból ismert „írásbeli” algoritmusok megfelelőek erre
- viszont, ha a és b jegyeinek száma k és l, akkor az algoritmusok lépésszáma a(z)…
  - írásbeli összeadás, kivonásnak: $c \cdot (k + l)$
  - szorzás, osztásnak: $c \cdot k \cdot l$
- $!n = k + l$
  - összeadás, kivonás: $c \cdot n$
  - szorzás, osztás: $c \cdot n^2$
- tehát: polinomiális futásidejű → hatékony algoritmusok
- hatványozás feladat:
  - bemenet: $a, b \ \in \mathbb{Z}$
  - kimenet: a^b
- ennek már nem adható hatékony algoritmus, mert a kimenet kiírása is túl sok ideig tart
  - pl. $a = 2$ esetében 2^b jegyeinek száma $\log_{10} 2^b = b \cdot \log_{10} 2 \geq \log_{10} 2 \cdot 10^{n-1} > 0{,}03 \cdot 10^n$
  - vagyis 2^b jegyeinek száma exponenciális függvénye b

- **Hatványozás modulo m**
  - nyilvános kulcsú titkosításhoz alapvető
  - kimenetet nem tudjuk kiszámítani a fentiek szerint, de annak adott m szerinti maradékát meg tudjuk határozni
  - hatványozás feladat:
    - bemenet: $a, b, m \ \in \mathbb{Z}$
    - kimenet: $a^b \ mod \ m$ vagyis a^b osztási maradéka m szerint
  - kiírási probléma megoldva, mert a kimenet $< m$
  - a^b még mindig nem kiszámítható →
  - $a, a^2, \ldots, a^b$ m szerinti maradékokat sorra kiszámoljuk

[K31] megjegyzést írt: Maradékos osztásnál az alsó egészrész igazából egy lekerekítés, felső egészrésznél meg fel.
pl.:
$12 : 5 = 2{,}4$
ennek alsó egészrésze: 2, felső: 3
FunFact:
Jelölést Gauss vezette be az alsó egészrészre; a $\lfloor x \rfloor$ és a $\lceil x \rceil$ jelek Kenneth E. Iversontól származnak. A német nyelvben ma is használják a Gauß-Klammer nevet az alsó egészrészre.

[K32] megjegyzést írt: Valamilyen c konstansra

[K33] megjegyzést írt: Létezik ennél gyorsabb futásidejű algoritmus is, de ezeknél csak jóval nagyobb számok esetén sikerül futásidőt megtakarítani

[K34] megjegyzést írt: Ha b például 100 jegyű, akkor 2^b jegyeinek száma $3 \cdot 10^{98}$-nál több, így a kiírás még akkor is lehetetlen volna, ha a világegyetemben található minden protonra ráírhatnánk egy kimenet egy számjegyét.

[K35] megjegyzést írt: Előző maradék a-szorosának m szerinti maradékát vesszük.

- ez az eljárás szintén használhatatlanul lassú: $b-1$ db ilyen lépést kell tenni, ez exponenciális lépésszámú algoritmus
- erre hatékony algoritmus: ***ismételt négyzetre emelések módszere***
- példa: 13^{53} maradéka 97-tel osztva

$$13^1 \equiv 13 \quad (97)$$
$$13^2 = 169 \equiv 72 \quad (97)$$
$$13^4 = (13^2)^2 \equiv 72^2 = 5184 \equiv 43 \quad (97)$$
$$\vdots$$
$$13^{32} = (13^{16})^2 \equiv 36^2 = 1296 \equiv 35 \quad (97)$$

- ezzel a módszerrel 13-nak a 2-hatvány kitevőjű hatványait tudjuk meghatározni
- a sort nem tudjuk tovább négyzetre emelni, így
- $13^{53} = 13^{1+4+16+32} = 13^1 \cdot 13^4 \cdot 13^{16} \cdot 13^{32}$
- részekre bontva:

$$13^5 = 13^1 \cdot 13^4 = 13 \cdot 43 = 559 \equiv 74 \quad (97)$$
$$13^{21} = 13^5 \cdot 13^{16} = 74 \cdot 36 = 2664 \equiv 45 \quad (97)$$
$$13^{53} = 13^{21} \cdot 13^{32} = 45 \cdot 35 = 1575 \equiv 23 \quad (97)$$

- végeredmény: $13^{53} \equiv 23 \quad (97)$
- az algoritmus tehát meghatározza a^t maradékát m szerint minden $t \le b$ 2-hatványra, vagyis $t = 2^k$ kitevőkre, ahol $k = 0, 1, \dots, \lfloor \log_2 b \rfloor$
- az így kapott maradékokból áll elő a^b maradéka is
- tehát a maradékok kiszámítását érdemes párhuzamosan végezni a négyzetre emelésekkel, teljes leírása:

- **Ismételt négyzetre emelések módszere ($a^b \ mod\ m$ kiszámítására)**
  - bemenet: a, b, m, (amelyekre teljesül, hogy $0 < a < m, b \ge 1$)
  - **0. lépés**
    - $c \leftarrow 1$
  - **1. lépés**
    - ha b páratlan, akkor: $c \leftarrow c \cdot a \ mod\ m$
    - ha páros, akkor b változatlan marad

[K36] megjegyzést írt: Mindegyik sor az előző sor négyzetre emelésével keletkezik.

- **2. lépés**
  - $b \leftarrow \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor$
- **3. lépés**
  - ha $b = 0$, akkor: `PRINT` „$a^b \ mod \ m =$”,c; `STOP`
- **4. lépés**
  - $a \leftarrow a^2 \ mod \ m$
- folytassuk az **1. lépésnél**

- feladat újonnani végrehajtása ennek a módszernek a segítségével
- $a = 13, b = 53, m = 97, k =$ *ciklus hányadszorra hajtódott végre*, $c =$ *végeredmény*

k	a	b	c
0	13	53	1
1	72	26	13
2	43	13	13
3	6	6	74
4	36	3	74
5	35	1	45
6	—	0	23

- sorra ugyanazok az értékek keletkeztek, mint amelyeket a korábbi számításban kaptunk

3. Prímtesztelés, Fermat-teszt

- bemenet: $m \in \mathbb{Z}$
- **0. lépés**
  - $k \leftarrow 1$
- **1. lépés**
  - generáljunk véletlen számot 1 és $m - 1$ között
- **2. lépés**
  - Euklideszi-algoritmussal számoljuk ki (a, m) értékét
  - ha $(a, m) \neq 1, m$ nem prím, `STOP`

3. lépés

- számítsuk ki $a^{m-1} \pmod m$ értékét Ismételt négyzetre emelések módszerével
- ha $\neq 1$, m nem prím, STOP

- **4. lépés**
  - ha $k = 100$, m valószínűleg prím
- **5. lépés**
  - $k \leftarrow k + 1$, vissza az **1. lépéshez**
- fenti eljárás más szavakkal, krimis stílusban:
  - a véletlen számokat sorban a tanúk padjára idézzük
  - a vallomása az $a^{m-1} \pmod m$ értéke
    - ha ez 1, akkor a nem közöl információt m prímségét illetően, ekkor a m ***cinkosa***
    - ha $\neq 1$, akkor a leleplezi m összetettségét, tehát a m ***áruló***ja
      - nem szokás árulónak nevezni a-t, ha $(a, m) > 1$
    - ha találunk olyan $0 < a < m$ számot, melyre $(a, m) \neq 1$
      - ekkor az Eukleideszi algoritmus az m egy valódi osztóját megtalálja
    - így a további információkat ad ki m-ről, tehát a m ***leleplező***je

4. Fermat-teszt árulók száma

- **Tétel**
  - ha $m > 1$ összetett szám és m-nek van árulója, akkor az 1 és m közötti, m-hez relatív prímszámoknak legalább a fele áruló
- **Bizonyítás**
  - ! a tetszőleges árulója m-nek, $c_1 \cdot \ldots \cdot c_k$ az m összes cinkosa
  - mutassuk meg, hogy $a_i = (a \cdot c_i \bmod m)$, $i = 1, \ldots, k$ számok páronként különböző árulói m-nek
  - ebből következni fog, hogy az árulók száma legalább akkora, mint a cinkosok száma, amely ekvivalens a tétellel
  - mivel $(a, m) = 1$ és $(c_i, m) = 1$ miatt $(a \cdot c_i, m) = 1$

[K37] megjegyzést írt: $(a, m) = 1$ esetben, a vallomás csak is 1 és m közötti, m-hez relatív prím a-kra vonatkozik.

[K38] megjegyzést írt: $a^{m-1} \pmod m \equiv 1$

[K39] megjegyzést írt: *és 1. tétel, Számelmélet alaptétel miatt.*

- így (*a 3. tétel, Euler-féle φ-függvény állítása szerint*) $(a_i, m) = 1$ is igaz, mert $a_i \equiv a \cdot c_i \quad (m)$
- továbbá: $a_i \equiv a \cdot c_i \quad (m)$ $(m-1)$-edik hatványra emelve:

$$a^{m-1} \equiv (a \cdot c_i)^{m-1} = a^{m-1} \cdot c_i^{\,m-1} \equiv a^{m-1} \cdot 1 \not\equiv 1 \quad (m)$$

[K40] megjegyzést írt: Felhasználtuk, hogy $c_i^{\,m-1} \equiv 1\ (m)$, $a^{m-1} \not\equiv 1\ (m)$, mert c_i cinkos és a áruló.

- ebből következik, hogy a_i is áruló
- végül megmutatjuk, hogy az $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$ árulók páronként különbözők
- TFI $a_i = a_j$ valamely $1 \le i, j \le k, i \ne j$ esetén→

$$a \cdot c_i \equiv a \cdot c_j \quad (m) \qquad /: a$$

[K41] megjegyzést írt: Hiszen $(a, m) = 1$ miatt modulus nem változik.

$$c_i \equiv c_j \quad (m)$$

- ez azonban $1 \le i, j \le k, i \ne j$ miatt ellentmondás, így beláttuk

5. Carmichael-számok

- Definíció
  - az $m > 1$ összetett számot *univerzális álprím*nek más néven *Carmichael-szám*nak nevezzük, ha nincs árulója
  - vagyis minden $1 < a < m, (a, m) = 1$ esetén $a^{m-1} \equiv 1 \quad (m)$

6. A nyilvános kulcsú titkosítás

- generálunk 2 db 300 jegyű prímszámot: p, q
- $N = p \cdot q \rightarrow$ ha csak N-et ismerjük, nem fogjuk tudni megadni egy valódi osztóját
- nyilvános kulcsú titkosítás alapfeladatát megoldó módszer
  - olyan $C, D: \{0, 1, \ldots, N-1\} \rightarrow \{0, 1, \ldots, N-1\}$ kölcsönösen egyértelmű függvényeket keresünk, melyek
    - minden $x \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ esetén $D\big(C(x)\big) = x$, vagyis $C - D$, egymás inverze
    - kód „tulajdonosa” $C(x), D(x)$ értékét ki tudja számítani
    - $C(x)$ kiszámítására vonatkozó eljárás nyilvánosságra hozható, $D(x)$-t nem lehet kiszámolni vele
- tehát N biztos sok számjegyű
- függvénypár birtokában a kód tulajdonosa biztonságosan tud üzenetet fogadni kódegyeztetés nélkül

[K42] megjegyzést írt: Ha kevés lenne, akkor $x = 0, 1, \ldots, N-1$ próbálgatással $C(x)$-ből megkapható x.

- elküldi C függvényt kiszámító eljárást, partner pedig x üzenet helyett annak $y = C(x)$ kódját küldi
- tulajdonos D-t $(D(y) = D(C(x)) = x$-el ki tudja számolni
- ha a két fél rendelkezik C, D függvénypárral, akkor a kommunikáció teljesen biztonságos

[K43] megjegyzést írt: Ezen alapszik a https protokoll is.

- RSA (Rivest-Shamir-Adleman) algoritmussal való megoldás a legszélesebb körű
- *(ehhez szükséges állítás:)*
- **Állítás**
  - ! p, q különböző prímek és $N = p \cdot q$
  - ekkor tetszőleges x és $k \geq 1$ egészekre

$$x^{k\cdot\varphi(N)+1} \equiv x \ \ (mod\ N)$$

- **Bizonyítás**
  - ha $(x, N) = 1$, akkor az állítás következménye (*a 3. tétel, Euler-Fermat tételnek*): $x^{\varphi(N)} \equiv 1 \ \ (N)\ \ /(\,)^k, \ \cdot x \to$ állítást kapjuk
  - ha $(x, N) \neq 1$, akkor $p|x$ vagy $q|x$
  - ha mindkettő teljesül, akkor $N|x$, így a bizonyítandó állítás $0 \equiv 0 \ \ (N)$, magától értetődő
  - TFH $p \nmid x$ vagy $q \nmid x$

[K44] megjegyzést írt: $p|x\ q \nmid x$ bizonyítás ezzel analóg.

  - mivel p prím és $q \nmid x$, ezért $(x, p) = 1, \varphi(p) = p - 1$, Euler-Fermat tétel miatt

$$x^{p-1} \equiv 1 \ \ (p) \qquad /(\,)^{k\cdot(q-1)}, \cdot\ x$$

$$x^{k\cdot\varphi(N)+1} \equiv x \ \ \ (p)$$

[K45] megjegyzést írt: $\varphi(N) = (p-1)(q-1)$

  - ugyanez a kongruencia modulo q és N is fennáll
  - $p\,|\,x^{k\cdot\varphi(N)+1} - x$ és $q\,|\,x^{k\cdot\varphi(N)+1} - x \Rightarrow p \cdot q\,|\,x^{k\cdot\varphi(N)+1} - x$

[K46] megjegyzést írt: $N =$ csupa különböző prím szorzatára is megfelel ez a bizonyítás.

7. RSA algoritmus

- előző $N = p \cdot q$ dolgozva, és legyen $c \in \mathbb{Z}$, amelyre: $(c, \varphi(N)) = 1$
- tegyük közzé a C kódoló függvényünk

$$C: x \to x^c \ \ mod\ N$$

- kiszámolható ismételt négyzetre emelések módszerével
- D keresése hasonló módon:

$$D: y \to y^d \ \ mod\ N$$

- d-t úgy választjuk, hogy D C inverze legyen
- ez akkor teljesül, ha $D\big(C(x)\big) = x$ minden $0 \leq x \leq N-1$ esetén, ami

$$C(x) \equiv x^c \ \ (N) \rightarrow x^{c \cdot d} \equiv x \ \ (N)$$

- a fent említett állítás miatt
  - D inverze lesz C-nek, ha d értékét sikerül úgy megválasztanunk, hogy $c \cdot d = k \cdot \varphi(N) + 1$ teljesül valamely $k \geq 1$ egészre
  - tehát a cél ezen kongruencia kielégítése
    - $c \cdot d \equiv 1 \ \ (\varphi(N))$
  - itt $c, \varphi(N)$ adottak, d-re egy lineáris kongruencia feladat, amely megoldható, de d kiszámítható Euklideszi algoritmussal is

[K47] megjegyzést írt: $D(C(x)) \equiv x^{c \cdot d} \ \ (N)$ miatt ekvivalens a második feltétellel.

[K48] megjegyzést írt: c választáskor előrelátóan teljesített és $\big(c, \varphi(N)\big) = 1$ feltétel miatt.

BACK

5. tétel: Térbeli koordinátageometria

Tételcím

Térbeli koordinátageometria: sík egyenlete, egyenes egyenletrendszerei. Skaláris szorzat fogalma és kiszámítása (bizonyítás nélkül); vektoriális szorzat fogalma és kiszámítása (bizonyítás nélkül). Adott térbeli vektorok lineáris függetlenségének, $\mathbb{R}^3$-beli generátorrendszer voltának, illetve bázis voltának geometriai feltétele.

1. Térvektor tulajdonságok

- Tétel
  - ! $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ és $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ térvektorok, $\lambda \in \mathbb{R}$
    - $\underline{u} + \underline{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$
    - $\underline{u} - \underline{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$
    - $\lambda \cdot \underline{u} = (\lambda \cdot u_1, \lambda \cdot u_2, \lambda \cdot u_3)$

2. Skaláris szorzat

- Definíció
  - $\underline{u}$ és $\underline{v}$ *skaláris szorzatán* az alábbit értjük:
    - $\underline{u} \cdot \underline{v} = |u| \cdot |v| \cdot cos\gamma$
  - ha $\gamma = k \cdot 90°,\ k \in \mathbb{Z}$, akkor a szorzatösszeg 0

[K49] megjegyzést írt: $0° \leq \gamma \leq 180°$

3. Skaláris szorzat tétele

- Tétel
  - ! $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ és $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ térvektorok, ekkor:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

4. Egyenes

- Definíció
  - az e egyenes paraméteres egyenletrendszere (*fenti Térvektor tulajdonságok tétel miatt*)
  - $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pont rajta van az egyenesen
  - $\underline{v} = (a, b, c) \neq 0$ *irányvektor*a

$$x = x_0 + \lambda \cdot a$$
$$y = y_0 + \lambda \cdot b$$
$$z = z_0 + \lambda \cdot c$$
$$\lambda \in \mathbb{R}$$

5. Egyenes tétele

- Tétel
  - ! az e egyenesnek $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pontja
  - $\underline{v} = (a, b, c) \neq 0$ irányvektora
  - tetszőleges pontjának nem paraméteres alakja:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \qquad a, b, c \neq 0$$
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \quad \text{és} \quad z = z_0 \qquad c = 0$$
$$x = x_0 \;\; y = y_0 \qquad a, b = 0$$

- Bizonyítás
  - $P \in e$, akkor igaz, ha e paraméteres egyenletrendszerére $\lambda \in \mathbb{R}$ értékére P-t adja
  - ha $a, b, c \neq 0$, akkor a 3 egyenletből egy közös λ-ra kell jutnunk
  - ha $c = 0$, akkor megfelelő λ létezése azt jelenti, hogy $z = z_0$ és az első 2 egyenletből közös λ értéket kell kapnunk
  - ha csak $c \neq 0$, akkor az első két egyenlet egyértelmű, míg a 3. egyenlet mindig kielégíthető a $\lambda = \frac{z - z_0}{c}$ választással

6. Sík tétele

- Tétel
  - ! az adott S síknak $P_0(x_0, y_0, z_0)$
  - $n = (a, b, c) \neq 0$ normálvektora
  - ekkor $P(x, y, z) \in \mathbb{Z}$ akkor igaz, ha

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0$$

- Bizonyítás
  - $P \in e$, akkor igaz, ha $\overrightarrow{P_0P}||S$-el
  - $\overrightarrow{P_0P}$ pedig akkor $||S$-el, ha merőleges $\underline{n}$-el → ez akkor teljesül, ha skaláris szorzatuk 0
  - tétel szerint:
  - $\overrightarrow{P_0P} \cdot \underline{n} = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) \quad /\overrightarrow{P_0P} \cdot \underline{n} = 0$ beszorzás és átrendezés után megkapjuk a tételben kimondott egyenletet

7. Vektoriális szorzat

- Definíció
  - $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok *vektoriális szorzat*a az az $\underline{u} \times \underline{v}$-vel jelölt vektor, amelyre az alábbi feltételek fennállnak:
    - $\underline{u} \times \underline{v}$ hossza: $|u \times v| = |u| \cdot |v| \cdot sin\gamma$
    - $u \times v$ merőleges $\underline{u}$ és $\underline{v}$-re
  - *jobbsodrású rendszer*t alkotnak
  - ha valamelyik vektor $\underline{0}$,akkor az eredmény is $\underline{0}$

8. Vektoriális szorzat tétele

- Tétel
  - ! $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektorok, ekkor

$$\underline{u} \times \underline{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

9. Vegyesszorzat

- Definíció
  - $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ jelölt vektorok *vegyesszorzat*a $\underline{w} \cdot (\underline{u} \times \underline{v})$

10. Vegyesszorzat tétele

- **Tétel**
  - a vegyesszorzat kapcsolata a térfogattal az $\underline{u}$, $\underline{v}, \underline{w}$ által kifeszített paralelepipedon térfogata:

$$V = |\underline{u}\ \underline{v}\ \underline{w}|$$

- **Bizonyítás**
  - térfogatot a paralelogramma T területének és m magasságának szorzatából kapjuk
  - T terület egyenlő az $|\underline{u} \times \underline{v}|$-vel
  - m magasságot meg úgy kapjuk, hogy meghatározunk egy (*tetszőlegesen megbetűzött*) **OMW** háromszöget
    - **O**: origó
    - **M**: a W-ből az $\underline{u} \times \underline{v}$-re állított merőleges talppontja
    - **W**: $\underline{w}$ végpontja
  - Pitagorasz tétel → OM= $m = \underline{w} \cdot cos\gamma$

BACK

6. tétel:
Alterek, lineáris függetlenség

Tételcím

$\mathbb{R}^n$ és $\mathbb{R}^n$ alterének a fogalma. Lineáris kombináció, generált altér (és ennek altér volta), generátorrendszer. Lineáris függetlenség (ennek kétféle definíciója és ezek ekvivalenciája). Az „újonnan érkező vektor” lemmája. F-G egyenlőtlenség.

1. $\mathbb{R}^n$

- Definíció
  - $n \geq 1$ esetén az n db valós számból álló *számoszlop*ok halmazát $\mathbb{R}^n$ jelöli
  - ezen értelmezett összeadás " + " és tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ " $\cdot$ " *skalárszoros*át az alábbi alapján értelmezzük:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \text{ és } \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

2. $\mathbb{R}^n$ tulajdonságok

- **Tétel**
  - ! $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ekkor igazak az alábbiak:
    - $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$
    - $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$
    - $\lambda \cdot (\underline{u} + \underline{v}) = \lambda \cdot \underline{u} + \lambda \cdot \underline{v}$
    - $\underline{v} \cdot (\lambda + \mu) = \underline{v} \cdot \lambda + \underline{v} \cdot \mu$
    - $\lambda \cdot (\mu \cdot \underline{v}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \underline{v}$
- **Bizonyítás**
  - *triviális, mert mindegyike azonnal következik a valós számok műveleti tulajdonságaiból*

[K50] megjegyzést írt: Kommutatív – felcserélhetőség.

[K51] megjegyzést írt: Asszociatív – felbonthatóság/ csoportosíthatóság.

[K52] megjegyzést írt: Disztributív a vektorokra.

[K53] megjegyzést írt: Disztributív a skalárokra.

[K54] megjegyzést írt: Skalárszoros asszociatív.

3. $\mathbb{R}^n$ altere

- Definíció
  - ! $V \subseteq \mathbb{R}^n \neq \emptyset$, tehát az $\mathbb{R}^n$ tér egy nemüres *részhalmaz*a
  - V-t az *alteré*nek nevezzük, ha az alábbi két feltétel teljesül:
    - bármely $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén $\underline{u} + \underline{v} \in V$ is igaz
    - bármely $\underline{u} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda \cdot \underline{u} \in V$ is igaz
- Jelölés
  - $V \leq \mathbb{R}^n$

3. Lineáris kombináció

- Definíció
  - ! $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok és $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ skalárok
  - $\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \dots + \lambda_k \cdot \underline{v}_k$ vektort a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ vektorok $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ skalárokkal vett *lineáris kombináció*ja

4. Generált altér

- Definíció
  - ! $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok, ezeknek a lineáris kombinációival kifejezhető $\mathbb{R}^n$-beli vektorok halmazát $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ *generált altér*nek nevezzük
- Jelölés
  - $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \rangle$

5. Generátorrendszer

- Definíció
  - ! $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok, ha $W = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \rangle$, akkor a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ vektorhalmazt a W altér *generátorrendszer*ének nevezzük

6. Lineáris függetlenség, összefüggőség

- Definíció
  - a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszert akkor nevezzük *lineárisan függetlennek*, ha $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ vektorok közül semelyik sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként

- ha ez nem teljesül (*vagyis a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ vektorok között legalább egy olyan, amely kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként),* akkor a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ vektorrendszert *lineárisan összefüggő*nek nevezzük

7. Triviális lineáris kombináció

- **Tétel**
  - a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan független, ha $\lambda_1 \cdot \underline{v}_1, \dots, \lambda_k \cdot \underline{v}_k = \underline{0}$ egyenlőség kizárólag abban az esetben teljesül, ha $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0 \rightarrow$ ezt nevezzük a triviális lineáris kombinációnak
- **Bizonyítás**
  - (*„akkor lineárisan független, ha…”)*
  - TFH. $\lambda_1 \cdot \underline{v}_1, \dots, \lambda_k \cdot \underline{v}_k = \underline{0}$ csak a triviális lineáris kombináció esetén teljesül
  - belátjuk, hogy $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ lineárisan független
  - TFI.:
    - feltesszük, hogy ez mégsem lineárisan független
    - ha $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ nem lineárisan független, akkor valamelyikük kifejezhető a többi lineáris kombinációjából: ! $\underline{v}_1$, ekkor

      $\underline{v}_1 = \underline{\alpha}_2 \cdot \underline{v}_2 + \dots + \underline{\alpha}_k \cdot \underline{v}_k \quad \underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_k \in \mathbb{R}$ /átrendezve

      $1 \cdot \underline{v}_1 - \underline{\alpha}_2 \cdot \underline{v}_2 - \dots - \underline{\alpha}_k \cdot \underline{v}_k = \underline{0}$
    - ez ellentmondás → nemtriviális lineáris kombináció esetén is teljesül $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\alpha_2, \dots, \lambda_k = -\alpha_k) \rightarrow$ igazolva
  - (*„csak akkor…”)*
  - feltesszük, hogy $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ lineárisan független és megmutatjuk, hogy ekkor $\lambda_1 \cdot \underline{v}_1, \dots, \lambda_k \cdot \underline{v}_k = \underline{0}$ csak a $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ esetben teljesül
  - TFI.:
    - TFH. $\lambda_1 \cdot \underline{v}_1, \dots, \lambda_k \cdot \underline{v}_k = \underline{0}$, de a lambdák között van nemnulla
      - pl.: $\lambda_1 \neq 0$

- ekkor átrendezés és $\lambda_1 \neq 0$-val való osztás után a következő alakot kapjuk:

$$\underline{v}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \underline{v}_2 - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \cdot \underline{v}_k$$

- ellentmondás, $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ mégsem lineárisan független, mert $\underline{v}_1$ kifejezhető a többiből lineáris kombinációval

8. Újonnan érkező vektor lemmája (ÚÉVL)

[K55] megjegyzést írt: Segédtétel.

- Tétel
  - TFH. az $f_1, \ldots, f_k$ rendszer lineárisan független, de $f_1, f_2 \ldots, f_k, f_{k+1}$ lineárisan összefüggő
  - ekkora $f_{k+1} \in \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$, tehát f_{k+1} kifejezhető $f_1, \ldots, f_k$ lineáris kombinációjaként
- Bizonyítás
  - mivel $f_1, \ldots, f_k,\ f_{k+1}$ lineárisan összefüggő, ezért lineáris függetlenség tétele alapján létezik nemtriviális lineáris kombináció, mely nullvektort adja végeredményül
  - ha a $\lambda_1 \cdot f_1, \ldots, \lambda_k \cdot f_k,\ \lambda_{k+1} = \underline{0}$ egyenletben $\lambda_{k+1} = 0$ azt jelenti, hogy a maradék egyenlet így néz ki $\lambda_1 \cdot f_1 + \ldots + \lambda_k \cdot f_k = \underline{0}$ ÉS a $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ skalárok között van egy (vagy több) nemnulla tag
  - emiatt az eredeti $f_1, \ldots, f_k$ rendszer lineárisan összefüggő → ellentmondás
  - → $\lambda_{k+1} \neq 0$, és az ezzel való osztás után kapott egyenletből következik, hogy f_{k+1} előállítható az $f_1, \ldots, f_k$ rendszer lineáris kombinációjaként
  - → $f_{k+1} \in \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$

9. F-G egyenlőtlenség

- Tétel
  - ! $V \leq \mathbb{R}^n$ altér, $\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k$ V-beli vektorokból álló lineárisan független rendszer
  - $\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_m$ pedig generátorrendszer V-ben → $k \leq m$

- **Bizonyítás**
  - ha $k = 1$, akkor V-ben van a nullvektortól különb vektor (mert $\underline{f_1} \neq 0$) → minden generátorrendszer legalább 1 elemű (üres halmaz esetén $\underline{0}$ alteret generálja csak)
  - tétel $k = 1$ esetén igaz
  - TFH. $k \geq 2$ és már igaz $k - 1$-re igaz → belátni k-ra is
  - mivel $g_1, \dots, g_k$ generátorrendszer V-ben, ezért minden V-beli vektor → $\underline{f_k}$ is előáll ennek lineáris kombinációjaként:
    - $\underline{f_k} = \lambda_1 \cdot \underline{g_1}, \dots, \lambda_m \cdot \underline{g_m}$
    - ! lambdák között nemnulla, mert $\underline{f_k} \neq 0$
    - ! $\lambda_m \neq 0, W = \langle \underline{g_1}, \dots, \underline{g_k} \rangle$
    - megmutatjuk, hogy minden $1 \leq j \leq k - 1$ esetén az $\underline{f_j}$-hez található olyan α_j skalár, hogy $\underline{f_j} + \alpha_j \cdot \underline{f_k} \in W$
    - $\underline{f_j}$ felírható $\underline{g_1}, \dots, \underline{g_k}$ lineáris kombinációjaként:

$$\underline{f_j} = \beta_1 \underline{g_1}, \dots, \beta_m \underline{g_m}$$

  - ekkor $\alpha_j = -\frac{\beta_m}{\lambda_m}$ megfelel:

$$\underline{f_j} + \alpha_j \cdot \underline{f_k} = \underline{g_1} \cdot \left(\beta_1 - \frac{\beta_m}{\lambda_m} \cdot \gamma_1\right) + \underline{g_2} \cdot \left(\beta_2 - \frac{\beta_m}{\lambda_m} \cdot \gamma_2\right) + \dots + \underline{g_m} \cdot \left(\beta_m - \frac{\beta_m}{\lambda_m} \cdot \gamma_m\right)$$

    - $\underline{g_m}$ együtthatója $\beta_m - \frac{\beta_m}{\lambda_m} \cdot \gamma_m = 0$, így $\underline{f_j} + \alpha_j \cdot \underline{f_k}$ W-beli
  - megmutatjuk, hogy $\underline{f_j} + \alpha_j \cdot \underline{f_k}, j = 1, 2, \dots, k - 1$ vektorok lineárisan függetlenek
  - vegyük egy $\underline{0}$-t adó lineáris kombinációjukat a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}$ skalárokkal

$$\lambda_1 \cdot \left(\underline{f_1} + \alpha_1 \cdot \underline{f_k}\right) + \lambda_2 \cdot \left(\underline{f_2} + \alpha_2 \cdot \underline{f_k}\right) + \dots + \lambda_{k-1} \cdot \left(\underline{f_{k-1}} + \alpha_{k-1} \cdot \underline{f_k}\right) = \underline{0}$$

$$\lambda_1 \cdot \underline{f_1} + \lambda_2 \cdot \underline{f_2} + \dots + \lambda_{k-1} \cdot \underline{f_{k-1}} + \underline{f_k} \cdot (\lambda_1 \cdot \underline{\alpha_1} + \lambda_1 \cdot \underline{\alpha_1} + \dots + \lambda_{k-1} \cdot \underline{\alpha_{k-1}} += \underline{0}$$

  - ezzel az $\underline{f_1}, \dots, \underline{f_k}$ egy $\underline{0}$-t adó lineáris kombinációját kaptuk
  - tudjuk, hogy ezek lineárisan független → lineáris kombináció minden együtthatója 0 kell legyen

[K56] megjegyzést írt: Legyen.

[K57] megjegyzést írt: Mert felírható $\underline{g_1}, \dots, \underline{g_{m-1}}$ lineáris kombinációjaként.

- vagyis $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{k-1} = 0 \rightarrow \underline{f_j} + \alpha_j \cdot \underline{f_k}$ vektorok valóban lineárisan független

BACK

7. tétel:
Bázis, dimenzió

Tételcím

Bázis és dimenzió fogalma, a dimenzió egyértelműsége. Standard bázis, $\mathbb{R}^n$ dimenziója. Koordinátavektor fogalma és annak egyértelműsége. Bázis létezése $\mathbb{R}^n$ tetszőleges altérben.

1. Bázis

- Definíció
  - ! $V \leq \mathbb{R}^n$ altér
  - V-beli vektorokból álló $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ rendszert *bázis*nak nevezzük V-ben, ha
    - a rendszer *lineárisan független*
    - *generátorrendszer*t alkot

2. Bázis egyértelműsége

- **Tétel**
  - TFH. a $V \leq \mathbb{R}^n$ altérben a $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ rendszer és a $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_m$ rendszer egyaránt bázisok $\rightarrow k = m$
- **Bizonyítás**
  - mindkét rendszer bázis, ezért V-ben
    - $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ lineárisan független
    - $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_m$ generátorrendszer
    - (*6. tétel, F-G egyenlőtlenséget tétel miatt*)

      $k \leq m$
  - ennek fordítottját is kimondhatjuk, így V-ben
    - $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ generátorrendszer
    - $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_m$ lineárisan független
    - *(ismét F-G miatt)* $m \leq k$

mivel egyszerre igazak, így $k = m$

3. Dimenzió

- Definíció
  - ! $V \leq \mathbb{R}^n$ *altér*ben $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k$ rendszer bázis
  - ekkor V *dimenzió*ja k
- Jelölés
  - $\dim V = k$

4. Standard bázis

- Definíció
  - jelölje minden $1 \leq i \leq n$ esetén e_i azt az $\mathbb{R}^n$-beli vektort, melynek (felülről) az i-edik koordinátája 1, összes többi koordinátája 0

    ekkor $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ bázis az $\mathbb{R}^n$-ben → ez a *standard bázis*
- Jelölés
  - E_n
- **Bizonyítás**
  - $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ *lineáris kombinációja* $\underline{\lambda}_1, \ldots, \underline{\lambda}_n$ skalárokkal

    $$\lambda_1 \cdot \underline{e}_1 + \ldots + \lambda_n \cdot \underline{e}_n = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$
  - látszik, hogy $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ generátorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben, hiszen lineáris kombinációjukként tetszőleges vektor előállhat
  - ha *nullvektor*t akarjuk kifejezni, akkor csak a triviális lineáris kombináció esetén fog az előállni
  - tehát a rendszer lineárisan független → $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ tényleg bázist alkot az $\mathbb{R}^n$-ben
  - fenti állításból következik, hogy $\dim \mathbb{R}^n = n$
  - viszont $\mathbb{R}^n$ csak az egyike az „n dimenziós tereknek” és minden $(n \leq m)$ $\mathbb{R}^m$-nek van n-dimenziós altere

5. Bázis tétele

- Tétel
  - $V \leq \mathbb{R}^n$ altérben a $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ vektorok akkor és csak akkor alkotnak bázist, ha minden $\underline{v} \in V$ egyértelműen, azaz pontosan egyféleképpen fejezhető ki lineáris kombinációjukként
- Bizonyítás
  - *(„csak akkor” alkotnak bázist… kifejtése)*
  - akkor bázis, ha V-ben generátorrendszer és lineárisan független (bázis tételből)
  - *(„akkor” … kifejtése)*
  - minden $\underline{v} \in \mathbb{R}$ kifejezhető $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ lineáris kombinációjaként
  - TFI. valamely $\underline{v} \in V$ kétféleképpen kifejezhető:

    $\underline{v} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{b}_k = \mu_1 \underline{b}_1 + \ldots + \mu_k \underline{b}_k$ és $\lambda_j \neq \mu_j$
  - kettő különbségét véve:

    $$\underline{0} = \underline{b}_1(\lambda_1 - \mu_1) + \ldots + \underline{b}_k(\lambda_k - \mu_k)$$

    tehát $\underline{0}$ kifejezhető a $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ nemtriviális lineáris kombinációjaként, hiszen $(\lambda_j - \mu_j) \neq 0$, ez ellentmondás

[K58] megjegyzést írt: Tegyük Fel Indirekten, hogy…

6. Koordinátavektor

- Definíció
  - ! $V \leq \mathbb{R}^n$, $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k\}$ bázis V-ben, $\underline{v} \in V$ tetszőleges vektor
  - azt mondjuk, hogy $\underline{k} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$ vektor a $\underline{v}$ vektor B szerinti *koordinátavektor*a, ha $\underline{v} = \lambda_1 \cdot \underline{b}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{b}_k$
- Jelölés
  - $\underline{k} = [\underline{v}]_B$
  - $[\underline{v}]_B$ nem csak $\underline{v}$-től függ:
    - ugyanannak a vektornak más-más bázis esetén más-más koordinátavektorok felelnek meg

7. Bázis létezése tétele

- **Tétel**
  - $! V \leq \mathbb{R}^n$ altér, $f_1, \dots, f_k$ V-beli vektorokból álló lineárisan független rendszer
  - $f_1, \dots, f_k$ kiegészíthető véges sok további vektorral úgy, hogy a kapott rendszer bázis legyen
- **Bizonyítás**
  - $! W = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$
  - igaz, hogy $W \subseteq V$, mivel V altér
    - ha $V = W$, akkor $f_1, \dots, f_k$ generátorrendszer, így bázis V-ben → tétel belátva
    - ha $V \neq W$, akkor létezik egy $\underline{v} \in V$, $\underline{v} \notin V$ vektor
      - *újonnan érkező vektor lemmája* szerint ekkor $f_1, \dots, f_k, \underline{v}$ lineárisan független
      - ha ez már generátorrendszer V-ben, akkor kész
      - különben be kell látni, hogy ez a folyamat leáll egy idő után → F-G egyenlőtlenség igénybevétele
      - ez alapján n-nél nagyobb elemszámú lineárisan független rendszer ⦰ $\mathbb{R}^n$-ben, de létezik n elemű generátorrendszer ebben a térben
      - az eljárás tehát $n - k$ lépés után biztos megáll
    - → minden $V \leq \mathbb{R}^n$ altérben van bázis → $\dim V$ létezik
  - ha $V = \underline{0}$, akkor az üres halmaz bázis V-ben
  - ha V tartalmaz egy $\underline{v} \neq \underline{0}$, akkor $\underline{v}$-re alkalmazva a fenti tételt kapunk egy V-beli bázist

[K59] megjegyzést írt: Ugyanis ezt már beláttuk egyszer.

BACK

8. tétel:
Gauss-elimináció, RLA

Tételcím

Lineáris egyenletrendszer megoldása Gauss-eliminációval. Megoldhatóság, a megoldás egyértelműségének feltétele. Lépcsős alak és redukált lépcsős alak fogalma. Kapcsolat az egyenletek és ismeretlenek száma, illetve a megoldás egyértelműségé között.

1. Lineáris egyenletrendszer

- Definíció
  - egy k egyenletből álló n változós röviden: $(k \times n)$-es *lineáris egyenletrendszer*
  - *kettős indexelésű együtthatók* bevezetése: $a_{i,j}$
    - i-edik egyenletben a j-edik változó együtthatója minden:
      - $1 \leq i \leq k$
      - $1 \leq j \leq n$ esetén
    - b_i konstans tag
  - lineáris egyenletrendszer „hagyományos” alakja:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \quad \vdots \\ a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \ldots + a_{k,n}x_n &= b_k \end{aligned}$$

  - *kibővített együtthatómátrix*os alakja

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \ldots & a_{k,n} & b_k \end{array}\right)$$

- *(fontos elméleti következmény:)*
- TFH. adott egy k egyenletből álló, n ismeretlenes lineáris egyenletrendszer
- megoldhatóságával kapcsolatos következmények, ha csak k és n relációját ismerjük
  - *nem igaz*, hogy ha $k = n$, akkor biztosan van megoldás
  - *nem igaz*, hogy ha $k < n$, akkor biztosan végtelen sok megoldás van
  - *nem igaz*, hogy ha $k > n$, akkor biztosan nincs megoldás → ellenpélda lásd (lentebb): *Lineáris rendszer megoldhatóság* tétele

2. Elemi sorekvivalens lépések

- Definíció
  - kibővített együtthatómátrixával adott lineáris egyenletrendszer esetén *elemi sorekvivalens* lépésnek nevezzük alábbiakat
  - ($1 \le i,\ j \le k, i \ne j$ és $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \ne 0$ skalár esetén):
    - **(1)** a mátrix i-edik sorának (tagonként való) megszorzása λ-val
    - **(2)** a mátrix i-edik sorának helyettesítése sajátmagának és a j-edik sor λ-szorosának (tagonként vett) összegével
    - **(3)** az i-edik és j-edik sor felcserélése
    - **(4)** egy csupa nulla elemeket tartalmazó sor elhagyása

3. Gauss elimináció

- **Állítás**
  - előző definícióban felsorolt lépések ekvivalens átalakítások
  - → egyenletrendszer megoldásait nem változtatják meg
  - *(részletesebben: ha az $x_1, \ldots, x_n$ számok kielégítik az egyenletrendszert egy lépés megtétele előtt, akkor annak megtétele után is, és fordítva is)*
- **Bizonyítás**
  - *(csak a* **(2** *lépésre bizonyítva…)*
  - ha $x_1, \ldots, x_n$ kielégítik az egyenletrendszert, akkor:

$$a_{i,1} \cdot x_1 + \ \ldots + a_{i,n} \cdot x_n = b_i$$

$$a_{j,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{j,n} \cdot x_n = b_j \qquad /\cdot \lambda, +\uparrow \text{ fentihez adva}$$

$$x_1 \cdot (a_{i,1} + \lambda \cdot a_{j,1}) + \ldots + x_n \cdot (a_{i,n} + \lambda \cdot a_{j,n}) = b_i + \lambda \cdot b_j$$

- tehát az új i-edik egyenlet teljesül

- megfordítva: ha $x_1, \ldots, x_n$ megoldása a rendszernek a **(2** lépés megtétele után, akkor a $b_i + \lambda \cdot b_j$ és b_j egyenletek igazak
- $b_i + \lambda \cdot b_j$ ebből kivonva λ-szorosát b_i egyenletét kapjuk
- tehát lépés megtétel előtt is teljesül

4. Lépcsős alak, redukált lépcsős alak

- Definíció
  - egy kibővített együtthatómátrixával adott lineáris egyenletrendszert *lépcsős alakú*nak *(LA)* mondunk, ha az alábbiak teljesülnek:
    - a mátrix minden sorában van nemnulla elem és (balról) az első nemnulla elem egy 1-es, úgynevezett *vezéregyes*
      - (*Vezéregyeseket nem tartalmazó oszlopok szabad paramétereknek felelnek meg. A sorok adják meg átrendezés után, hogy a többi változó hogyan fejezhető ki a szabad paraméterekből.*)
    - ha $1 \leq i, \ j \leq k$, akkor az i-edik sorban álló vezéregyes kisebb sorszámú oszlopban van, mint a j-edik sor vezéregyese
    - a vezéregyesekkel egy oszlopban, azok alatt álló minden elem 0
  - *redukált lépcsős alak*únak *(RLA)* mondjuk a mátrixot, ha még az alábbi is teljesül:
    - vezéregyesekkel egy oszlopban, azok fölött álló minden elem 0

5. Gauss elemináció tétel

- **Tétel**
  - tetszőleges, kibővített együtthatómátrixával adott lineáris egyenletrendszer esetén a Gauss-eleminációt futtatva az alábbi esetek közül pontosan az egyik valósul meg
    - az első fázis 3. lépésének végrehajtásakor az eljárás „tilos sort” talál → az egyenletrendszer nem megoldható
    - az algoritmus RLA-ra hozza a kibővített együtthatómátrixot, amelynek minden oszlopában van

vezéregyes → az egyenletrendszer egyértelműen megoldható
- az algoritmus RLA-ra hozza a kibővített együtthatómátrixot, de annak nem minden oszlopában van vezéregyes → az egyenletrendszernek végtelensok megoldása van

- a második és harmadik esetben a megoldások a RLA-ból közvetlenül kiolvashatóak

6. Lineáris egyenletrendszer megoldhatóság

- **Tétel**
  - ha egy k egyenletből álló, n ismeretlenes lineáris egyenletrendszer egyértelműen megoldható, akkor $k \geq n$
- **Bizonyítás**
  - lefuttatjuk a Gauss-eliminációt az egyenletrendszerre
  - megoldható (tehát nincs *tilos sor*), az algoritmus egy RLA-t hoz létre
  - ! ebben a sorok száma: k'
  - nyilván $k' \leq k$, mert az algoritmus csökkentheti a sorok számát (első fázis 3. lépésben), de nem növelheti
  - mivel az egyenletrendszer egyértelműen megoldható, ezért RLA minden oszlopa tartalmaz vezéregyest → $k' = n$
  - ezeket összevetve: $k \geq k' = n$, ezzel a tétel belátva

[K60] megjegyzést írt: Ebből következik, hogy…

BACK

9. tétel: Determináns

Tételcím

Determináns definíciója, alaptulajdonságai, kiszámítása.

1. Determináns

- Definíció
  - ! egy adott $(n \times n)$ A mátrix
  - minden *bástyaelhelyezés*re szorozzuk össze az azt alkotó n elemet
  - szorzathoz adjunk előjelet következő szabály szerint:
    - ha a bástyaelhelyezésnek megfelelő *permutáció* inverziószáma páros, akkor az előjel pozitív $(+)$
    - ha páratlan, akkor az előjel negatív $(-)$
  - az így kapott $n!$ db, n tényezős szorzat összegét az A *determináns*ának nevezzük
- Jelölés
  - $|A|$ vagy $\det A$

2. Determináns alaptulajdonságai (1)

- Tétel
  - ! A $(n \times n)$-es mátrix
  - ha annak van csupa 0 elemet tartalmazó sora vagy oszlopa, akkor $\det A = 0$
  - ha A felsőháromszög mátrix vagy alsóháromszög mátrix, akkor a determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata:

$$\det A = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot \ldots \cdot a_{n,n}$$

- Bizonyítás
  - csupa 0 állítás azonnal következik a determináns definíciójából:
    - mivel mind az $n!$ db szorzat tartalmaz elemet abból a sorból/oszlopból, amelyiknek minden tagja 0, ezért minden szorzat értéke és ezek összege is 0 lesz

[K61] megjegyzést írt:
Akkor is $\det A = 0$, ha van két azonos sora:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 0$$

vagy egyik sor a másik sor számszorosa:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 0$$

, egyik sor a másik sorok lineáris kombinációja:

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 9 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Oszlopokra is igazak.

- (*második állítás bizonyítása*)
- vegyük A *felsőháromszög-mátrix*ot
- a bástyaelhelyezések akkor nem tartalmaznak 0 elemet, ha az első oszlopból az első elemet, a második oszlopból a második elemet, választjuk ki (többit nem lehetne) és így tovább…
- a kapott permutáció *inverziószám*a 0, így pozitív előjelű ez a tag, és mivel ez az egyetlen tag, amiben nem szerepel 0, ezért ez lesz az előjeles összeg eredménye
- ezt megismételve (*fent az oszlop és a sor szavak megcserélésével*) megkapjuk ugyanezt a bizonyítást *alsóháromszög-mátrix*ra is

3. Determináns alaptulajdonságai (2)

- **Tétel**
  - ! A $(n \times n)$-es mátrix, $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár, $1 \leq i, j \leq n, i \neq j \in \mathbb{Z}$
  - **(1)** ha A egy sorát megszorozzuk λ-val, akkor a kapott A' mátrix determinánsa λ-szorosa A-énak:

    $$\det A' = \lambda \cdot \det A$$

  - **(2)** ha A két sorát felcseréljük, akkor a kapott A' mátrix determinánsa ellentétje A-énak:

    $$\det A' = (-1) \cdot \det A$$

  - **(3)** ha A i-edik sorát helyettesítjük sajátmagának és a j-edik sor λ-szorosának összegével, akkor a kapott A' mátrix determinánsa megegyezik A-éval:

    $$\det A' = \det A$$

  - oszlopokra igaz ugyanez
- **Bizonyítás (*egy hosszú bizonyítás következik… készülj fel rá lelkileg*)**
  - **(1)** TFH. A'-t az i-edik sor λ szorzásával kaptuk
  - hasonlítsuk össze A és A' determinánsának definíció szerinti kiszámítását:
  - mivel minden bástyaelhelyezés pontosan egy elemet tartalmaz az i-edik sorból, ezért az A kiszámítása közben keletkező szorzatok mindegyikében egy tényező a λ-szorosára változik, amikor $\det A'$-t számítjuk
  - maga a szorzat értéke is a λ-szoros lesz, előjel nem változik
  - mindegyik összeadandó a λ-szorosára változik, ezért ezek (előjeles) összege, vagyis a determináns értéke is

[K62] megjegyzést írt:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[K63] megjegyzést írt:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

[K64] megjegyzést írt:

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix} \xleftarrow{\times 2} 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

[K65] megjegyzést írt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 7 \\ 6 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

[K66] megjegyzést írt:

$$\det \begin{pmatrix} & & & \\ 7 & 9 & 6 & 13 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 7 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{4} \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot (4 \quad 3 \quad 0 \quad 7) + 2 \cdot (1 \quad 3 \quad 2 \quad 1) = (6 \quad 9 \quad 4 \quad 9)$$

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 7 \\ 7 & 9 & 6 & 13 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot (4 \quad 3 \quad 0 \quad 7) + 2 \cdot (1 \quad 3 \quad 2 \quad 1) = (6 \quad 9 \quad 4 \quad 9)$$

[K67] megjegyzést írt: Az azt meghatározó bástyaelhelyezés ugyanaz.

- bizonyítás érvényes a j-edik oszlopra is
- **(2)** példán keresztüli bemutatása:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \boxed{5} & 6 \\ 7 & \boxed{8} & 9 & 10 & 11 \\ \boxed{12} & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 17 & 18 & 19 & 20 & \boxed{21} \\ 22 & 23 & \boxed{24} & 25 & 26 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \boxed{5} & 6 \\ 7 & \boxed{8} & 9 & 10 & 11 \\ 22 & 23 & \boxed{24} & 25 & 26 \\ 17 & 18 & 19 & 20 & \boxed{21} \\ \boxed{12} & 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

- *a* 3*. és az* 5*. sor felcserélésével kaptuk* A'*-t*
- A*-ban bekeretezett rész a bástyaelhelyezés*
- ennek megfelelő permutáció $\pi = (4, 2, 1, 5, 3)$, ennek inverziószáma $5 \to$ keletkező szorzat negatív előjelet kap
- A' kiszámításánál ugyanez, különbség a tényezők sorrendjében, és a bástyaelhelyezésben
- $\pi' = (4, 2, 3, 5, 1)$, ekkor inverziószám már 6, előjel pozitív
- π-ből $\pi_3 = 1$ és $\pi_5 = 3$ felcserélésével kapjuk π'
- ugyanígy A és A'
- tehát: bástyaelhelyezés szorzatok sorrendtől eltekintve azonosak, előjelük ellentétes
- oszlopcserénél lényegében azonos
- **(3)** lemmával/segédtétellel bizonyítjuk:

[K68] megjegyzést írt: π-ből nem π_i *és* π_j, hanem i és j felcserélésével kapjuk π'.

Determináns alaptulajdonságai lemma

- **Tétel**
  - TFH. az $(n \times n)$-es X, Y, Z mátrixok az i-edik soraiktól eltekintve elemről elemre megegyeznek
  - i-edik soraikra viszont fennáll, hogy $z_{i,j} = x_{i,j} + y_{i,j}$ minden $1 \leq j \leq n$ esetén
  - a Z i-edik sora épp az X és az Y i-edik sorának (tagonkénti) összege
  - ekkor $\det Z = \det X + \det Y$
  - az állítás érvényes oszlopokra is

- **Lemma bizonyítása**
  - vegyünk egy tetszőleges *bástyaelhelyezés*t Z-ben
  - feleljen meg a π permutációinak, ebből keletkező szorzat tehát:

$$(-1)^{I(\pi)} \cdot z_{1,\pi_1} \cdot \ldots \cdot z_{i,\pi_i} \cdot \ldots \cdot z_{n,\pi_n}$$

  - a $z_{i,\pi_i} = x_{i,\pi_i} + y_{i,\pi_i}$ behelyettesítéssel:

$$(-1)^{I(\pi)} \cdot z_{1,\pi_1} \cdot \ldots \cdot (x_{i,\pi_i} + y_{i,\pi_i}) \cdot \ldots \cdot z_{n,\pi_n}$$

  - felbontva a zárójelet, és felhasználva, hogy minden $k \neq i$ esetén $z_{k,\pi_k} = x_{k,\pi_k} = y_{k,\pi_k}$:

$$(-1)^{I(\pi)} \cdot x_{1,\pi_1} \cdot \ldots \cdot x_{i,\pi_i} \cdot \ldots \cdot x_{n,\pi_n} + (-1)^{I(\pi)} \cdot y_{1,\pi_1} \cdot \ldots \cdot y_{i,\pi_i} \cdot \ldots \cdot y_{n,\pi_n} + (-1)^{I(\pi)} \cdot z_{1,\pi_1} \cdot \ldots \cdot z_{i,\pi_i} \cdot \ldots \cdot z_{n,\pi_n}$$

  - mivel minden bástyaelhelyezésre összegezve definíció szerint $\det Z$ és $(\det X + \det Y)$-t kapjuk, a lemmát belátva
  - (oszlopok esetén bizonyítás lényegében azonos)
- **Bizonyítás**
  - **(3) folytatás…**
  - lemma alkalmazható az A' mátrixra, hiszen abban az i-edik sor minden eleme egy kéttagú összeg:
  - $a'_{i,k} = a_{i,k} + \lambda \cdot a_{j,k}$ minden k-ra
  - lemmát alkalmazva: $Z = A', X = A,$ és Y pedig az a mátrix, amely az i-edik sorától eltekintve azonos A-val
  - az i-edik sorában pedig az A j-edik sorának λ-szorosa áll: $y_{i,k} = \lambda \cdot a_{j,k}$
  - lemmát ezekre alkalmazva: $\det A' = \det A + \det Y$
  - már csak $\det Y = 0$ bizonyítása kell
  - Y i-edik sorára alkalmazható a tétel (már bebizonyított) ***(1*** állítás:
  - ha Y' jelöli azt a mátrixot, amely az i-edik sorától eltekintve azonos Y-nal (és így A-val), az i-edik sorában pedig az A j-edik sorának másolata áll
    - vagyis $y'_{i,k} = a_{j,k}$ minden k-ra, akkor ***(1***-ből $\det Y = \lambda \cdot \det Y$ következik

[K69] **megjegyzést írt:** Mindjárt vége, mély levegő…

- Y'-re pedig a tétel **(2** állítását alkalmazzuk:
- ha Y'-ben felcseréljük az i-edik és j-edik sort, akkor a determináns az ellentétjére változik, és változatlan is marad (hiszen Y'-n a sorcsere „nem látszik”, annak i-edik és j-edik sora azonos)
- $\rightarrow \det Y' = -(\det Y') \rightarrow \det Y = 0$, tétel bizonyítva
- $\det Y = \lambda \cdot \det Y' \rightarrow \det Y = 0 \rightarrow \det A' = \det A + \det Y \rightarrow \det A' = \det A$
- oszlopokra ismét változtatás nélkül elmondható

[K70] **megjegyzést írt:** Többi állításban is az oszlopos verziókat kell használni.

4. Determináns kiszámolása – Gauss eliminációval

[K71] **megjegyzést írt:**

- Bemenet: $(\mathrm{n} \times \mathrm{n})$- es A mátrix
- **0. lépés**
  - $\mathrm{i} \leftarrow 1, \mathrm{D} \leftarrow 1$
- **1. lépés**
  - ha $a_{i,j} = 0$, akkor folytassuk a **2. lépés**nél
  - szorozzuk meg i-edik sort $\frac{1}{a_{i,j}}$-vel
  - $\mathrm{D} \leftarrow \mathrm{D} \cdot a_{i,j}$
  - ha $\mathrm{i} = \mathrm{n}$, akkor $\mathtt{PRINT}$ " $\det A =$ ", D; $\mathtt{STOP}$
  - minden $\mathrm{i} < \mathrm{t} \leq \mathrm{n}$ esetén adjuk a t-edik sorhoz az i-edik sor $(-a_{t,i})$-szeresét
  - $\mathrm{i} \leftarrow \mathrm{i} + 1$
- **2. lépés**
  - ha $i < n$, és van olyan $\mathrm{i} < \mathrm{t} \leq \mathrm{k}$, melyre $a_{t,i} \neq 0$, akkor:
    - cseréljük fel az i-edik sort a t-edikkel
    - $\mathrm{D} \leftarrow (-1) \cdot D$
    - folytassuk az **1. lépés**nél
  - $\mathtt{PRINT}$ " $\det A = 0$"; $\mathtt{STOP}$

6. Sarrus-szabály, speciális

- csak (3×3)- as mátrixoknál működik

[K72] **megjegyzést írt:**

BACK

10. tétel:
Kifejtési tétel, mátrix

Tételcím

A determinánsok kifejtési tétele (bizonyítás nélkül). Műveletek mátrixokkal (összeadás, skalárral szorzás, transzponálás), ezek tulajdonságai. A transzponált determinánsa. Determinánsok szorzástétele (bizonyítás nélkül).

1. Kifejtési tétel

- Tétel
  - az $(n \times n)$-es A mátrix valamelyik sorának vagy oszlopának minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldetermináns értékével
  - a kapott n db kéttényezős szorzatot összeadjuk → A determináns értékét kapjuk

2. Mátrix

- Definíció
  - adott egy $k, n \geq 1$-es egészek esetén $(k \times n)$-es mátrixnak nevezzük egy k sorból, és n oszlopból álló táblázatot
  - minden cellájában valós szám áll
  - $(k \times n)$-es mátrixok halmazát $\mathbb{R}^{k \times n}$ jelöli
  - A mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elemet $a_{i,j}$ jelöli
  - $\mathbb{R}^{k \times n}$-en értelmezett, " $+$ "-al jelölt összeadást és tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén " $\cdot$ "-tal jelölt skalárral való szorzást tudjuk értelmezni

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k,1} & b_{k,2} & \dots & b_{k,n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \dots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \dots & a_{2,n}+b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1}+b_{k,1} & a_{k,2}+b_{k,2} & \dots & a_{k,n}+b_{k,n} \end{pmatrix},$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \dots & \lambda a_{1,n} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \dots & \lambda a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{k,1} & \lambda a_{k,2} & \dots & \lambda a_{k,n} \end{pmatrix}$$

3. Mátrixműveletek

- **Tétel**
  - ! $A, B, C \in \mathbb{R}^{k \times n}$ és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
  - ekkor igazak az alábbiak:
    - **(1)** $A + B = B + A$
    - **(2)** $(A + B) + C = A + (B + C)$
    - **(3)** $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$
    - **(4)** $A \cdot (\lambda + \mu) = A \cdot \lambda + A \cdot \mu$
    - **(5)** $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A$

4. Transzponált

- Definíció
  - egy $(k \times n)$-es A mátrixának nevezzük az $(n \times k)$-as B mátrixot, ha $b_{i,j} = a_{j,i}$ teljesül minden $1 \le i \le n$ és $1 \le j \le k$ esetén
- Jelölés
  - $B = A^T$

5. Mátrixszorzás

- Definíció
  - a $(k \times n)$-es A $(n \times m)$-es B mátrixok szorzatának nevezzük

[K73] megjegyzést írt: Kommutatív - felcserélhetőség

[K74] megjegyzést írt: Asszociatív – felbonthatóság/ csoportosíthatóság

[K75] megjegyzést írt: Szorzásra nem kommutatív!!

[K76] megjegyzést írt: Hasonló igazak:
Mátrixszorzás az összeadásra nézve disztributív
$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$
Mátrixszorzás asszociatív
$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

[K77] megjegyzést írt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

- $A \cdot B$-vel jelöljük azt a $(k \times m)$-es C mátrixot, melyre minden $1 \leq i \leq k$ és $1 \leq j \leq m$ esetén

$$c_{i,j} = a_{i,1} \cdot b_{1,j} + \ldots + a_{i,n} \cdot b_{n,j}$$

- **Állítás**
  - ha az A és B mátrixokra $A \cdot B$ szorzat létezik, akkor $A^T \cdot B^T$ is létezik és $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$

6. Transzponált determinánsa

- **Tétel**
  - minden négyzetes mátrixra $\det A^T = \det A$
- **Bizonyítás**
  - (*példán mutatjuk be, felhasználva a 9. tételben látott mátrixokat:*)

[K78] megjegyzést írt: Melyekről tudjuk, hogy permutáció $\pi = (4, 2, 1, 5, 3)$, inverziószám 5, szorzat negatív előjelet kap.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \boxed{5} & 6 \\ 7 & \boxed{8} & 9 & 10 & 11 \\ \boxed{12} & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 17 & 18 & 19 & 20 & \boxed{21} \\ 22 & 23 & \boxed{24} & 25 & 26 \end{pmatrix}, \quad A^T = B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & \boxed{12} & 17 & 22 \\ 3 & \boxed{8} & 13 & 18 & 23 \\ 4 & 9 & 14 & 19 & \boxed{24} \\ \boxed{5} & 10 & 15 & 20 & 25 \\ 6 & 11 & 16 & \boxed{21} & 26 \end{pmatrix}$$

- A^T determinánsának definíció szerinti kiszámításakor is megjelenik ez a szorzat
- itt a megfelelő permutáció $\pi' = (3, 2, 5, 1, 4)$, amelynek az inverziószáma „véletlenül” szintén 5, előjel marad negatív
- ! A tetszőleges $(n \times n)$-es mátrix és $B = A^T$
- bizonyítjuk, hogy $\det A$ és $\det B$ kiszámításakor ugyanazok a szorzatok keletkeznek, ugyanolyan előjellel
- ! $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ tetszőleges permutáció
- ennek $\det A$ kiszámításakor $(-1)^{I(\pi)} \cdot a_{1,\pi_1} \cdot a_{2,\pi_2} \cdot \ldots \cdot a_{n,\pi_n}$ előjelezett szorzat felel meg
- mivel $a_{i,j} = b_{j,i}$ minden $1 \leq i$ és $j \leq n$ esetén, ezért ugyanez a szorzat (egyelőre előjeltől eltekintve) megjelenik B-ben is $b_{\pi_1,1} \cdot b_{\pi_2,2} \cdot \ldots \cdot b_{\pi_n,n}$ alakban
- ezért ! π' permutáció, amiben az 1 és a π_1-edik helyen, a 2 és a π_2-edik helyen stb. az n és a π_n-edik helyen áll
- ekkor π'-t π inverzének hívjuk

- ugyanis π permutációt olyan kölcsönösen egyértelmű függvénynek fogjuk fel, amely az $1, 2, \dots, n$ számokhoz rendre $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ értékeket rendel
- függvénytani értelemben π π' inverze, és π' is permutáció

[K79] megjegyzést írt: És hogy minden permutáció inverze egyértelműen létezik, valamint π'inverze π Vica versa dolog…

- B elemeiből készített szorozat $b_{1,\pi'_1} \cdot b_{2,\pi'_2} \cdot \dots \cdot b_{n,\pi'_n}$ alakban írható fel, így $I(\pi')$ előjelet kapja
- meg kell mutatni, hogy $I(\pi) = I(\pi')$ igaz minden π permutációra és annak a π' inverzére
- ! π permutációban $\pi_i = k, \pi_j = m$, ekkor a π' inverz permutációban $\pi'_k = i$ és $\pi'_m = j$
- k és m tagok π-ben definíció szerint akkor állnak inverzióban, ha $i < j$, de $m < k$
- definíció szerint ez azt jelenti, hogy π'-ben az i, j tagok állnak inverzióban, hiszen $m < k$, de $\pi'_m = j > i = \pi'_k$
- összefoglalva:
  - π-ben π_i, π_j, akkor és csak akkor állnak inverzióban, ha π'-ben i, j állnak inverzióban

[K80] megjegyzést írt: ezt a fenti példán illusztrálva: π-ben a $\pi_1 = 4, \pi_3 = 1$ tagok inverzióban állank, ennek megfelelően π'-ben az 1 és 3 állnak inverzióban.

- így π-ben inverzióban álló elempárok kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők a π'-ben inverzióban álló elempároknak
- $\rightarrow I(\pi) = I(\pi')$ valóban következik

7. Determinánsok szorzástétele

- **Tétel**
  - bármely A és B $(n \times n)$-es mátrixokra:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

BACK

11. tétel:
Lineáris egyenletrendszer megoldhatósága

Tételcím

$(n \times n)$-es lineáris egyenletrendszer egyértelmű megoldhatóságának jellemzése a determináns segítségével. Kapcsolat a lineáris egyenletrendszerek, az $\mathbb{R}^n$-beli generált altérhez tartozás kérdése, illetve a mátrixszorzáson alapuló mátrixegyenletek között. Kapcsolat négyzetes mátrix determinánsa, illetve a sorok és az oszlopok lineáris függetlensége között.

1. Lineáris egyenletrendszer megoldhatósága

- **Tétel**
  - ! $(A|b)$ egy n változós, n egyenletből álló lineáris egyenletrendszer kibővített együtthatómátrixa
  - az egyenletrendszer akkor és csak akkor egyértelműen megoldható, ha $\det A \neq 0$

[K81] megjegyzést írt: A tehát csak a változók együtthatóit tartalmazza, b az egyenletek jobb oldalaiból áll.

- **Bizonyítás**
  - futtassuk $(A|b)$-re Gauss-eliminációt
  - az algoritmus által megtett sorekvivalens lépések az együtthatómátrix determinánsát megváltoztatják ugyan, de annak nulla/ nemnulla mivoltán nem változtatnak
  - Gauss-elimináció az alábbi három lehetőség valamelyikével ér véget:
    - tilos sor: egyenletrendszer nem megoldható
    - egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van:
      - kevesebb sor, mint oszlop (és fordítva), mivel eredetileg A $(n \times n)$-es volt
      - → az első fázis 3. lépésében keletkeznie kellett csupa 0 sornak, emiatt $\det A$ eredetileg is 0
    - egyenletrendszer megoldása egyértelmű:
      - RLA, determinánsa 1
      - főátlóban csupa 1

- mindenhol máshol 0
- $\rightarrow$ mivel determináns végül nem 0, ezért eredetileg sem volt 0

2. $\mathbb{R}^k$-n ekvivalens állítások

- **Tétel**
  - ! $\underline{a_1}, \dots, \underline{a_n}, \underline{b} \in \mathbb{R}^k$ vektorok és A az $\underline{a_i}$-k egyesítésével keletkező $(k \times n)$-es A mátrix
  - az alábbi állítások ekvivalensek:
    - **(1)** megoldható $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ „mátrixegyenlet"
    - **(2)** megoldható az $(A|\underline{b})$ kibővített együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer
    - **(3)** $\underline{b} \in \langle \underline{a_1}, \dots, \underline{a_n} \rangle$
- **Bizonyítás**
  - **(2)** és **(3)** állítás ekvivalens
  - **(3)** állítás teljesülése azt jelenti, hogy létezik a $\lambda_1 \underline{a_1} + \dots + \lambda_n \underline{a_n} = \underline{b}$ lineáris kombináció
  - vektor i-edik koordinátája minden $1 \le i \le k$ esetén $a_{i,1}\lambda_1 + \dots + a_{i,n}\lambda_n = b_i$
  - tehát az alsó és a felső egyenlet ekvivalens, és ezzel $(A|\underline{b})$ lineáris egyenletrendszert kapjuk
  - **(1)** és **(2)** ekvivalenciájához azt kell észrevennünk, hogy $\underline{x}$ csak $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektor lehet
  - $\underline{x}$ j-edik koordinátája minden $1 \le j \le n$ esetén x_j-vel jelölve az $A \cdot \underline{x}$ szorzat i-edik koordinátája a mátrixszorzás definíciója szerint $a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n$
  - ezért $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ azzal ekvivalens, hogy $a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n = b_i$ teljesül minden $1 \le i \le k$ esetén $\rightarrow$ ismét $(A|\underline{b})$ lineáris egyenletrendszert kapjuk

[K82] megjegyzést írt: Mert n sora van, ha $A \cdot \underline{x}$, másrészt 1 oszlopa van, ha $A \cdot \underline{x}$ 1 oszlopú

- **Következmény:**
  - ! $\underline{a_1}, \dots, \underline{a_n} \in \mathbb{R}^k$ vektorok és A az $\underline{a_i}$-k egyesítésével keletkező $(k \times n)$-es A mátrix
  - az alábbi állítások ekvivalensek:
    - $A \cdot \underline{x} = 0$ lineáris egyenletrendszernek az egyetlen megoldása $\underline{x} = \underline{0}$
    - $\underline{a_1}, \dots, \underline{a_n}$ vektorok lineárisan függetlenek
- **Bizonyítás**
  - $\underline{a_1}, \dots, \underline{a_n}$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha $\lambda_1\underline{a_1}, \dots, \lambda_n\underline{a_n} = \underline{0}$, triviális lineáris kombináció esetén
    - vagyis: $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$
  - ez ekvivalens azzal, hogy $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ lineáris egyenletnek egyetlen megoldása az, hogy minden változó értéke 0

3. Sor/oszlopvektor lineáris függetlenség

- **Tétel**
  - ! A $(n \times n)$-es mátrix
  - az alábbi állítások ekvivalensek:
    - **(1)** A oszlopai, mint $\mathbb{R}^n$-beli vektorok, lineárisan függetlenek
    - **(2)** $\det A \neq 0$
    - **(3)** A sorai, mint n hosszú sorvektorok lineárisan függetlenek
- **Bizonyítás**
  - **(1)** állítás az előző következmény miatt azzal ekvivalens, hogy az $(A|\underline{b})$ kibővített együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer egyértelműen megoldható
  - mivel A négyzetes mátrix, ezért a lineáris egyenletrendszer megoldhatósága tétel szerint, akkor és csak akkor teljesül, ha $\det A \neq 0$ (***(1)** és **(2)** állítás bizonyítva*)
  - **(2)** és **(3)** állítás közötti ekvivalenciához A transzponáltjára alkalmazzuk az **(1)** és **(2)** állítás közötti, már bizonyított ekvivalenciát

- mivel A^T oszlopai megegyeznek A soraival, és fordítva, ezért A sorai akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha $\det A^T \neq 0$
- azonban transzponált-determináns tétel miatt $\det A = \det A^T$, ezért ez valóban ekvivalens $\det A \neq 0$ feltétellel

BACK

12. tétel:
Mátrix inverze, rangja

Tételcím

Mátrix inverze, létezésének szükséges és elégséges feltétele, az inverz kiszámítása. Mátrix rangja, rangfogalmak egyenlősége, rang meghatározása.

1. Inverz mátrix

- Definíció
  - egy $(n \times n)$-es A *mátrix inverz*ének nevezzük az $(n \times n)$-es X mátrixot, ha teljesül:

$$A \cdot X = E = X \cdot A$$

[K83] megjegyzést írt: A mátrix inverzének a kiszámításánál nem számít a szorzatok sorrendje, mindkét esetben, tehát $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = 1$.
Ez kizárólag csak négyzetes, azaz $(n \times n)$-es mátrixokra igaz.

- Jelölés
  - $X = A^{-1}$

2. Inverz mátrix létezése

- **Tétel**
  - A $(n \times n)$-es mátrixnak akkor és csak akkor létezik inverze, ha $\det A \neq 0$
  - ha A^{-1} létezik, akkor az egyértelmű
- **Bizonyítás**
  - TFH. $X = A^{-1}$ létezik
  - megmutatjuk, hogy $\det A \neq 0$
  - definíció szerint $A \cdot X = E$ egyenlet mindkét oldalának determinánsát véve: $\det(A \cdot X) = \det E$, ahol
    - $\det E = 1$
    - alkalmazzuk szorzástételt: $\det A \cdot \det X = 1 \rightarrow \det A \neq 0$

3. Inverz mátrix létezés lemmája

- **Tétel**
  - ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\det A \neq 0$, akkor egyértelműen létezik $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix, hogy $A \cdot X = E$
- **Bizonyítás**
  - fenti szorzás ekvivalens, mátrixszorzás szerint a következővel:

$$A \cdot \underline{x}_1 = \underline{e}_1$$
$$A \cdot \underline{x}_2 = \underline{e}_2$$
$$\vdots$$
$$A \cdot \underline{x}_n = \underline{e}_n$$

  - az $A \cdot \underline{x}_i = \underline{e}_i$ lineáris egyenletrendszer, amely úgy jelölhető, hogy $(A|\underline{e}_i)$
  - mivel $\det A \neq 0$, ezért ez az egyenletrendszer egyértelműen megoldható
  - beláttuk a lemmát: a keresett X i-edik oszlopa a $A \cdot \underline{x}_i = \underline{e}_i$ rendszer egyértelmű megoldása minden $1 \leq i \leq n$ esetén
- **Inverz kiszámítása Gauss-eliminációval**
  - egymás mellé felírjuk az $(n \times n)$-es A mátrixot, valamint az $(n \times n)$-es egységmátrixot
  - lefuttatjuk a Gauss-eliminációt az A-n, úgy, hogy sorekvivalens lépéseket megismételjük, az E-n is
  - addig folytatjuk a Gauss-eliminációt, amíg az A RLA-ban nem lesz
  - ekkor az $E' = A^{-1}$

[K84] megjegyzést írt:

Példa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad A|E = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

4. Négyzetes részmátrix

- Definíció
  - ! A $(n \times n)$-es mátrix és $r \leq k, n \in \mathbb{Z}$
  - válasszuk ki tetszőlegesen A sorai és oszlopai közül r- r db
  - ekkor kiválasztott sorok és oszlopok kereszteződéseiben kialakuló $(r \times r)$-es mátrixot A egy négyzetes *részmátrix*ának nevezzük

5. Rang (1)

- Definíció
  - ! A tetszőleges mátrix, azt mondjuk, hogy
    - A ***oszloprang***ja r, ha A oszlopai közül kiválasztható r db úgy, hogy a kiválasztott oszlopok lineárisan függetlenek, de $r+1$ már nem válaszható ki így
    - A ***sorrang***ja r, ha A sorai közül kiválasztható r db úgy, hogy a kiválasztott sorok lineárisan függetlenek, de $r+1$ már nem válaszható ki így
    - A ***determinánsrang***ja r, ha A-nak van nemnulla determinánsú $(r \times r)$-es részmátrixa, de $(r+1 \times r+1)$-es nemnulla determinánsú már nincs

6. Rangfogalmak egyenlősége

- **Tétel**
  - minden A mátrixra $o(A) = s(A) = d(A)$
- **Bizonyítás**
  - elég belátni, hogy $o(A) = d(A)$ igaz minden A mátrixra
  - mivel A^T oszlopai megegyeznek A soraival, ezért $s(A) = o(A^T)$, valamint $d(A) = d(A^T)$
  - mivel az A^T-ből válaszható négyzetes részmátrixok az A-ból választhatók transzponáltjai
  - legnagyobb nemnulla determinánsú is ugyanazon méretű
  - ha az $o(A) = d(A)$ állítást minden mátrixra, így A^T-ra is igaznak feltételezzük, akkor összesítve az $s(A) = o(A^T) = d(A^T) = d(A) = o(A)$ egyenlőséget kapjuk
  - csak $o(A) = d(A)$-t kell bizonyítani:
  - először megmutatjuk, hogy $\mathbf{1}: \boldsymbol{o}(\boldsymbol{A}) \geq \boldsymbol{d}(\boldsymbol{A})$, majd, hogy $\mathbf{2}: \boldsymbol{o}(\boldsymbol{A}) \leq \boldsymbol{d}(\boldsymbol{A})$
  - $\mathbf{1}$:TFH. $d(A) = r$
  - meg kell mutatnunk, hogy $o(A) \geq r$, vagyis, hogy A oszlopai közül kiválasztható r db lineárisan független
  - A-ból $d(A) = r$ miatt kiválasztható egy $(r \times r)$-es nemnulla determinánsú M részmátrix

- ! A_M A-nak abból az r oszlopából álló mátrixa, amelyeket az M készítésekor választunk ki
- ekkor tehát M sorai A_M sorainak részhalmaza, és A_M oszlopairól állítjuk, hogy lineárisan függetlenek
    - ha nem így volna, akkor (*a 11-es tételben levő következmény miatt*) $A_M \cdot \underline{x} = \underline{0}$ lineáris egyenletrendszernek volna egy $\underline{x} * \neq \underline{0}$ megoldása
    - ekkor azonban $\underline{x}*$ megoldása volna az $M \cdot \underline{x} = \underline{0}$ lineáris egyenletrendszernek is, hiszen az utóbbi rendszert az előbbiből kapjuk
    - tehát M oszlopai lineárisan összefüggők volnának, ami a sorvektor lineáris függetlenség tétele miatt (*előző tétel*) ellentmondana annak, hogy $\det M \neq 0$
    - így $o(A) \geq d(A)$ valóban igaz
- **2**: ezt lemmával bizonyítjuk

Mátrix oszlopok lineáris függetlenség lemmája

- **Tétel**
    - ! $C(k \times n)$-es mátrix, amelynek az oszlopai (mint $\mathbb{R}^k$-beli vektorok) lineárisan függetlenek
    - ha $k > n$, akkor C sorai közül kiválasztható egy úgy, hogy ezt a sort elhagyva a kapott $(k-1) \times n$-es C' mátrix oszlopai szintén lineárisan függetlenek
- **Bizonyítás**
    - ! C oszlopai $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_n$, az ezek által generált $\mathbb{R}^k$-beli altért $W = \langle \underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_n \rangle$
    - mivel W-ben van n elemű generátorrendszer, és $k > n$ F-G egyenlőtlenség miatt nem lehet benne k elemű lineárisan független rendszer
    - $\mathbb{R}^k$-beli standard bázis vektorai között van olyan, amelyik nem tartozik W-hez
    - ! $\underline{e}_j$ ilyen, állítjuk, hogy C j-edik sora teljesíti a lemma feltételeit:
        - az elhagyásával a kapott C' mátrix oszlopai lineárisan függetlenek
    - TFI nem így van

[K85] megjegyzést írt: M-hez nem tartozó A_M-beli soroknak megfelelő egyenleteket elhagyjuk

[K86] megjegyzést írt: Amelyben tehát az 1-es a j-edik helyen áll.

- $C' \cdot \underline{x} = \underline{0}$ lineáris egyenletrendszernek van egy $\underline{x} * \neq \underline{0}$ megoldása
- ekkor $C' \cdot \underline{x} * \neq \underline{0}$, mert C oszlopai lineárisan függetlenek
- mivel $C \cdot \underline{x} *$ szorzat abban különbözik $C' \cdot \underline{x} *$-től, hogy az utóbbiba a j-edik helyre „beszúródik” a C j-edik sorának és a $\underline{x} *$-nak a skaláris szorzata
- ezért $C \cdot \underline{x} *$ oszlopvektor j-edik koordinátája egy $\alpha \neq 0$ szám, többi 0
- következik, hogy $C \cdot \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \underline{x} *\right) = \frac{1}{\alpha} \cdot \left(C \cdot \underline{x} *\right) = \underline{e}_j$
- ez ellentmond annak, hogy $\underline{e}_j \notin W$
  - viszont ez ellentmond a 11.tétel Mátrixszorzás tételének
- mely szerint a C oszlopainak az $\left(\frac{1}{\alpha} \cdot \underline{x} *\right)$ kombinációja épp $\underline{e}_j$-t adja vissza, lemma bizonyítva

- **2**: bizonyítás folytatása:
- ! $o(A) = r$ és válasszunk A oszlopai közül r lineárisan függetlent → alkossák ezek C mátrixot
- mutassuk meg, hogy $d(A) \geq r$
- C, A sorainak számát k-val jelölve C oszlopai $\mathbb{R}^k$-beli vektorok, így az F-G egyenlőtlenség miatt $k \geq n$
- $k > r$, akkor a fenti lemmát C-re alkalmazva kapjuk a $(k-1) \times r$-es C' mátrixot, amelynek az oszlopai továbbra is lineárisan függetlenek
- ha $k - 1 > r$, akkor ismét alkalmazhatjuk a lemmát C'-re és ezt folytathatjuk egészen amíg $k - r$ lépés után egy $(r \times r)$-es $C *$ mátrixot kapunk
- (*11. tétel Sorvektor lineáris függetlenség tétel miatt*) $\det C * \neq 0$
- mivel $C *$ az A-nak $(r \times r)$-es részmátrixa, ezért ez bizonyítja $d(A) \geq r$, és a tételt is

[K87] megjegyzést írt: Hiszen $\mathbb{R}^k$-ban van k elemű generátorrendszer: bármely bázis ilyen.

[K88] megjegyzést írt: Mert $C *$ oszlopai lineárisan függetlenek.

7. Rang (2)

- Definíció
  - az A mátrix rangjának nevezzük az $o(A), s(A), d(A)$ közös értékét

- Jelölés
  - $r(A)$

8. Rang kiszámolása (1)

- Tétel
  - ! A $(k \times n)$-es mátrix és az oszlopai legyenek $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$
  - ekkor $r(A) = \dim\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle$
- Bizonyítás
  - válasszuk ki A oszlopai közül a legtöbbet úgy, hogy ezek lineárisan függetlenek legyenek
  - oszloprang definíció szerint ekkor $r = r(A)$
  - állítjuk, hogy $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ bázist alkot a $W = \dim\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle$ altérben
  - be kell látni, hogy $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ generátorrendszer W-ben
  - ! $U = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle$, lássuk be, hogy $U = W$
  - $r < i \leq n$ esetén $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ lineárisan összefüggő, mivel A-ból $r + 1$ lineárisan független oszlopot nem lehet kiválasztani
  - az Újonnan érkező vektor lemmája szerint ekkor $\underline{a}_i \in \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle = U$, tehát $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ mind U-beli
  - mivel U altér, ezért minden W-beli, tehát $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektorokból lineáris kombinációval kifejezhető vektor is U-beli kell, hogy legyen
  - bizonyítottuk, hogy $W \subseteq U$

9. Rang kiszámolása (2)

- Tétel
  - az elemi sorekvivalens lépések a mátrix rangját nem változtatják meg
  - a LA mátrix sorainak a száma egyenlő a mátrix rangjával
- Bizonyítás
  - (*elemi sorekvivalens lépések bizonyítása)*
  - válasszunk ki A oszlopai közül tetszőleges néhányat, ezek együtt az A'
  - A' oszlopai az előző tétel Következménye miatt akkor és csak akkor lineárisan független, ha az $A' \cdot \underline{x} = \underline{0}$ lineáris egyenletrendszernek az egyetlen megoldása $\underline{x} = \underline{0}$

- amikor A-ra alkalmazzuk valamelyik elemi sorekvivalens lépést, akkor ugyanezt alkalmazzuk az $(A'|\underline{0})$ kibővített együtthatómátrixra is
- egyrészt A' sorai az A sorainak részei, másrészt, ha a jobb oldalakon csupa 0 áll, akkor ezt a tulajdonságot mindegyik elemi sorekvivalens lépés fenntartja
- azonban $(A'|\underline{0})$-n végzett lépések az $A' \cdot \underline{x} = \underline{0}$ lineáris egyenletrendszer megoldásait nem változtatják meg
- → A-n végzett elemi sorekvivalens lépések nem változtatnak azon, hogy A' oszlopai lineárisan függetlenek-e
- így A oszlopai közül kiválasztható legnagyobb lineárisan független rendszer mérete, vagyis az oszloprang se változik
- (*LA mátrix sorainak száma egyenlő a… bizonyítás)*
- ha a LA mátrix sorainak száma k, akkor A-ból az összes sor és a vezéregyeseket tartalmazó oszlopok kiválasztásával keletkező M négyzetes részmátrix egy felsőháromszög-mátrix
- ennek főátlójában minden elem 1 (vezéregyesek)
- így $\det M = 1 \neq 0$ vagyis A-nak van $(k \times k)$-as, nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixa
- ennél nagyobb nyilván nincs, mert A-nak csak k sora van
- tehát determináns rangja valóban k

[K89] megjegyzést írt: Így az A teljes sorain végzett lépés A'-re is azonos hatással van.

[K90] megjegyzést írt: Ezt mondja ki a Gauss-eliminációs állítás a 8. tételben, és épp ezért lettek ezek a Gauss-elimináció megengedett lépései.

[K91] megjegyzést írt: A'-n is.

BACK

13. tétel: Lineáris leképzés, transzformáció

Tételcím

Lineáris leképzés fogalma, mátrixa. Szükséges és elégséges feltétel egy függvény lineáris leképzés voltára. Lineáris leképzések szorzata, szorzat mátrixa. Következmény: addíciós tételek a sinus és cosinus függvényekre. Lineáris transzformáció invertálhatósága.

1. Lineáris leképzés

- Definíció
  - $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *lineáris leképzés*nek hívjuk, ha
    - létezik olyan $(k \times n)$-es mátrix, melyre $f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$ minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$
    - $n = k$ esetben f-et *lineáris transzformáció*nak is nevezzük
    - ha : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ leképzésnek és $f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$ minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$-re, akkor mátrixa A
- Jelölés
  - $A = [f]$ *(3. állítás jelölése)*

2. Lineáris leképzés feltétele

- **Tétel**
  - $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvény akkor és csak akkor lineáris leképzés, ha:
    - **(1)** $f\left(\underline{x} + \underline{y}\right) = f(\underline{x}) + f(\underline{y})$ igaz minden $x, y \in \mathbb{R}^n$
    - **(2)** $f(\lambda \cdot \underline{x}) = \lambda \cdot f(\underline{x})$ igaz minden $x \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén
  - ha f teljesíti ezt a 2 tulajdonságot, akkor:
    - $[f]$ egyértelmű
    - és azonos azzal a $(k \times n)$-es mátrixszal, melynek minden $1 \leq i \leq n$ esetén az i-edik oszlopa $f(\underline{e_i})$

[K92] megjegyzést írt: Itt $\underline{e_i}$ az $\mathbb{R}^n$-beli standard bázis vektora.

- **Bizonyítás**
  - (*szükségesség belátása*)
  - TFH. f lineáris leképzés és $A = [f]$
  - *(10. tétel, Mátrixműveletek tétel, Megjegyzések: mátrixszorzás összeadásra nézve disztributivitás miatt:)*

$$f\left(\underline{x}+\underline{y}\right) = A\left(\underline{x}+\underline{y}\right) = A\underline{x} + A\underline{y} = f(\underline{x}) + f(\underline{y})$$

  - *(10. tétel, Mátrixműveletek tétel, Megjegyzések: mátrixszorzás asszociativitás miatt:)*

$$f(\lambda \cdot \underline{x}) = A(\lambda \cdot \underline{x}) = \lambda(A \cdot \underline{x}) = \lambda \cdot f(\underline{x})$$

  - (*egyértelműség belátása*)
  - ! f-nek A egyik mátrixa, $\underline{a}_i$: A-nak i-edik oszlopa minden i-re
  - *(10. tétel, Mátrixszorzás definíció miatt:)*

$$A \cdot \underline{e}_i = \underline{a}_i$$

  - ebből $A = [f]$ miatt: $f(\underline{e}_i) = A \cdot \underline{e}_i = \underline{a}_i$, amely bizonyítja $[f]$ egyértelműségét
    - $[f]$ csak az a mátrix lehet, amelynek i-edik oszlopa $f(\underline{e}_i)$, vagyis csak A
  - (*elégségesség bizonyítása*)
  - ha az első 2 tulajdonság teljesül, akkor f lineáris leképzés
  - mutassunk olyan mátrixot, amelyre: $f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$ minden $x \in \mathbb{R}^n$
  - A mátrix i-edik oszlopa $f(\underline{e}_i)$ minden i-re, jelölje a_i
  - ekkor: $f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$ teljesül $\underline{x} = \underline{e}_i$ vektorokra
  - belátjuk, hogy (1) n tagú összegekre is teljesül

$$f(\underline{v}_1+\ldots+\underline{v}_n) = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2+\ldots+\underline{v}_n) = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2) + f(\underline{v}_3+\ldots+\underline{v}_n)$$
$$= f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2)+\ldots+f(\underline{v}_n)$$

    - vagyis $(n-1)x$ egymás után alkalmazva az (1)
  - ! $x \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges i-edik koordinátáját jelölje: x_i, ekkor:

$$\underline{x} = x_1 \cdot \underline{e}_1+\ldots+x_n \cdot \underline{e}_n$$

$$f(\underline{x}) = f(x_1 \cdot \underline{e}_1 + \cdots + x_n \cdot \underline{e}_n) =$$
$$= f(x_1 \cdot \underline{e}_1)+\ldots+f(x_n \cdot \underline{e}_n) =$$
$$= x_1 \cdot f(\underline{e}_1) + \cdots + x_n \cdot f(\underline{e}_n) =$$

[K93] megjegyzést írt: Fenti bekezdés segít.

[K94] megjegyzést írt: Be kell látni, hogy minden más x-re is.

[K95] megjegyzést írt: Lásd *7. tétel, Standard bázis definíció bizonyítás.*

$$= f(\underline{e}_n) = (x_1 \cdot \underline{a}_1 + \dots + x_n \cdot \underline{a}_n)$$
$$= A \cdot x$$

3. Lineáris leképzés szorzata

- **Tétel**
  - ! $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ és $g: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképzések
  - ezeknek a $g \circ f$ szorzata is lineáris leképzés, melyre $[g \circ f] = [g] \cdot [f]$
- **Bizonyítás**
  - ! $[f] = A$, minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$-re, $f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$
  - ! $[g] = B$, minden $\underline{y} \in \mathbb{R}^k$-re, $f\left(\underline{y}\right) = B \cdot \underline{y}$
  - alkalmazzuk a $g \circ f$ függvényt tetszőleges $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$-re

$$(g \circ f) \cdot (\underline{x}) = g \cdot \left(f(\underline{x})\right) = g \cdot (A \cdot \underline{x}) = B \cdot (A \cdot \underline{x}) = (B \cdot A) \cdot \underline{x}$$

  - tehát $B \cdot A = [g] \cdot [f]$

4. Addíciós tételek

- **Tétel**
  - tetszőleges α és β szögekre teljesülnek az alábbi összefüggések
    - $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$
    - $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$
- **Bizonyítás**
  - ! $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a síkban az origó körüli α, β szöggel való elforgatás
  - ezek lineáris leképzések
  - alkalmazzuk a fenti *Lineáris leképzés szorzata tételt*
  - igaz, hogy $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ az origó körüli $\alpha + \beta$ szögű elforgatással
    - hiszen egy tetszőleges $\underline{v}$-t először β, majd α szöggel elforgatva ugyanazt kapjuk, mintha $\alpha + \beta$ szöggel forgattuk volna
  - f_α, f_β és $f_{\alpha+\beta}$ lineáris transzformációk mátrixa kiolvasható az állításból, ezekre lineáris leképzés szorzata fennáll:

$$[f_{\alpha+\beta}] = [f_\alpha] \cdot [f_\beta]$$

[K96] megjegyzést írt: Egy állításból tudjuk, hogy! $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az a függvény, minden $\underline{v} \in \mathbb{R}$ síkvektorban annak az origó körüli α szöggel való elforgatottját rendeli, ekkor f α lineáris transzformáció, melynek mátrixa $[f\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

[K97] megjegyzést írt: Előbbi megjegyzésben leírva.

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = [f_\beta]$$

$$[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = [f_{\alpha+\beta}]$$

5. Lineáris transzformáció invertálhatósága

- Tétel
  - $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineáris transzformáció akkor és csak akkor invertálható, ha $\det[f] \neq 0$
  - ha ez a feltétel fennáll, akkor $[f^{-1}] = [f]^{-1}$, vagyis az f^{-1} inverz transzformáció mátrixa az f mátrixnak az inverze
- Bizonyítás
  - ! $[f] = A$, vagyis $f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$ minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$
  - *(szükségesség bizonyítása)*
  - ha f invertálható, akkor $\det A \neq 0$
  - TFI $\det A = 0$, ekkor (*8. tétel, Lineáris egyenletrendszer megoldhatósága tétel miatt)* A oszlopai lineárisan összefüggők, ellentmond annak, hogy f invertálható
  - *(elégségesség bizonyítása)*
  - ha $\det A \neq 0$, akkor f invertálható
  - mivel $\det A \neq 0$, ezért (*12. tétel, Inverz mátrix tétel miatt)* létezik A^{-1} inverz mátrix
  - tetszőleges $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén $f(\underline{x}) = \underline{y}$ azt jelenti, hogy

$$\underline{y} = A \cdot \underline{x} \quad /\cdot A^{-1}$$

$$A^{-1} \cdot \underline{y} = A^{-1} \cdot (A \cdot \underline{x}) = (A^{-1} \cdot A) \cdot \underline{x} = E \cdot \underline{x} = \underline{x}$$

  - tehát $\underline{y} \to A^{-1} \cdot \underline{y}$ függvény azonos az f inverzével

[K98] megjegyzést írt: $(n \times n)$-es egységmátrix.

[K99] megjegyzést írt: Beláttuk tehát, hogy létezik f^{-1}, másrészt, hogy $[f^{-1}] = A = [f]^{-1}$.

BACK

14. tétel:
Magtér, képtér

Tételcím

Lineáris leképzések magtere, képtere, ezek altér volta. Dimenziótétel.

1. **Magtér, képtér**

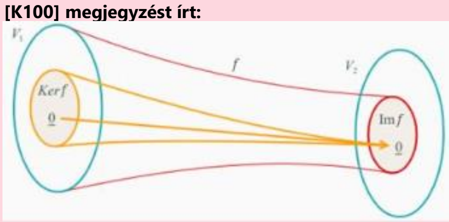
    - Definíció
        - ! $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ lineáris leképzés
        - f *magtere*:
            - jelölés: $Ker\ f$
            - azon $\mathbb{R}^n$-beli vektorok halmazát (V_1), melyeknek a képe az $\mathbb{R}^k$-beli $\underline{0}$

$$Ker\ f = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : f(\underline{x}) = \underline{0}\}$$

        - f *képtere*:
            - jelölés: $Im\ f$
            - azon $\mathbb{R}^k$-beli vektorok halmazát (V_2), melyek megkaphatók (legalább) 1 alkalmas $\mathbb{R}^n$-beli vektor f-fel vett képeként

$$Im\ f = \{\underline{y} \in \mathbb{R}^k : \exists\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n, f(\underline{x}) = \underline{y}\}$$

[K100] megjegyzést írt:



2. **Mag - és képtér altér volta**

    - **Tétel**
        - ! $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ lineáris leképzés, ekkor
            - $Ker\ f \leq \mathbb{R}^n$, vagyis $Ker\ f$ altér $\mathbb{R}^n$-ben
            - $Im\ f \leq \mathbb{R}^k$, vagyis $Im\ f$ altér $\mathbb{R}^k$-ban
    - **Bizonyítás**
        - ($Ker\ f$ *bizonyítása)*
        - *(6. tétel, $\mathbb{R}^n$ alterei definíció miatt)* meg kell mutatnunk, hogy bármely $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in Ker\ f$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén
            - $\underline{x}_1 + \underline{x}_2,\ \lambda \cdot \underline{x}_1 \in\ Ker\ f$ teljesülnek

- ha $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \mathit{Ker}\, f$, akkor $f(\underline{x}_1) = \underline{0}$ és $f(\underline{x}_2) = \underline{0}$
- *(13. tétel, Lineáris leképzés feltétele tétel tulajdonság (1) miatt)*
  $f(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = f(\underline{x}_1) + f(\underline{x}_2) = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0} \to \underline{x}_1 + \underline{x}_2 \in \mathit{Ker}\, f$
- *(13. tétel, Lineáris leképzés feltétele tétel tulajdonság (2) miatt)*
  $$f(\lambda \cdot \underline{x}_1) = \lambda \cdot \underline{0} = \underline{0} \to \lambda \in \mathit{Ker}\, f$$
  - $\mathit{Ker}\, f$ nem lehet üres, hiszen $\underline{0} \in \mathit{Ker}\, f$ definíció szerint mindig igaz
- *($\mathit{Im}\, f$ bizonyítása)*
- ha $[f] = A$, akkor $\mathit{Im}\, f$ definíció szerint azokból az $\underline{y} \in \mathbb{R}^k$ vektorokból áll, melyek kifejezhetők $A \cdot \underline{x} = \underline{y}$ alakban
- *(11. tétel, Mátrixszorzás tétel szerint)* ez ekvivalens $\underline{y} \in \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle$, ahol A oszlopait $\underline{a}_i$-k jelölik
- $\mathit{Im}\, f \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle$ generált altér

3. Dimenziótétel

- **Tétel**
  - ha $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineáris leképzés, akkor $\dim \mathit{Ker}\, f + \dim \mathit{Im}\, f = \dim V_1$
- **Bizonyítás**
  - ! $\dim \mathit{Ker}\, f = m$, válasszunk egy tetszőleges bázist $\mathit{Ker}\, f$-ben, $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m$, amely lineárisan független
  - *(7. tétel, Bázis létezése tétel szerint)* ez a rendszer kiegészíthető $\mathbb{R}^n$ egy bázisává
  - mivel $\dim \mathbb{R}^n = n$, kellenek további $n - m$ vektor szükséges: $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_{n-m}$
  - megmutatjuk, hogy $f(\underline{c}_1), \dots, f(\underline{c}_{n-m})$ rendszer bázis $\mathit{Im}\, f$-ben $\to$ $\dim \mathit{Im}\, f = n - m$
  - lássuk be: $f(\underline{c}_1), \dots, f(\underline{c}_{n-m})$ generátorrendszer $\mathit{Im}\, f$-ben
  - ! $\underline{y} \in \mathit{Im} f$ tetszőleges, ekkor $\underline{y} = f(\underline{x})$ valamely $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$
  - mivel $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m, \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_{n-m}$ generátorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben, ezért $\underline{x}$ kifejezhető lineáris kombinációjukként
    $\underline{x} = \beta_1 \underline{b}_1 + \dots + \beta_m \underline{b}_m + \gamma_1 \underline{c}_1 + \dots + \gamma_{n-m} \underline{c}_{n-m} \quad /\cdot f$

[K101] megjegyzést írt: A képtér és a magtér dimenziója összesen éppen kiadja a V_1 dimenzióját.

[K102] megjegyzést írt: *7. tétel, Bázis létezése következmény miatt.*

[K103] megjegyzést írt: Kihasználjuk f lineáris leképzés tételbeli tulajdonságát.

$$\underline{y} = f(\underline{x}) = f(\beta_1\underline{b}_1 + \cdots + \beta_m\underline{b}_m + \gamma_1\underline{c}_1 + \cdots + \gamma_{n-m}\underline{c}_{n-m})$$

$$= f(\beta_1\underline{b}_1) + \cdots + f(\beta_m\underline{b}_m) + f(\gamma_1\underline{c}_1) + \cdots + f(\gamma_{n-m}\underline{c}_{n-m})$$

$$= \beta_1 f(\underline{b}_1) + \cdots + \beta_m f(\underline{b}_m) + \gamma_1 f(\underline{c}_1) + \cdots + \gamma_{n-m} f(\underline{c}_{n-m})$$

$$= \beta_1\underline{0} + \ldots + \beta_m\underline{0} + \gamma_1 f(\underline{c}_1) + \cdots + \gamma_{n-m} f(\underline{c}_{n-m})$$

$$= \gamma_1 f(\underline{c}_1) + \ldots + \gamma_{n-m} f(\underline{c}_{n-m})$$

- utolsó lépésben felhasználjuk, hogy $f(\underline{b}_1) = \ldots = f(\underline{b}_m) = \underline{0}$

[K104] megjegyzést írt: $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m \in Kerf$ miatt igaz.

- tetszőlegesen választott $\underline{y} \in Imf$ kifejezhető $f(\underline{c}_1), \ldots, f(\underline{c}_{n-m})$ lineáris kombinációja

▪ most belátjuk, hogy $f(\underline{c}_1), \ldots, f(\underline{c}_{n-m})$ lineárisan független

▪ TFH. $\gamma_1 f(\underline{c}_1) + \ldots + \gamma_{n-m} f(\underline{c}_{n-m}) = \underline{0}$

▪ meg kell mutatnunk, hogy *(7. tétel, Standard bázis tétele miatt)* ekkor $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_{n-m} = 0$

[K105] megjegyzést írt: *13. tétel, Lineáris leképzés feltétele tétel tulajdonság használata.*

$$\underline{0} = \gamma_1 f(\underline{c}_1) + \cdots + \gamma_{n-m} f(\underline{c}_{n-m})$$

[K106] megjegyzést írt: $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m \in Kerf$ miatt igaz

$$= f(\gamma_1\underline{c}_1) + \cdots + f(\gamma_{n-m}\underline{c}_{n-m})$$

$$= f(\gamma_1\underline{c}_1 + \cdots + \gamma_{n-m}\underline{c}_{n-m})$$

▪ ebből $Kerf$ definíció szerint $\in Kerf \rightarrow$ kifejezhető $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m$ lineáris kombinációjaként

$$\gamma_1\underline{c}_1 + \ldots + \gamma_{n-m}\underline{c}_{n-m} = \beta_1\underline{b}_1 + \ldots + \beta_m\underline{b}_m \quad /\text{átrendezve}$$

$$-\beta_1\underline{b}_1 - \ldots - \beta_m\underline{b}_m + \gamma_1\underline{c}_1 + \ldots + \gamma_{n-m}\underline{c}_{n-m} = \underline{0}$$

- azonban $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m, \underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_{n-m}$ lineárisan független
- triviális lineáris kombinációja adhatja $\underline{0} \rightarrow \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_{n-m} = 0$

[K107] megjegyzést írt: β is.

- megmutattuk, hogy $f(\underline{c}_1) + \cdots + f(\underline{c}_{n-m})$ lineárisan független, így bázis is

[K108] megjegyzést írt: Mert már beláttuk, hogy generátorrendszer.

BACK

15. tétel: Bázistranszformáció

Tételcím

Bázistranszformáció fogalma, lineáris transzformáció mátrixa adott bázis szerint, annak kiszámítása.

1. Bázistranszformáció

- Tétel
  - ! $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció és B egy $f(n \times n)$-es mátrix, melynek oszlopai bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben
  - ! $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ az a függvény, mely minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén $[\underline{x}]_B$-hez $[f(\underline{x})]_B$-t rendel
  - ekkor g is lineáris transzformáció, melynek mátrixa
$$[g] = B^{-1} \cdot [f] \cdot B$$
- Bizonyítás
  - B oszlopai akkor és csak akkor alkotnak bázist, ha $\det B \neq 0$
  - alteres következmény szerint $\mathbb{R}^n$ bázisai az n tagú lineárisan független rendszerek
  - *(11. tétel, Sorvektor lineáris függetlenség tétel miatt)* B oszlopainak lineáris függetlensége ekvivalens $\det B \neq 0$
  - *(12. tétel, Inverz mátrix létezése tétel miatt)* B^{-1} inverz mátrix valóban létezik
  - folytatáshoz lemmát használunk

⋮

  - folytatva a tételt a lenti lemma segítségével:
  - $g: [\underline{x}]_B \to [f(\underline{x})]_B$ függvény azonos $h^{-1} \circ f \circ h$ függvénnyel
  - ha $[\underline{x}]_B$-re alkalmazzuk h-t, akkor $\underline{x}$-et kapjuk, erre f-et alkalmazva $f(\underline{x})$-et kapjuk, végül erre h^{-1}-et alkalmazva $[f(\underline{x})]_B$-t kapjuk

[K109] megjegyzést írt: ! $V \leq \mathbb{R}^n$ altér $\underline{f_1}, \dots, \underline{f_k}$ V-beli vektorokból álló lineárisan független rendszer. Ha $\dim V = k$, akkor $\underline{f_1}, \dots, \underline{f_k}$ bázis V-ben.

[K110] megjegyzést írt: Az itt bevezetett g lineáris transzformáció mátrixnak a lemmát követő definíció ad nevet.

[K111] megjegyzést írt: Kompozíció.

- *(13. tétel, Lineáris leképzés szorzata tétel miatt)* $g = h^{-1} \circ f \circ h$ valóban lineáris transzformáció, mátrixa:
$$[g] = [h^{-1}] \cdot [f] \cdot [h] = B^{-1} \cdot [f] \cdot B$$

2. Bázistranszformáció lemmája

- Tétel
    - ! $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ az a függvény, mely minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén $[\underline{x}]_B$-hez $\underline{x}$-et rendel
    - ekkor h lineáris transzformáció, melynek mátrixa $[h] = B$
- Bizonyítás
    - ! $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$-re $[\underline{x}]_B$ koordinátavektor i-edik koordinátája α_i minden $1 \leq i \leq n$ esetén
    - ekkor $\underline{x} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{b}_n$
    - *(10. tétel, Mátrixszorzás definíciója szerint)* $B \cdot [\underline{x}]_B$ azonos B oszlopaiból $[\underline{x}]_B$ koordinátáival, mint együtthatókkal képzett lineáris kombinációval
    - így $\underline{x} = B \cdot [\underline{x}]_B$, amely mutatja, hogy a $h: [\underline{x}]_B \to \underline{x}$ függvény lineáris transzformáció, melynek mátrixa B
    - mivel $\det B \neq 0$, ezért *(13. tétel, Lineáris transzformációk invertálhatósága tétel szerint)* h^{-1} inverz transzformáció is létezik, mátrixa: $[h^{-1}] = [h]^{-1} = B^{-1}$
    - ez minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén $[\underline{x}]_B$-hez $\underline{x}$-et rendel

3. Lineáris transzformáció adott bázis szerint

- Definíció
    - ! $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *lineáris transzformáció* és B bázis $\mathbb{R}^n$-ben
    - ekkor $g: [\underline{x}]_B \to [f(\underline{x})]_B$ lineáris transzformáció mátrixát az f transzformáció B bázis szerinti mátrixának nevezzük
- Jelölés
    - $[f]_B$

[K112] megjegyzést írt: $\underline{b}_i$-kből

[K113] megjegyzést írt: $\underline{\alpha}_i$-kkel

4. Lineáris transzformáció kiszámítása adott bázis szerint

- **Tétel**
  - ! $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció
  - B egy $(n \times n)$-es mátrix, melynek oszlopai bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben
  - ekkor $[f]_B$ mátrixra alábbiak teljesülnek:
    - **(1)** $[f(\underline{x})]_B = [f]_B \cdot [\underline{x}]_B$ minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$-re
    - **(2)** $[f]_B = B^{-1} \cdot [f] \cdot B$
    - **(3)** $[f]_B$ i-edik oszlopa egyenlő $[f(\underline{b}_i)]_B$koordinátavektorral minden $1 \leq i \leq n$ esetén
- **Bizonyítás**
  - **(2)** már beláttuk az előző tétel bizonyításában
  - **(1)** *közvetlenül következik a Lineáris transzformáció adott bázis szerinti definíciójából és annak tételéből*
    - mivel $[f]_B$ annak a g lineáris transzformációnak a mátrixa, amely minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$-re $[f(\underline{x})]_B$-t rendel, az állítás igaz

[K114] megjegyzést írt: + a Lineáris leképzés definíciója miatt.

  - **(3)** *(13. tétel, Lineáris leképzés feltétele tétel következménye)*:
    - mivel $[f]_B$ a $g: [\underline{x}]_B \to [f(\underline{x})]_B$ lineáris transzformáció mátrixa, ezért i-edik oszlopa $g(\underline{e}_i)$-vel egyenlő minden i-re
    - *(7. tétel, Koordinátavektor definíciója szerint)* $\underline{e}_i$ éppen $\underline{b}_i$ koordinátavektora
    - vagyis:
      - $\underline{e}_i = [\underline{b}_i]_B \to g(\underline{e}_i) = g\left([\underline{b}_i]_B\right) = [f(\underline{b}_i)]_B$

BACK

16. tétel: Sajátvektor, karakterisztikus polinom

Tételcím

Négyzetes mátrixok sajátértékei és sajátvektorai, ezek meghatározása. Karakterisztikus polinom. A sajátértékek és sajátvektorok kapcsolata lineáris transzformáció valamely bázis szerinti mátrixának diagonalitásával.

1. Sajátérték, sajátvektor

- Definíció
  - ! A $(n \times n)$-es mátrix
  - ***sajátérték***
    - olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár
    - ha létezik olyan $\underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{x} \neq \underline{0}$ vektor, melyre

$$A \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x}$$

  - ***sajátvektor***
    - olyan $\underline{x} \in \mathbb{R}$ vektor
    - ha $\underline{x} \neq \underline{0}$, létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár, melyre

$$A \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x}$$

  - röviden:
    - ha $A \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x}$, $\underline{x} \neq \underline{0}$, akkor λ sajátértéke, $\underline{x}$ sajátvektora A-nak

2. Sajátérték meghatározása

- Tétel
  - négyzetes A mátrixnak a $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár akkor és csak akkor sajátértéke, ha $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$

[K115] megjegyzést írt: Egységmátrix.

- Bizonyítás
  - λ definíció szerint akkor sajátérték, ha $A \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x}$, $\underline{x} \neq \underline{0}$, van megoldása
  - írhatunk $\lambda \cdot \underline{x}$ helyett $(\lambda \cdot E) \cdot \underline{x}$
  - *(10. tétel, Mátrixműveletek tétel (1) szerint)*

$$(\lambda \cdot E) \cdot \underline{x} = \lambda \cdot (E \cdot \underline{x}) = \lambda \cdot \underline{x}$$

- $A \cdot \underline{x} = (\lambda \cdot E) \cdot \underline{x}$ egyenletet átrendezve, majd *(Mátrixműveletek tétel (2) szerint):*

$$A \cdot \underline{x} - (\lambda \cdot E) \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

$$(A - \lambda \cdot E) \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

  - λ akkor és csak akkor sajátértéke A-nak, ha az $A \cdot \underline{x} - (\lambda \cdot E) \cdot \underline{x} = \underline{0}$ lineáris egyenletrendszernek van $\underline{x} \neq \underline{0}$ megoldása
  - *a következmény szerint* ekvivalens $A - \lambda \cdot E$ mátrix oszlopai lineárisan összefüggőek
  - *(11. tétel, Sorvektor lineáris függetlenség tétel szerint)* valóban azzal ekvivalens, hogy $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$

[K116] megjegyzést írt: Legyenek $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \in \mathbb{R}^k$ vektorok és legyen A az ezek egyesítésével keletkező $(k \times n)$-es mátrix. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:
$A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ lineáris egyenletrendszerek az egyetlen megoldása $\underline{x} = \underline{0}$
$\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektorok lineárisan függetlenek.

3. Karakterisztikus polinom

- Definíció
  - A $(n \times n)$-es mátrix *karakterisztikus polinom*jának nevezzük a $\det(A - \lambda \cdot E)$ determináns értékét, ahol λ változó
- Jelölés
  - $k_a(\lambda)$
- *(sajátérték definíciója átfogalmazva az előző tétel és definíció felhasználásával:*
  - *A mátrix sajátértékei a $k_a(\lambda)$ karakterisztikus polinom gyökei, tehát $k_a(\lambda) - 0$ egyenlet megoldásai*
  - *algebra egyik tétele szerint tehát n-edfokú polinomnak legfeljebb n gyöke lehet → $(n \times n)$-es mátrixnak legfeljebb n sajátértéke van)*

4. Diagonális mátrix

- Definíció
  - A $(n \times n)$-es mátrix akkor nevezzük *diagonális mátrix*nak, ha minden $i \neq j$ esetén $a_{i,j} = 0$ teljesül

5. Kapcsolat sajátérték és lineáris leképzések közt

- $! \, B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ tetszőleges bázis
- TFH. $[f]_B$ mátrix diagonális, a főátlóban álló elemeket jelölje sorba $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
- $[f]_B$ i-edik oszlopa $\lambda_i \cdot \underline{e}_i$-vel egyenlő

- ebből kifolyólag $\left[f\left(\underline{b_i}\right)\right]_B = \lambda_i \cdot \underline{e_i}$, ez viszont azt jelenti, hogy $f\left(\underline{b_i}\right) = 0 \cdot \underline{b_i} + \ldots + \lambda_i \cdot \underline{b_i} + \ldots + 0 \cdot \underline{b_n}$, vagyis $f\left(\underline{b_i}\right) = \lambda_i \cdot \underline{b_i}$
- összefoglalva:
  - $[f]_B$ akkor lesz diagonális, ha B minden tagjára $f\left(\underline{b_i}\right) = \lambda_i \cdot \underline{b_i}$ teljesül valamilyen λ skalárral