1. feladat (4+8 pont)
a) Mondja ki az algebra alaptételét!
b) Adja meg algebrai alakban a $z^3-(3+2i)z^2+(1+3i)z=0$ egyenlet összes megoldását!

---

a) Minden komplex polinomnak van komplex gyöke. Vagy: minden komplex polinom felírható elsőfokú komplex polinomok szorzataként.
b) $z^3-(3+2i)z^2+(1+3i)z=0$ ha $z=0$ vagy $z^2-(3+2i)z+(1+3i)=0$. (**2p**). Ennek megoldásai

$$z_{1,2} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{3+2i\pm\sqrt{(3+2i)^2-4(1+3i)}}{2} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{3+2i\pm 1}{2}$$

vagyis az egyenlet gyökei $0, 1+i, 2+i$. (**2p**)

---

2. feladat (8+11 pont)
a) Mondja ki és igazolja a rendőrelvet!
b) Határozza meg az $a_n=\sqrt[n]{\dfrac{2^{2n+3}+8\cdot(-4)^n}{n^2+3n+2}}$ sorozat torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját és limesz inferiorját! Konvergens a sorozat?

---

a) Ha $a_n\le b_n\le c_n$, és $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=A$, akkor $\lim_{n\to\infty}b_n=A$, (**2p**) ugyanis létezik $N_1,N_2\in\mathbb{N}$, hogy $n\ge N_1$ esetén $|a_n-A|<\varepsilon$ és $n\ge N_2$ esetén $|c_n-A|<\varepsilon$, (**3p**) tehát $n\ge N=\max(N_1,N_2)$ esetén

$$A-\varepsilon\le a_n\le b_n\le c_n\le A+\varepsilon \text{ vagyis } |b_n-A|<\varepsilon. \qquad (\mathbf{3p})$$

b) Páros n esetén

$$4 \overset{\mathbf{1p}}{\leftarrow} 4\frac{\sqrt[n]{16}}{\sqrt[n]{6}(\sqrt[n]{n})^2} \overset{\mathbf{1p}}{=} 4\sqrt[n]{\frac{16}{6n^2}} \overset{\mathbf{1p}}{\le} a_n \overset{\mathbf{1p}}{=} \sqrt[n]{\frac{16\cdot 4^n}{n^2+3n+2}} \overset{\mathbf{1p}}{\le} 4\sqrt[n]{\frac{16}{n^2}} \overset{\mathbf{1p}}{=} 4\frac{\sqrt[n]{16}}{(\sqrt[n]{n})^2} \overset{\mathbf{1p}}{\to} 4,$$

vagyis $a_{2n}\overset{\mathbf{1p}}{\to}4$ Páratlan n esetén $a_n\overset{\mathbf{1p}}{=}0$, így $\liminf a_n=0$, $\limsup a_n=4$ (**1p**), és a sorozat nem konvergens (**1p**).

---

3. feladat (6+4+3 pont)
Számolja ki az alábbi határértékeket:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(2x)}{3x^2}, \qquad b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sin^2(2x)}{3x^2}, \qquad b)\ \lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2(2x)}{3x^2}.$$

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(2x)}{3x^2} \overset{\mathbf{4p}}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{(2x)^2}\right)^2\cdot\frac{4}{3} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{4}{3}$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin^2(2x)}{3x^2} = 0$, mert a számláló korlátos, a nevező ∞-hez tart. (**4p**)

c) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin^2(2x)}{3x^2} = 0$, mert a határérték a határértékek hányadosa (**3p**).

---

4. feladat (4+12 pont)
a) Mondja ki Weierstrass második tételét!
b) Számolja ki az $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5) - \ln(x^2 + 6x + 10)$ függvény minimumát, illetve maximumát a $[-3, 2]$ intervallumon!

---

a) Korlátos zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény felveszi a maximumát és minimumát. (**4p**)
b) $D_f = \mathbb{R}$, (**2p**)

$$f'(x) \overset{\mathbf{3p}}{=} \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{2x+6}{x^2+6x+10} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{10(x^2+x-7)}{(x^2-4x+5)(x^2+6x+10)} = 0,$$

ha $x = \frac{-1\pm\sqrt{29}}{2} \notin [-3, 2]$ (**3p**), tehát $f(-3) = \ln(26)$ a függvény maximuma, $f(2) = -\ln(26)$ a függvény minimuma. (**2p**)

---

5. feladat* (5+12 pont)
Számolja ki az alábbi integrálokat! Ahol szükséges, használja az $y = e^x$ helyettesítést!

$$a)\ \int \frac{7e^{2x}}{e^{2x}+4}dx, \qquad b)\ \int \frac{7e^{3x}}{e^{2x}+4}dx.$$

---

a) $\displaystyle\int \frac{7e^{2x}}{e^{2x}+4}dx \overset{\mathbf{3p}}{=} \frac{7}{2}\int \frac{(e^{2x}+4)'}{e^{2x}+4}dx \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{7}{2}\ln(e^{2x}+4) + c.$

b) Használva az $y = e^x$, $x = \ln y$ behelyettesítést (**2p**)

$$\int \frac{7e^{3x}}{e^{2x}+4}dx \overset{\mathbf{2p}}{=} 7\int \frac{y^3}{y^2+4}\cdot\frac{1}{y}dy \overset{\mathbf{2p}}{=} 7\int \frac{y^2+4-4}{y^2+4}dy \overset{\mathbf{2p}}{=}$$
$$= 7\int 1 - \frac{1}{\left(\frac{y}{2}\right)^2+1}dy \overset{\mathbf{2p}}{=} 7\left(y - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{2}\right) + c \overset{\mathbf{2p}}{=} 7\left(e^x - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{e^x}{2}\right) + c$$

---

6. feladat* (4+8 pont)
a) Mondja ki az integrálszámítás második alaptételét!
b) Legyen $H(x) = \displaystyle\int_{2x}^{4x^2} \mathrm{arsh}(t^3-1)dt$! Mi H deriváltfüggvénye?

a) A Riemann-integrálható f függvény F integrálfüggvénye folytonos. (**2p**) Ha f folytonos, F differenciálható, és $F' = f$.(**2p**)
b) Legyen $F(x) \overset{\mathbf{2p}}{=} \int_0^x \operatorname{arsh}(t^3-1)dt$, ekkor $F'(x) \overset{\mathbf{1p}}{=} \operatorname{arsh}(x^3-1)$, és $H(x) \overset{\mathbf{2p}}{=} F(4x^2) - F(2x)$, vagyis $H'(x) \overset{\mathbf{3p}}{=} 8x \operatorname{arsh}(64x^6-1) - 2\operatorname{arsh}(8x^3-1)$

---

7. feladat* **(5+6 pont)**
a) Milyen $\alpha > 0$ esetén konvergens az $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ integrál? Válaszát indokolja!
b) Számolja ki az $\int_{-\frac{4}{5}}^1 \frac{1}{\sqrt{5x+4}}dx$ integrált!

---

a) $\alpha \neq 1$ esetén

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx \overset{\mathbf{1p}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_\varepsilon^1 \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{1}{1-\alpha} - \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} < \infty,$$

ha $\alpha < 1$ (**1p**). $\alpha = 1$ esetén

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}[\ln x]_\varepsilon^1 \overset{\mathbf{1p}}{=} \infty,$$

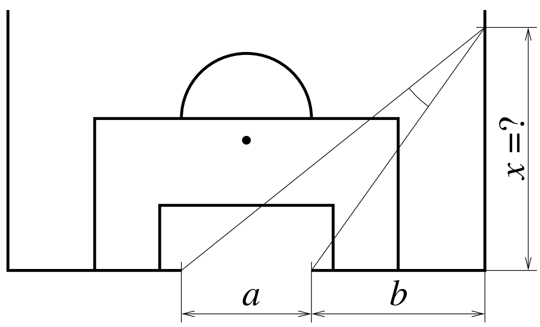
így az integrál $\alpha < 1$ esetén konvergens (**1p**).
b) A függvény nem korlátos, így

$$\int_{-\frac{4}{5}}^1 \frac{1}{\sqrt{5x+4}}dx \overset{\mathbf{2p}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-\frac{4}{5}+\varepsilon}^1 (5x+4)^{-\frac{1}{2}}dx \overset{\mathbf{2p}}{=}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\frac{(5x+4)^{\frac{1}{2}}}{5\cdot\frac{1}{2}}\right]_{-\frac{4}{5}+\varepsilon}^1 \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{6}{5} - \frac{2}{5}\lim_{\varepsilon\to 0+}\sqrt{5\varepsilon} \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{6}{5}.$$

IMSC feladat (14 IMSC pont)

Honnan (az alapvonaltól mekkora x távolságról) kell kapura lőnie a labdarúgópálya szélén lévő játékosnak, hogy a kapu eltalálása a legkönnyebb legyen, vagyis ahonnan legnagyobb szögben látja a gólvonalat? A gólvonal szélessége a, távolsága az oldalvonaltól b.



A gólvonal $\phi(x)$ látószöge és deriváltja:

$$\phi(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{a+b}{x}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{x}\right) \qquad \textbf{4p}$$

$$\phi'(x) = \frac{\frac{-(a+b)}{x^2}}{1+\left(\frac{a+b}{x}\right)^2} - \frac{\frac{-b}{x^2}}{1+\left(\frac{b}{x}\right)^2} = \qquad \textbf{2p}$$

$$= -\frac{a+b}{x^2+(a+b)^2} + \frac{b}{x^2+b^2} \qquad \textbf{2p}$$

A $\phi'(x) = 0$ egyenlet megoldása: $\tilde{x} = \sqrt{b(a+b)}$. **4p** Látható, hogy $\phi(0) = \lim_{x\to\infty} \phi(x) = 0$ és $\phi(\tilde{x}) > 0$, tehát a ϕ látószögnek valóban maximuma van az $\tilde{x}$ helyen. **2p**

A feladat geometriai úton is megoldható. A síkon a gólvonal látóköreín helyezkednek el azok a pontok, ahonnan a gólvonal fix szög alatt látszik. A látószög az oldalvonal mentén ott maximális, ahol a látókör érinti az oldalvonalat. Ennek a látókörnek a sugarát (Pitagorasz-tétel felhasználásával) kétféleképpen felírva adódik, hogy $b + \frac{a}{2} = \sqrt{\tilde{x}^2 + (\frac{a}{2})^2}$, ahonnan az előzővel azonos eredményt kapjuk a keresett $\tilde{x}$-re. **14p**

1. feladat (4+8 pont)
a) Mondja ki az algebra alaptételét!
b) Adja meg algebrai alakban a $z^3-(3-2i)z^2+(1-3i)z=0$ egyenlet összes megoldását!

---

a) Minden komplex polinomnak van komplex gyöke. Vagy: minden komplex polinom felírható elsőfokú komplex polinomok szorzataként.
b) $z^3-(3-2i)z^2+(1-3i)z=0$ ha $z=0$ vagy $z^2-(3-2i)z+(1-3i)=0$. (**2p**). Ennek megoldásai

$$z_{1,2} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{3-2i\pm\sqrt{(3-2i)^2-4(1-3i)}}{2} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{3-2i\pm 1}{2}$$

vagyis az egyenlet gyökei $0, 1-i, 2-i$. (**2p**)

---

2. feladat (8+11 pont)
a) Mondja ki és igazolja a rendőrelvet!
b) Határozza meg az $a_n=\sqrt[n]{\dfrac{2^{2n+2}-4\cdot(-4)^n}{n^2+2n+3}}$ sorozat torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját és limesz inferiorját! Konvergens a sorozat?
a) Ha $a_n\le b_n\le c_n$, és $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=A$, akkor $\lim_{n\to\infty}b_n=A$, (**2p**) ugyanis létezik $N_1,N_2\in\mathbb{N}$, hogy $n\ge N_1$ esetén $|a_n-A|<\varepsilon$ és $n\ge N_2$ esetén $|c_n-A|<\varepsilon$, (**3p**) tehát $n\ge N=\max(N_1,N_2)$ esetén

$$A-\varepsilon\le a_n\le b_n\le c_n\le A+\varepsilon \text{ vagyis } |b_n-A|<\varepsilon. \qquad (\mathbf{3p})$$

b) Páratlan n esetén

$$4 \xleftarrow{\mathbf{1p}} 4\frac{\sqrt[n]{8}}{\sqrt[n]{6}(\sqrt[n]{n})^2} \overset{\mathbf{1p}}{=} 4\sqrt[n]{\frac{8}{6n^2}} \overset{\mathbf{1p}}{\le} a_n \overset{\mathbf{1p}}{=} \sqrt[n]{\frac{8\cdot 4^n}{n^2+2n+3}} \overset{\mathbf{1p}}{\le} 4\sqrt[n]{\frac{8}{n^2}} \overset{\mathbf{1p}}{=} 4\frac{\sqrt[n]{8}}{(\sqrt[n]{n})^2} \xrightarrow{\mathbf{1p}} 4,$$

vagyis $a_{2n} \xrightarrow{\mathbf{1p}} 4$. Páros n esetén $a_n \overset{\mathbf{1p}}{=} 0$, így $\liminf a_n=0$, $\limsup a_n=4$ (**1p**), és a sorozat nem konvergens (**1p**).

---

3. feladat (6+4+3 pont)
Számolja ki az alábbi határértékeket:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(3x)}{2x^2}, \qquad b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sin^2(3x)}{2x^2}, \qquad c)\ \lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2(3x)}{2x^2}\ !$$

---

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(3x)}{2x^2} \overset{\mathbf{4p}}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{(3x)^2}\right)^2\cdot\frac{9}{2} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{9}{2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin^2(3x)}{2x^2}=0$, mert a számláló korlátos, a nevező ∞-hez tart. (**4p**)

c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2(3x)}{2x^2}=0$, mert a határérték a határértékek hányadosa (**3p**).

4. feladat (4+12 pont)
a) Mondja ki Weierstrass második tételét!
b) Számolja ki az $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 10) - \ln(x^2 + 4x + 5)$ függvény minimumát, illetve maximumát a $[-2, 3]$ intervallumon!

a) Korlátos zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény felveszi a maximumát és minimumát. (**4p**)
b) $D_f = \mathbb{R}$, (**2p**)

$$f'(x) \overset{\mathbf{3p}}{=} \frac{2x-6}{x^2-6x+10} - \frac{2x+4}{x^2+4x+5} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{10(x^2-x-7)}{(x^2+4x+5)(x^2-6x+10)} = 0,$$

ha $x = \frac{1\pm\sqrt{29}}{2} \notin [-2, 3]$ (**3p**), tehát $f(-2) = \ln(26)$ a függvény maximuma, $f(3) = -\ln(26)$ a függvény minimuma. (**2p**)

5. feladat* (5+12 pont)
Számolja ki az alábbi integrálokat! Ahol szükséges, használja az $y = e^x$ helyettesítést!

$$a)\ \int \frac{5e^{2x}}{e^{2x}+9}\,\mathrm{d}x, \qquad b)\ \int \frac{5e^{3x}}{e^{2x}+9}\,\mathrm{d}x.$$

a) $\displaystyle\int \frac{5e^{2x}}{e^{2x}+9}dx \overset{\mathbf{3p}}{=} \frac{5}{2}\int \frac{(e^{2x}+9)'}{e^{2x}+9}dx \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{5}{2}\ln(e^{2x}+9) + c.$

b) Használva az $y = e^x$, $x = \ln y$ behelyettesítést (**2p**)

$$\int \frac{5e^{3x}}{e^{2x}+9}dx \overset{\mathbf{2p}}{=} 5\int \frac{y^3}{y^2+9}\cdot\frac{1}{y}dy \overset{\mathbf{2p}}{=} 5\int \frac{y^2+9-9}{y^2+9}dy \overset{\mathbf{2p}}{=}$$
$$= 5\int 1 - \frac{1}{\left(\frac{y}{3}\right)^2+1}dy \overset{\mathbf{2p}}{=} 5\left(y - 3\operatorname{arctg}\frac{y}{3}\right) + c \overset{\mathbf{2p}}{=} 5\left(e^x - 3\operatorname{arctg}\frac{e^x}{3}\right) + c$$

6. feladat* (4+8 pont)
a) Mondja ki az integrálszámítás második alaptételét!
b) Legyen $H(x) = \displaystyle\int_{3x}^{5x^2} \operatorname{arch}(t^2+1)\,\mathrm{d}t$! Mi H deriváltfüggvénye?

a) A Riemann-integrálható f függvény F integrálfüggvénye folytonos. (**2p**) Ha f folytonos, F differenciálható, és $F' = f$.(**2p**)

b) Legyen $F(x) \overset{\mathbf{2p}}{=} \int_0^x \operatorname{arch}(t^2+1)dt$, ekkor $F'(x) \overset{\mathbf{1p}}{=} \operatorname{arch}(x^2+1)$, és $H(x) \overset{\mathbf{2p}}{=} F(5x^2) - F(3x)$, vagyis $H'(x) \overset{\mathbf{3p}}{=} 10x \operatorname{arch}(25x^4+1) - 3\operatorname{arch}(9x^2+1)$

---

7. feladat* **(5+6 pont)**

a) Milyen $\alpha > 0$ esetén konvergens az $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ integrál? Válaszát indokolja!

b) Számolja ki az $\int_{-\frac{7}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{2x+7}}\,\mathrm{d}x$ integrált!

---

a) $\alpha \neq 1$ esetén

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx \overset{\mathbf{1p}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_\varepsilon^1 \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{1}{1-\alpha} - \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} < \infty,$$

ha $\alpha < 1$ (**1p**). $\alpha = 1$ esetén

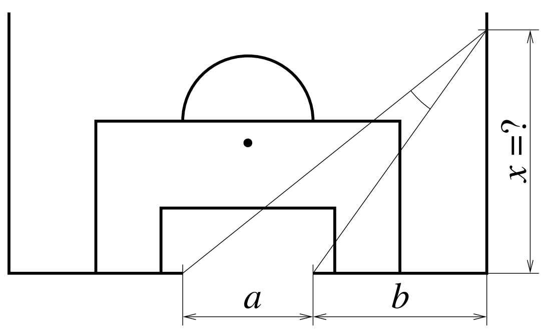
$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}[\ln x]_\varepsilon^1 \overset{\mathbf{1p}}{=} \infty,$$

így az integrál $\alpha < 1$ esetén konvergens (**1p**).
b) A függvény nem korlátos, így

$$\int_{-\frac{7}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{2x+7}}dx \overset{\mathbf{2p}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-\frac{7}{2}+\varepsilon}^1 (2x+7)^{-\frac{1}{2}}dx \overset{\mathbf{2p}}{=}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\frac{(2x+7)^{\frac{1}{2}}}{2\cdot\frac{1}{2}}\right]_{-\frac{7}{2}+\varepsilon}^1 \overset{\mathbf{1p}}{=} 3 - \lim_{\varepsilon\to 0+}\sqrt{2\varepsilon} \overset{\mathbf{1p}}{=} 3.$$

IMSC feladat (14 IMSC pont)

Honnan (az alapvonaltól mekkora x távolságról) kell kapura lőnie a labdarúgópálya szélén lévő játékosnak, hogy a kapu eltalálása a legkönnyebb legyen, vagyis ahonnan legnagyobb szögben látja a gólvonalat? A gólvonal szélessége a, távolsága az oldalvonaltól b.



A gólvonal $\phi(x)$ látószöge és deriváltja:

$$\phi(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{a+b}{x}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{x}\right) \qquad \mathbf{4p}$$

$$\phi'(x) = \frac{\frac{-(a+b)}{x^2}}{1+\left(\frac{a+b}{x}\right)^2} - \frac{\frac{-b}{x^2}}{1+\left(\frac{b}{x}\right)^2} = \qquad \mathbf{2p}$$

$$= -\frac{a+b}{x^2+(a+b)^2} + \frac{b}{x^2+b^2} \qquad \mathbf{2p}$$

A $\phi'(x) = 0$ egyenlet megoldása: $\tilde{x} = \sqrt{b(a+b)}$. **4p** Látható, hogy $\phi(0) = \lim_{x\to\infty} \phi(x) = 0$ és $\phi(\tilde{x}) > 0$, tehát a ϕ látószögnek valóban maximuma van az $\tilde{x}$ helyen. **2p**

A feladat geometriai úton is megoldható. A síkon a gólvonal látókörein helyezkednek el azok a pontok, ahonnan a gólvonal fix szög alatt látszik. A látószög az oldalvonal mentén ott maximális, ahol a látókör érinti az oldalvonalat. Ennek a látókörnek a sugarát (Pitagorasz-tétel felhasználásával) kétféleképpen felírva adódik, hogy $b + \frac{a}{2} = \sqrt{\tilde{x}^2 + (\frac{a}{2})^2}$, ahonnan az előzővel azonos eredményt kapjuk a keresett $\tilde{x}$-re. **14p**