

A Számítástudomány alapjai

1. ZH javítókulcs (2024. 10. 31.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Tegyük fel, hogy az F fának a levelein kívül két negyedfokú, négy másodfokú és három harmadfokú csúcsa van. Hány levele van F -nek? (A teljes értékű megoldáshoz nem szükséges megmutatni, hogy a feladat feltételeit kielégítő fa valóban létezik.)

Jelölje ℓ az F fa leveleinek számát. Ekkor F csúcsainak száma $\ell + 2 + 4 + 3 = \ell + 9$.
(2 pont)

Az órán tanultak szerint F -nek $\ell + 8$ éle van. (2 pont)

A kézfogáslemma miatt F csúcsainak fokszámösszege $2 \cdot (\ell + 8) = 2\ell + 16$, (2 pont)

azaz $2\ell + 16 = 1 \cdot \ell + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = \ell + 25$, (2 pont)

ahonnan $\ell = 9$ adódik F levelei számára. (2 pont)

Ha egy megoldó csak annyit tesz, hogy felrajzol egy, a feladat feltételeit kielégítő fát, és megszámlolja, hogy annak 9 levele van, akkor erre (legfeljebb) 1 pontot kapjon.

2. Tekintsük a bal oldali ábrán látható G gráf irányítatlan változatát. Igaz-e, hogy ennek a gráfnak minden minimális költségű feszítőfája tartalmazza a bd élt?

Keressünk egy minimális költségű feszítőfát a Kruskal-algoritmussal. (Ez a pont akkor is jár, ha egyértelműen kiderül, hogy a megoldó ezzel az algoritmussal dolgozik.)
(1 pont)

Az algoritmus az élekről a költségük szerinti növekvő sorrendben dönti el, hogy bekerüljenek-e a minimális költségű feszítőfába. (2 pont)

(Ha egy megoldó csak felrajzolja a minimális költségű feszítőfát, de egyáltalán nem követhetők nála az algoritmus lépései, az ezt a 2 pontot nem kapja meg abban az esetben sem, ha a felrajzolt feszítőfa helyes.)

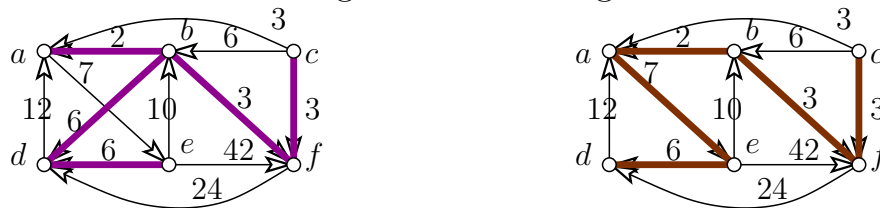
Egy minimális költségű feszítőfa a bal oldali ábrán látható. Ennek a költsége 20.
(2 pont)

Hagyjuk el a bd élt és keressünk így is egy minimális költségű feszítőfát a Kruskal-algoritmussal. (2 pont)

Ekkor a jobb oldali ábrán látható feszítőfát kapjuk. Ennek a költsége 21. (2 pont)

Mivel a bd élt nem tartalmazó feszítőfák közül a minimális költségűek drágábbak, mint a tényleges minimális költségű feszítőfák, ezért G minden minimális költségű feszítőfája tartalmazza a bd élt.
(1 pont)

Ha egy megoldó csak annyit mond, hogy a Kruskal-algoritmusnak mindenképp be kell vennie a bd élt a minimális költségű feszítőfába, akkor további indoklás híján legfeljebb 5 pontot kaphat meg, ugyanis az előadáson nem szerepelt, hogy a Kruskal-algoritmus minden minimális költségű feszítőfát megtalál.



3. Futtassuk le a szélességi bejárást az a csúcsból indulva a bal oldali ábrán látható gráfon úgy, hogy minden alkalommal, amikor több csúcs közül szabadon választhatunk, akkor válasszuk az ABC szerinti első csúcsot. Adjuk meg G éleinek a végrehajtott bejárás szerinti osztályozását. (Az élekre írt számoktól tekintsünk el. Az algoritmus lépései egyértelműen derüljenek ki a megoldásból.)

Az órán tanult módon futtatjuk a szélességi bejárás algoritmusát, mindig a legkisebb elérési számú befejezetlen csúcsból próbálunk új csúcsot elérni, ha van ilyen. (2 pont)
(Ez a pont akkor is jár, ha az algoritmus lépései egyértelműen kiderülnek a megoldásból.)

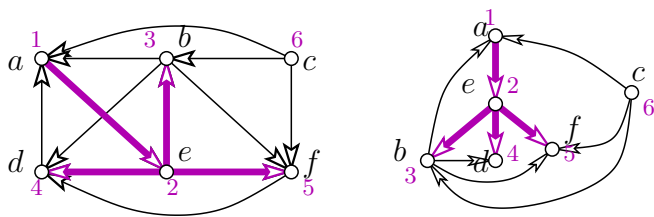
Az ábra az algoritmus futása utáni állapotot mutatja, a csúcsok melletti számok az elérési (és egyben befejezési) sorrendet mutatják, a megvastagított élek alkotják a bejárás fáját. (4 pont)

Faélek, azaz a bejárás által használt élek: ae, eb, ed, ef .

Visszaélek, azaz a leszármazottból ősbe mutató élek: ba, da .

Keresztélek, azaz azon élek, melyek kezdő- és végpontja között nincs ős-leszármazott viszony: bd, bf, cb, ca, cf, fd . (4 pont)

(Ez a 4 pont akkor is jár, ha egyértelműen kiderül, hogy a megoldó hogyan osztályozta az éleket, például egy jó rajz által. Ha egy megoldó rosszul osztályozza a c -ből kimenő éleket, akkor azért 2 pontot veszítsen el. Minden egyéb rosszul osztályozott él 1 pont elvesztésével jár ebből a 4 pontból.)



4. A mellékelt táblázat a felső becslés változását mutatja a Dijkstra-algoritmusnak egy nemnegatív élhosszokkal rendelkező, irányított G gráfon történő futtatása során. Határozzuk meg, melyik csúcsból indult az algoritmus, és adjuk meg az ezen gyökérhez tartozó legrövidebb utak fáját. Válaszunkat indokoljuk.

a	b	c	d	e	f
∞	∞	∞	0	∞	∞
11	∞	3	0	∞	7
10	∞	3	0	6	7
9	42	3	0	6	7
8	24	3	0	6	7
8	22	3	0	6	7

A táblázat első sorát úgy töltjük ki, hogy a gyökérhez 0-t írunk, az összes többi csúcshoz pedig végtelent, (1 pont)

vagyis a gyökér a d csúcs.

(1 pont)

(Ha egy megoldásból nem derül ki egyértelműen, hogy miért a d a gyökér, akkor a megoldó az első 1 pontot veszítse el.)

A KÉSZ halmazba mindig az a KÉSZ halmazon kívüli csúcs kerül, amelyikre az aktuális felső becslés a legkisebb.

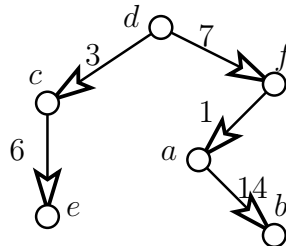
(1 pont)

Az alábbi táblázatban a bekarikázott számú csúcsok kerülnek az adott lépésben a KÉSZ halmazba, a számok mellé írt csúcsok pedig azt jelölik, hogy melyik csúcsból kilépő él mentén történt meg a javítás.

(4 pont)

(Természetesen ez a 4 pont akkor is jár, ha más módon jelennek meg egy megoldásban ezek az információk.)

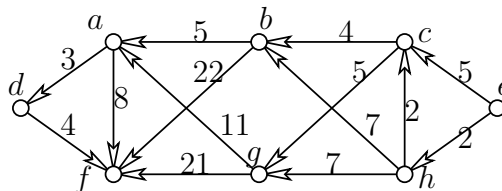
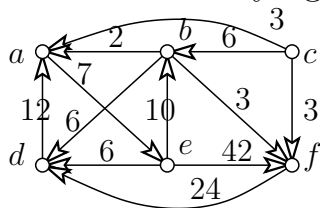
a	b	c	d	e	f
∞	∞	∞	0	∞	∞
11 d	∞	3 d		∞	7 d
10 c	∞			6 c	7 d
9 e	42 e				7 d
8 f	24 f				7 d
	22 a				



Az alábbi ábra mutatja az ez alapján felrajzolt legrövidebb utak fáját.

(3 pont)

5. Határozzuk meg a jobb oldali ábrán látható PERT probléma minimális végrehajtási idejét és a kritikus tevékenységeket!



Forrástörlesztés módszerével (vagy más, alkalmas módon) meghatározzuk a G gráf csúcsainak egy topologikus sorrendjét: e, h, c, b, g, a, d, f .

(2 pont)

(Ha nem derül ki a (helyes) topologikus sorrend meghatározásának módszere, az 1 pont veszteség.)

Az órán tanult PERT-módszer futtatása után az ábrán látható eredmény adódik. A legkorábbi befejezési időket a csúcsok mellett álló számok jelzik,

(3 pont)

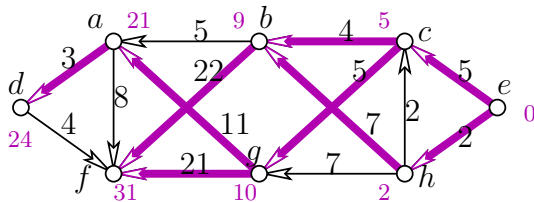
az egyes csúcsokba befutó leghosszabb utak utolsó éleit pedig megvastagítottuk.

(3 pont)

A kritikus tevékenységek b, c, e, f, g, h .

(2 pont)

Ha egy megoldó elszámol egy befejezési időt (de utána azzal helyesen számol tovább), akkor 1 pontot, ha pedig nem jelöli meg az összes lehetséges utolsó élt, akkor ezért 2 pontot veszít.



- ★ Tegyük fel, hogy a G gráf minden éle ki van színezve a piros, zöld, sárga és kék színek valamelyikére úgy, hogy a négy közül bármelyik színre színezett éleket is hagyjuk el G -ből, a maradék gráfnak van Euler-körsétája. Mutassuk meg, hogy ekkor G -nek is van Euler-körsétája.

A tanultak szerint azt kell igazolni, hogy a G gráf izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és G -ben minden csúcs fokszáma páros. (2 pont)

Először megmutatjuk, hogy G izolált pontoktól eltekintve összefüggő. Indirekt tegyük fel, hogy nem az. Ekkor G -nek van legalább két, élt tartalmazó komponense. Ezen komponensekből egy-egy élt kiválasztva a kiválasztott élek legfeljebb két színt határoznak meg, mondjuk pirosat és zöldet. Ha tehát ezektől különböző színű, mondjuk kék színű éleket hagynánk el G -ből, akkor az így kapott gráfnak is lenne két különböző, élt tartalmazó komponense. Ez ellentmond annak, hogy a kék színt elhagyva van a gráfnak Euler-körsétája. Ezért G izolált pontoktól eltekintve összefüggő. (3 pont)

Most megmutatjuk, hogy minden csúcs fokszáma páros G -ben. Legyen v a G egy tetszőleges csúcsa, és legyen $d_p(v)$, $d_z(v)$, $d_k(v)$, ill. $d_s(v)$ a v -re illeszkedő piros, zöld, kék és sárga élek száma. A feladatban megfogalmazott feltétel és az Euler-körséta fent idézett karakterizációja miatt e négy egész számból bármelyik hármat is adjuk össze, páros számot kapunk eredményül. Ez csak akkor lehetséges, ha e négy fokszám mindegyike páros. Ha ugyanis valamelyik, mondjuk $d_p(v)$, páratlan lenne, akkor $d_p(v) + d_z(v) + d_k(v)$ és $d_s(v) + d_z(v) + d_k(v)$ párossága miatt $d_s(v)$ is páratlan. Mivel $d_p(v) + d_s(v) + d_z(v)$ és $d_p(v) + d_s(v) + d_k(v)$ párosak, $d_z(v)$ -nek és $d_k(v)$ -nek is párosnak kell lennie. Ekkor azonban $d_p(v) + d_z(v) + d_k(v)$ páratlan, ami ellentmondás. Ezek szerint a $d_p(v)$, $d_z(v)$, $d_k(v)$ és $d_s(v)$ számok mindegyike páros. A v csúcs fokszáma tehát $d(v) = d_p(v) + d_z(v) + d_k(v) + d_s(v)$ szintén páros, és nekünk pontosan erre van szükségünk a bizonyítás befejezéséhez. (5 pont)

Az utolsó 5 pont az alábbi gondolatmenet ismertetésével is megszerezhető. A v csúcs fokszámát a piros-, a zöld-, a kék- és a sárgamentes gráfban összeadva éppen a v csúcs G -beli fokszámának háromszorosát kapjuk. Mivel a korábbi észrevételek miatt négy darab páros számot adtunk össze, ezért az eredmény is páros lesz, ami hárommal elosztva továbbra is páros marad. Tehát a v csúcs fokszáma valóban páros G -ben.

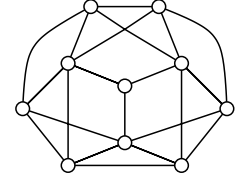
A Számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs (2024. 11. 28.)

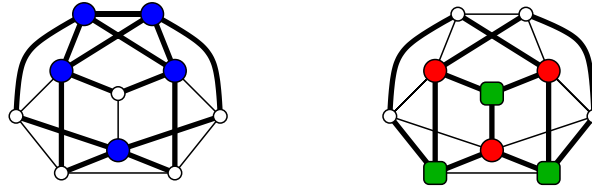
Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Síkbarajzolható-e az ábrán látható gráf?



Alább látható a gráf egy K_5 -tel (illetve egy $K_{3,3}$ -mal) topologikusan izomorf részgráfja.



(Természetesen elég az egyik fajta részgráfot megtalálni.)

(7 pont)

Így a Kuratowski-tétel (annak is a „könnyű iránya”) szerint a gráf nem síkbarajzolható.

(3 pont)

Az utolsó 3 pont megadható akkor is, ha egy megoldónak többszöri próbálkozás ellenére sem sikerült K_5 -tel vagy $K_{3,3}$ -mal topologikusan izomorf részgráfot találni, de a megoldásból egyértelmű, hogy pontosan tudta, mit keres. Természetesen mindez csak arra az esetre vonatkozik, ha a Kuratowski-tétel helyes alkalmazására irányuló szándék a dolgozatból nyilvánvaló; a többféleképpen értelmezhető vagy nem világos céllal készült ábrákért nem jár pont.

2. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3 \\3x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 &= 13 \\5x_1 + 6x_2 + 15x_3 + p \cdot x_4 &= -1\end{aligned}$$

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 9 & 4 & 13 \\ 5 & 6 & 15 & p & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & p-5 & -16 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & p-1 & 0 \end{array} \right)$$

(2 pont)

1. eset: ha $p - 1 \neq 0$, azaz $p \neq 1$.

Ekkor a Gauss-eliminációt folytatva először leosztjuk az utolsó sort $(p - 1)$ -gyel, és így a következőket kapjuk.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

(2 pont)

Vagyis $p \neq 1$ esetén a megoldás: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen, $x_1 = -5 - 3\alpha$, $x_2 = 4$, $x_4 = 0$.

(2 pont)

2. eset: ha $p - 1 = 0$, azaz $p = 1$.

Ekkor a Gauss-eliminációt folytatva a következőket kapjuk.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

(2 pont)

Vagyis $p = 1$ esetén a megoldás: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$ és $x_4 = \beta \in \mathbb{R}$ tetszőleges, $x_1 = -5 - 3\alpha + \beta$, $x_2 = 4 - \beta$.

(2 pont)

A számolási hibák – egyébként elvileg jó megoldás esetén – darabonként 1 pont levonást jelentenek. Ha a hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor csak a fentieknek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Ha egy megoldó (akár helyes) számításokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek a lépések nem célratorók, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért maximum 3 pont adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

3. Lineárisan függetlenek-e az alábbi, $\mathbb{R}^4$ -beli vektorok?

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tegyük fel, hogy $\alpha \cdot \underline{a} + \beta \cdot \underline{b} + \gamma \cdot \underline{c} = \underline{0}$ teljesül valamilyen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ skalárookra.

(2 pont)

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 0 \\ -3 & 8 & -6 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 12 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

(4 pont)

Vagyis a megoldás $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

(1 pont)

Így a tanultak szerint $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan függetlenek (mert $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c} = \underline{0}$ csak az $\alpha = \beta = \gamma = 0$ esetben lehetséges).

(3 pont)

A feladat természetesen megoldható a lineáris függetlenség ekvivalens definíciójára alapozva is (vagyis annak megmutatásával, hogy $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$ közül egyik sem fejezhető ki a másik kettő lineáris kombinációjaként). Ekkor az $\underline{a} \notin \langle \underline{b}, \underline{c} \rangle$ állítás indoklásáért 2 pont, a $\underline{b} \notin \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle$ és $\underline{c} \notin \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ állítások indoklásáért 2-2 pont jár; a hiányzó 3 pont pedig a definíció helyes alkalmazásáért jár (beleértve tehát ebbe annak az ismeretét is, hogy ilyenkor mindhárom állítás igazolása szükséges a lineáris függetlenség megmutatásához).

4. Álljon a $V \leq \mathbb{R}^5$ altér azokból az $\mathbb{R}^5$ -beli vektorokból, amelyeknek a páratlan koordinátái egy 2-kvóciensű mértani sorozatot alkotnak, a páros koordinátáinak összege pedig 0. Így például a jobbra látható $\underline{v}$ vektor V -beli. Határozzuk meg a V altér dimenzióját.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \\ -7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

(Egy teljes értékű megoldáshoz nem szükséges bebizonyítani, hogy V valóban altér.)

A V halmaz leírása alapján a V -beli vektorok $(x_1, x_2, 2x_1, -x_2, 4x_1)^\top$ alakúak valamely x_1, x_2 valós számokra.

(1 pont)

Megmutatjuk, hogy az $\underline{u} = (1, 0, 2, 0, 4)^\top$ és $\underline{v} = (0, 1, 0, -1, 0)^\top$ vektorok V egy bázisát alkotják.

(1 pont)

Ehhez azt kell belátnunk, hogy lineárisan függetlenek és V egy generátorrendszerét alkotják. (1 pont)
Nyilván $\underline{u}$ és $\underline{v}$ is egy V -beli vektor ($\underline{u}$ esetében a mértani sorozat első eleme 1, $\underline{v}$ esetében pedig 0).

(1 pont)

Legyen $\underline{x} = (x_1, x_2, 2x_1, -x_2, 4x_1)^\top$ egy tetszőleges V -beli vektor. Ekkor $\underline{x}$ előáll $\underline{x} = x_1 \cdot \underline{u} + x_2 \cdot \underline{v}$ alakban. Tehát az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok V egy generátorrendszerét alkotják. (3 pont)

Az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok lineárisan függetlenek, hiszen a két vektor közül egyik sem skalárszorosa a másiknak. (Természetesen ez a definíció segítségével is belátható.) (2 pont)

Mivel találtunk egy 2-elemű bázist V -ben, ezért V dimenziója 2. (1 pont)

5. Határozzuk meg az alábbi mátrix determinánsát a p valós paraméter minden értékére.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ p & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Fejtsük ki a determinánst az első sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ p & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ p & 3 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 0 \\ p & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

(4 pont)

Az első (3×3) -as mátrix determinánsát a harmadik oszlop szerint, a másodikét pedig az első sor szerint kifejtve a következőket kapjuk.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ p & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ p & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-5) \cdot p = 5p + 6$$

(2 pont)

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 0 \\ p & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-4) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ p & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5 \cdot 1 - 0 \cdot 3) - 4 \cdot (5p + 6) = -20p - 39$$

(3 pont)

Vagyis a keresett determináns $2(5p + 6) + (-20p - 39) = -10p - 27$. (1 pont)

A determinánst természetesen máshogy, pl. Gauss-eliminációval is ki lehet számítani. Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. A determinánsra vonatkozó egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák viszont darabonként 4 pont levonást jelentenek. Ilyen például, ha egy megoldó a kifejtési tétel alkalmazása során vagy a definíció szerinti kiszámítás esetén hibásan határozza meg az előjeleket, vagy ha például egy sor konstanssal szorzása, vagy sorok cseréje után nem, vagy hibásan követi a determináns megváltozását. Kétes esetekben elvi hibának tekintendő minden olyan hiba, amikor nincs nyoma annak, hogy a megoldó a szóban forgó ismeretet helyesen próbálta alkalmazni.

- ★ Legyen $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4\}$ a $V \leq \mathbb{R}^{10}$ altér egy bázisa, és legyen a $\underline{v}$ vektor koordinátavektora a B bázis szerint $[\underline{v}]_B = (4, 2, 42, 4242)$. Igaz-e, hogy $B' = \{\underline{b}_1, \underline{v}, \underline{b}_3, \underline{b}_4\}$ a V altér bázisa?

Megmutatjuk, hogy igaz az állítás.

1. megoldás. Mivel $[\underline{v}]_B = (4, 2, 42, 4242)$, ezért $\underline{v} = 4 \cdot \underline{b}_1 + 2 \cdot \underline{b}_2 + 42 \cdot \underline{b}_3 + 4242 \cdot \underline{b}_4$. (1 pont)

Belátjuk, hogy a $\underline{b}_1, \underline{v}, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ vektorok lineárisan függetlenek.

Tegyük fel, hogy $\lambda_1 \cdot \underline{b}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v} + \lambda_3 \cdot \underline{b}_3 + \lambda_4 \cdot \underline{b}_4 = \underline{0}$ teljesül valamilyen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ skalárookra. (1 pont)

Behelyettesítve ebbe a $\underline{v} = 4 \cdot \underline{b}_1 + 2 \cdot \underline{b}_2 + 42 \cdot \underline{b}_3 + 4242 \cdot \underline{b}_4$ összefüggést, majd átrendezve az egyenletet,

$$(\lambda_1 + 4 \cdot \lambda_2) \cdot \underline{b}_1 + 2\lambda_2 \cdot \underline{b}_2 + (\lambda_3 + 42 \cdot \lambda_2) \cdot \underline{b}_3 + (\lambda_4 + 4242 \cdot \lambda_2) \cdot \underline{b}_4 = \underline{0}$$

adódik.

(2 pont)

Mivel a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ vektorok lineárisan függetlenek (hiszen V egy bázisát alkotják), ezért ez csak úgy lehetséges, ha $\lambda_1 + 4 \cdot \lambda_2 = 0$ és $2\lambda_2 = 0$ és $\lambda_3 + 42 \cdot \lambda_2 = 0$ és $\lambda_4 + 4242 \cdot \lambda_2 = 0$.

(2 pont)

Ebből azonnal adódik, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ is teljesül. Vagyis az előadáson tanult tétel szerint a $\underline{b}_1, \underline{v}, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ vektorok lineárisan függetlenek.

(1 pont)

Mivel a $\underline{b}_1, \underline{v}, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ egy 4-elemű lineárisan független V -beli rendszer, valamint a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ vektorok V egy 4-elemű generátorrendszerét alkotják (hiszen V egy bázisát alkotják), ezért az előadáson tanult tétel szerint $\underline{b}_1, \underline{v}, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ a V egy bázisa.

(3 pont)

2. megoldás.

Mivel $[\underline{v}]_B = (4, 2, 42, 4242)$, ezért $\underline{v} = 4 \cdot \underline{b}_1 + 2 \cdot \underline{b}_2 + 42 \cdot \underline{b}_3 + 4242 \cdot \underline{b}_4$.

(1 pont)

Belátjuk, hogy a $\underline{b}_1, \underline{v}, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ vektorok V egy generátorrendszerét alkotják. Legyen ehhez $\underline{w}$ egy tetszőleges V -beli vektor.

Mivel a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ vektorok V egy generátorrendszerét alkotják (hiszen V egy bázisát alkotják), ezért $\underline{w} = \alpha_1 \cdot \underline{b}_1 + \alpha_2 \cdot \underline{b}_2 + \alpha_3 \cdot \underline{b}_3 + \alpha_4 \cdot \underline{b}_4$ valamely $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ skalárookra.

(2 pont)

Behelyettesítve ebbe a $\underline{b}_2 = \frac{1}{2} \cdot \underline{v} - 2 \cdot \underline{b}_1 - 21 \cdot \underline{b}_3 - 2121 \cdot \underline{b}_4$ összefüggést, majd átrendezve az egyenletet,

$$\underline{w} = (\alpha_1 - 2 \cdot \alpha_2) \cdot \underline{b}_1 + \frac{\alpha}{2} \cdot \underline{v} + (-21 \cdot \alpha_2 + \alpha_3) \cdot \underline{b}_3 + (-2121 \cdot \alpha_2 + \alpha_4) \cdot \underline{b}_4$$

adódik.

(2 pont)

Vagyis a $\underline{w}$ vektor előáll a $\underline{b}_1, \underline{v}, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ vektorok egy lineáris kombinációjaként. Tehát a $\underline{b}_1, \underline{v}, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ vektorok valóban V egy generátorrendszerét alkotják.

(2 pont)

Mivel a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ egy 4-elemű lineárisan független V -beli rendszer (hiszen egy bázis), valamint a $\underline{b}_1, \underline{v}, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ vektorok V egy 4-elemű generátorrendszerét alkotják, ezért az előadáson tanult tétel szerint $\underline{b}_1, \underline{v}, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ a V egy bázisa.

(3 pont)

Természetesen az is helyes, ha valaki az 1. megoldásban ismertetett módon látja be, hogy a $\underline{b}_1, \underline{v}, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ vektorok lineárisan függetlenek, és a 2. megoldásban leírt módon bizonyítja, hogy ezek a vektorok V egy generátorrendszerét alkotják. Ekkor a koordinátavektor értelmezéséért járó 1 pont megszerzése után a lineáris függetlenség bizonyítása 1 + 1 + 2 + 1 pontot, a generátorrendszeriség bizonyítása pedig 1 + 1 + 2 pontot ér.

A Számítástudomány alapjai

1. pZH javítókulcs (2024. 11. 18.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibaért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Tegyük fel, hogy az egyszerű G gráfnak 9 csúcsa van, melyek fokszáma rendre 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8. Következik-e ebből, hogy a $\overline{G}$ komplementergráf bizonyosan tartalmaz kört?

A kézfogáslemma szerint G csúcsainak fokszámösszege megegyezik G éleinek számának kétszeresével. (2 pont)

Ezért G élszáma $\frac{1}{2}(4 + 4 + 5 + 5 + 6 + 6 + 7 + 7 + 8) = \frac{52}{2} = 26$. (1 pont)

Mivel a K_9 teljes gráfnak $\binom{9}{2} = 36$ éle van, ezért a $\overline{G}$ komplementergráf élszáma $36 - 26 = 10$. (3 pont)

Az órán azt tanították, hogy egy n -csúcsú, körmentes gráfnak legfeljebb $n - 1$ éle lehet. (2 pont)

Mivel a 9-csúcsú $\overline{G}$ komplementergráfnak 10 éle van, ezért $\overline{G}$ nem lehet körmentes, így bizonyosan tartalmaz kört. Nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (2 pont)

Az első 6 pont alábbi gondolatmenet ismertetésével is megszerezhető.

A $\overline{G}$ komplementergráfban a fokszámok 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 0. A kézfogáslemma szerint $\overline{G}$ csúcsainak fokszámösszege megegyezik $\overline{G}$ éleinek számának kétszeresével, ezért $\overline{G}$ élszáma $\frac{1}{2}(4 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 0) = \frac{20}{2} = 10$.

Ekkor a fokszámok meghatározása 3 pontot, a kézfogás lemma felidézése 2 pontot, a $\overline{G}$ élszámának kiszámítása pedig 1 pontot ér.

Ha egy megoldó helytelenül határozza meg a fokszámokat, akkor az ezért járó 3 pont elvesztése után a további részpontszámokat még megkaphatja. Ha azonban a hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor csak a fentieknek lényegében megfeleltethető részekért adható pont.

2. Van-e olyan e éle a bal oldali ábrán látható G gráfnak, amire a $G - e$ gráf minimális költségű feszítőfájának költsége 2-vel több, mint a G minimális költségű feszítőfájának költsége?

Keressünk egy minimális költségű feszítőfát a Kruskal-algoritmussal. (Ez a pont akkor is jár, ha egyértelműen kiderül, hogy a megoldó ezzel az algoritmussal dolgozik.) (1 pont)

Az algoritmus az élekről a költségük szerinti növekvő sorrendben dönti el, hogy bekerüljenek-e a minimális költségű feszítőfába. (2 pont)

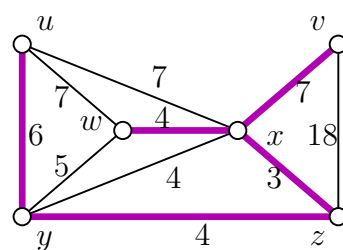
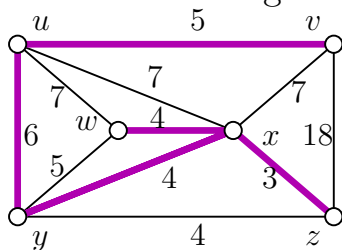
(Ha egy megoldó csak felrajzolja a minimális költségű feszítőfát, de egyáltalán nem követhetők nála az algoritmus lépései, az ezt a 2 pontot nem kapja meg abban az esetben sem, ha a felrajzolt feszítőfa helyes.)

Egy minimális költségű feszítőfa a bal oldali ábrán látható. Ennek a költsége 22. (2 pont)

Hagyjuk el az $e = uv$ élt és keressünk így is egy minimális költségű feszítőfát a Kruskal-algoritmussal. (3 pont)

Ekkor a jobb oldali ábrán látható feszítőfát kapjuk. Ennek a költsége 24. (2 pont)

Ezért a feladat kérdésére igenlő a válasz: van olyan éle G -nek, amit elhagyva a minimális költségű feszítőfa költsége 2-vel növekszik.



3. A mellékelt táblázat a felső becslés változását mutatja a Dijkstra-algoritmusnak egy nemnegatív élhosszokkal rendelkező, **irányítatlan** G gráfon történő futtatása során. Igaz-e, hogy bizonyosan vezet él c és f között a G gráfban? Ha igen, akkor adjuk meg a hosszát.

a	b	c	d	e	f
∞	0	∞	∞	∞	∞
42	0	∞	7	∞	77
24	0	33	7	42	66
24	0	28	7	42	44
24	0	28	7	33	43
24	0	28	7	33	42

A KÉSZ halmazba mindig az a KÉSZ halmazon kívüli csúcs kerül, amelyekre az aktuális felső becslés a legkisebb, majd a bekerült csúcsból a kilépő élek mentén javítunk. (2 pont)

Az alábbi táblázatban a bekarikázott számú csúcsok kerülnek az adott lépésben a KÉSZ halmazba, a számok mellé írt csúcsok pedig azt jelölik, hogy melyik csúcsból kilépő él mentén történt meg a javítás. (4 pont)

(Természetesen ez a 4 pont akkor is jár, ha más módon jelennek meg egy megoldásban a szükséges információk.)

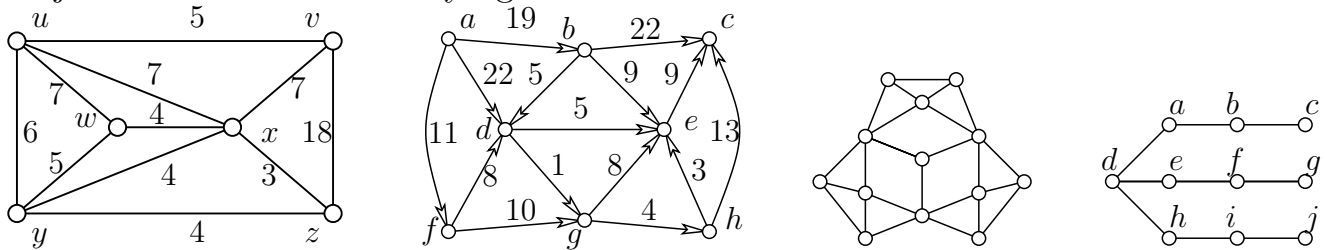
a	b	c	d	e	f
∞	0	∞	∞	∞	∞
42 b		∞	7 b	∞	77 b
24 d		33 d		42 d	66 d
		28 a		42 d	44 a
				33 c	43 c
					42 e

Az előző táblázatból kiolvasható, hogy a c csúcsból javítottunk az f -hez tartozó felső becslésen, tehát c és f között biztosan vezet él, (2 pont)

melynek hossza $43 - 28 = 15$.

(2 pont)

4. Határozzuk meg a második ábrán látható PERT probléma minimális végrehajtási idejét és a kritikus tevékenységeket.



Forrástörlesztés módszerével (vagy más, alkalmas módon) meghatározzuk a G gráf csúcsainak egy topologikus sorrendjét: a, b, f, d, g, h, e, c . (2 pont)

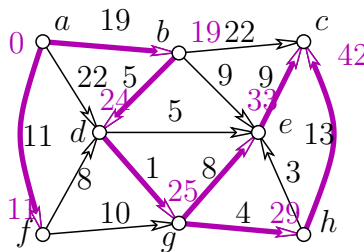
(Ha nem derül ki a (helyes) topologikus sorrend meghatározásának módszere, az 1 pont vesztéség.)

Az órán tanult PERT-módszer futtatása után az ábrán látható eredmény adódik. A legkorábbi befejezési időket a csúcsok mellett álló számok jelzik, (3 pont)

az egyes csúcsokba befutó leghosszabb utak utolsó éleit pedig megvastagítottuk. (3 pont)

A kritikus tevékenységek a, b, d, g, e, h, c , más szóval f kivételével az összes tevékenység. (2 pont)

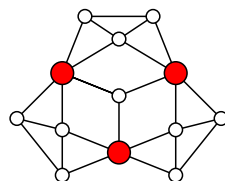
Ha egy megoldó elszámol egy befejezési időt (de utána azzal helyesen számol tovább), akkor 1 pontot, ha pedig nem jelöli meg az összes lehetséges utolsó élt, akkor ezért 2 pontot veszít.



5. Van-e Hamilton-köre a harmadik ábrán látható gráfnak?

Az alábbi ábrán pirossal jelzett 3 csúcsot elhagyva a gráf 4 komponensre esik szét, (7 pont)

(nevezetesen egy izolált csúcsra és három darab K_3 -ra),
amiből az előadáson tanult tétel szerint következik, hogy a gráfnak nincs Hamilton-köre. (3 pont)



Ha egy megoldó tudja, hogy mit kellene keresni, de (látható próbálkozások ellenére) nem találja, akkor az előadáson tanult tétel helyes kimondásáért járó 3 ponton felül a próbálkozások minőségétől függően legfeljebb további 2 pontot kaphat.

★ A negyedik ábrán látható a G gráf egy BFS-fája. Lehetséges-e, hogy bg , fj és ci is élei G -nek?

Bebizonyítjuk, hogy nem lehetséges.

Az órán az tanították, hogy minden gráfél legfeljebb egy szintet lép lefelé a BFS-fában. (1 pont)

Megmutatjuk, hogy ebből az következik, hogy a BFS-fa gyökere csak a d csúcs lehetne. Az a csúcs nem lehetett a gyökér, hiszen az a -tól a b távolsága 1, míg a g távolsága 4, vagyis a bg él több mint egy szintet lépne lefelé. Szimmetriaokok miatt az e csúcs sem lehetett gyökér az fj él miatt, valamint a h csúcs sem lehetett gyökér az ic él miatt.

A c csúcs sem lehetett gyökér, hiszen a c -től a b távolsága 1, míg a g távolsága 6, vagyis a bg él több mint egy szintet lépne lefelé. Szimmetriaokok miatt a g csúcs sem lehetett gyökér az fj él miatt, valamint a j csúcs sem lehetett gyökér az ic él miatt. (4 pont)

Viszont a d csúcsból indulva bármelyik csúcsot is érjük el az b , f és i csúcsok közül elsőként a BFS-bejárás során, a BFS-fába be kell kerülnie a bg , fj vagy ic él valamelyikének. (4 pont)

Tehát bg , fj és ci nem lehet egyszerre éle G -nek. (1 pont)

Ha egy megoldó a feladatbeli ábra alapján azt feltételezte, hogy a d csúcs volt a gyökér, akkor az ennek indoklásáért járó 4 pontot értelemszerűen nem kaphatja meg. Ha egy megoldó csak annyit mond, hogy a d gyökértől nézve a bg , fj és ic élek is a BFS-fa szomszédos szintjei között futnak és emiatt a feladat kérdésére igenlő a válasz, akkor ezért a gondolatért legfeljebb 2 pontot kaphat.

A Számítástudomány alapjai

2. pZH javítókulcs (2024. 12. 11.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Lehet-e a K_{13} teljes gráfból úgy törölni 42 élt, hogy a kapott gráf síkbarajzolható legyen?

A K_{13} teljes gráf élszáma $|E(K_{13})| = \binom{13}{2} = 6 \cdot 13 = 78$. (2 pont)

Ezért a 42 él törlésével kapott G gráf élszáma $78 - 42 = 36$. (1 pont)

A konstrukcióból adódóan G egyszerű gráf, (1 pont)

így ha G síkbarajzolható is volna, akkor a tanult tétel szerint $e \leq 3n - 6$ teljesülne, ahol e ill. n rendre G éleinek ill. csúcsainak számát jelöli. (2 pont)

Mivel most $3n - 6 = 3 \cdot 13 - 6 = 33 < 36 = e$, ezért a kapott gráf biztosan nem síkbarajzolható. (4 pont)

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok körében.

$$x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 10$$

$$3x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 = 18$$

$$-x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = -4$$

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 1 & 5 & -1 & -2 & 18 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 0 & -4 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 4 & -12 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -2 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -10 & 30 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

(7 pont)

Vagyis $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$ és $x_5 = \beta \in \mathbb{R}$ tetszőleges, $x_1 = 7 - 2\alpha + \beta$, $x_2 = \alpha$, $x_4 = 3 + \beta$. (3 pont)

A számolási hibák – egyébként elvileg jó megoldás esetén – darabonként 1 pont levonást jelentenek. Ha a hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor csak a fentieknek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Ha egy megoldó (akár helyes) számításokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek a lépések nem célratoróék, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért maximum 3 pont adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

3. Jelölje $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ és $\underline{u}$ az alábbi $\mathbb{R}^4$ -beli vektorokat. A p valós paraméter minden lehetséges értékére döntsük el, hogy igaz-e az $\underline{u} \in \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle$ állítás.

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}$$

Az $\underline{u} \in \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle$ állítás azt jelenti, hogy $\underline{u}$ kifejezhető a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként, vagyis léteznek olyan α, β, γ skalárok, hogy $\alpha \cdot \underline{v}_1 + \beta \cdot \underline{v}_2 + \gamma \cdot \underline{v}_3 = \underline{u}$. (1 pont)

A vektoregyenlet az alábbi lineáris egyenletrendszerrel ekvivalens:

$$-\alpha + \beta + \gamma = -2$$

$$\beta + 2\gamma = -3$$

$$3\alpha + \gamma = 1$$

$$\alpha + 2\beta - \gamma = p$$

(1 pont)

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & p \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & p-2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & p+7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & p-5 \end{array} \right)$$

(3 pont)

Ha $p - 5 \neq 0$, akkor az utolsó sor tilos sor, és ilyenkor nincs megoldás,

(1 pont)

azaz $p \neq 5$ esetén $\underline{u} \notin \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle$.

(1 pont)

Ha $p = 5$, akkor a Gauss-eliminációt folytatva az alábbi adódik.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

(1 pont)

Vagyis $p = 5$ esetén a megoldás: $\alpha = 1$, $\beta = 1$ és $\gamma = -2$,

(1 pont)

így ilyenkor $\underline{u} \in \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle$.

(1 pont)

Természetesen a $p = 5$ esetben hivatkozhatunk arra is, hogy mivel a csupa nulla sor elhagyásával kapott lépcsős alak minden oszlopa tartalmaz vezéregyest, ezért van (egyértelmű) megoldása, amiből $\underline{u} \in \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle$ következik.

4. Bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$ -ban az alábbi $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok?

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Ahhoz, hogy ezek a vektorok bázist alkossanak, az kell, hogy lineárisan függetlenek legyenek és generátorrendszeret alkossanak $\mathbb{R}^3$ -ban.

(1 pont)

A lineáris függetlenség vizsgálatához tegyük fel, hogy $\alpha \cdot \underline{a} + \beta \cdot \underline{b} + \gamma \cdot \underline{c} = \underline{0}$ teljesül valamilyen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ skalárokkal.

(2 pont)

Behelyettesítve az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorokat és elvégezve a műveleteket a következő lineáris egyenletrendszerre jutunk:

$$\alpha - 3\beta + 2\gamma = 0$$

$$3\alpha - 7\beta - 8\gamma = 0$$

$$-5\alpha + 12\beta + 11\gamma = 0$$

(1 pont)

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & -7 & -8 & 0 \\ -5 & 12 & 11 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -14 & 0 \\ 0 & -3 & 21 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -19 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

(3 pont)

Vagyis $\gamma \in \mathbb{R}$ szabad paraméter, $\alpha = 19\gamma$ és $\beta = 7\gamma$.

(1 pont)

Így például a $\gamma = 1$ választással $\alpha = 19$ és $\beta = 7$ adódik, azaz $19\underline{a} + 7\underline{b} + \underline{c}$ az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok egy olyan nemtriviális lineáris kombinációja, ami a nullvektort adja.

(1 pont)

Tehát az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ rendszer nem független, és ezért nem is bázis $\mathbb{R}^3$ -ban.

(1 pont)

5. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét a **determináns definíciója szerint**. (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -9 & 1 \\ -5 & 2 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

Először megmutatjuk, hogy a determináns definíciójában szereplő, előjelesen összeadandó szorzatok között két nemnulla szorzat szerepel. (1 pont)

Ha ugyanis nemnulla szorzatot szeretnénk kiválasztani, akkor a második sorból csak a (-1) -et, a második oszlopból pedig csak a 2 -t választhatjuk. Vagyis az első sorból vagy a 6 -ot vagy a (-4) -et kell választanunk. Az előbbi esetben a harmadik sorból az 1 -et, az utóbbi esetben pedig a 3 -at kell választanunk, így csakugyan két nemnulla szorzatunk lesz, mégpedig a $6 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2$ és a $-4 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 2$. (2 pont)

Az ezekhez tartozó permutációk rendre az $1, 3, 4, 2$, illetve a $4, 3, 1, 2$. (1 pont)

Ezek közül az első inverziószáma 2 , mivel ebben a permutációban az inverzióban álló elempárok $(3, 2)$ és $(4, 2)$, (1 pont)

a másodiké 5 , mivel ebben a permutációban az inverzióban álló elempárok $(4, 3)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(3, 1)$ és $(3, 2)$. (1 pont)

A $6 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2$ szorzatot tehát pozitív előjellel kell figyelembe vennünk, mivel a hozzá tartozó permutáció inverziószáma páros, (1 pont)

a $-4 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 2$ szorzatot pedig negatív előjellel, hiszen a hozzá tartozó permutáció inverziószáma páratlan. (1 pont)

A determináns értéke tehát $6 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 - (-4) \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 2 = -12 - 24 = -36$. (2 pont)

- ★ Tegyük fel, hogy $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ az $\mathbb{R}^3$ tér egy bázisa, és nincs olyan $\underline{0} \neq \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ vektor, amire $\underline{v} = [\underline{v}]_B$ teljesül. Igazoljuk, hogy a $\underline{b}_1 - \underline{e}_1, \underline{b}_2 - \underline{e}_2, \underline{b}_3 - \underline{e}_3$ vektorok lineárisan függetlenek.

Tegyük fel, hogy $\alpha \cdot (\underline{b}_1 - \underline{e}_1) + \beta \cdot (\underline{b}_2 - \underline{e}_2) + \gamma \cdot (\underline{b}_3 - \underline{e}_3) = \underline{0}$ teljesül valamilyen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ skalárookra. (1 pont)

Ekkor $\alpha \cdot \underline{b}_1 + \beta \cdot \underline{b}_2 + \gamma \cdot \underline{b}_3 = \alpha \cdot \underline{e}_1 + \beta \cdot \underline{e}_2 + \gamma \cdot \underline{e}_3$. (0 pont)

Legyen $\underline{v} = (\alpha, \beta, \gamma)^\top$. Az előzőek alapján $[\underline{v}]_B = (\alpha, \beta, \gamma)^\top$. (4 pont)

Ekkor a feladat feltételei szerint $\underline{v} = \underline{0}$, (2 pont)

azaz $\alpha = \beta = \gamma = 0$. (1 pont)

Így a tanultak szerint $\underline{b}_1 - \underline{e}_1, \underline{b}_2 - \underline{e}_2, \underline{b}_3 - \underline{e}_3$ vektorok lineárisan függetlenek (mert $\alpha \cdot (\underline{b}_1 - \underline{e}_1) + \beta \cdot (\underline{b}_2 - \underline{e}_2) + \gamma \cdot (\underline{b}_3 - \underline{e}_3) = \underline{0}$ csak az $\alpha = \beta = \gamma = 0$ esetben lehetséges). (2 pont)