Sztochasztika félvizsga

Felsőbb matematika villamosmérnököknek A vizsgakurzus

2013. június 6. 8:00. Munkaidő: 100 perc. Minden feladat 10 pontot ér.

1. Egy szabályos dobókockát addig dobálunk, amíg ki nem jön a 6-os, és N-nel jelöljük a 6-ost *megelőző* dobások számát (vagyis a 6-ost már nem számoljuk bele). Ezután feldobunk egy szabályos pénzérmét N-szer, és X-szel jelöljük az összes dobott *fejek* számát. Adjuk meg X generátorfüggvényét, várható értékét és szórását! *Bónusz kérdés: mi X eloszlása?*

2. Mórickának az egyetemen 80 vizsgát kell teljesítenie a diplomához. Minden vizsgán átmegy legfeljebb harmadik próbálkozásra: $\frac{1}{3}$ valószínűséggel elsőre, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel másodikra, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel pedig harmadikra – a többi vizsgától függetlenül.

   Pistike a centrális határeloszlás tétel segítségével szeretné megbecsülni annak a valószínűségét, hogy Móricka 200-nál többször megy vizsgázni. Legfeljebb mennyit fog Pistike a becslésével *tévedni* a Berry-Esseen tétel szerint? *(A Berry-Esseen tételben szereplő C konstans egy 2011-es eredmény szerint választható* 0.4748*-nak.)*

3. Egy videófolyam-szerverhez csúcsidőben 1000 fizető prémium felhasználó és 5000 ingyenesen filmet nézegető „közönséges” felhasználó csatlakozik. A prémium felhasználók legfeljebb 5 Mbit/s sávszélességet használhatnak, de ennek csak átlagosan a felét veszik ténylegesen igénybe. A közönséges felhasználók legfeljebb 2 Mbit/sec sávszélességet használhatnak, és ennek átlagosan $\frac{2}{3}$-át használják ténylegesen ki. Mennyi legyen a szerver kimenő sávszélessége, hogy biztosan tudhassuk, hogy az igényeket (a csúcsidő egy pillanatában) legalább 0.9999 valószínűséggel elbírja? (Az egyes felhasználók sávszélesség-igényei egymástól függetlenek.)

4. Mérnök Mari újszülött gyermeke az édesanyja megfigyelése szerint háromféle állapotban lehet: 1 – „sír”; 2 – „alszik”; 3 – „eszik”. A gyermek időnként véletlenszerűen ugrik át egyik állapotból a másikba, az előzményektől (a jelenre, mint feltételre nézve feltételesen) függetlenül, vagyis ő egy háromállapotú, folytonos idejű Markov lánc. Jelölje $X(t)$ a gyerek állapotát t időben. A beágyazott diszkrét idejű Markov-lánc Q átmenetvalószínűség mátrixa a következő:

   $$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,7 & 0 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 0 \end{bmatrix}$$

   Az állapotsorrend 1,2,3 balról-jobbra és felülről-lefelé. Feltesszük, hogy az 1-es állapotban marad $Exp(8)$ ideig, a 2-es állapotban $Exp(0,5)$ ideig és a 3-asban $Exp(4)$ ideig. (Mari az időt órában méri.)

   (a) Az idő hány százalékában van az 1-es, 2-es, 3-as állapotokban?

   (b) Három hét után délben megnézzük a gyereket. Mi a valószínűsége, hogy éppen alszik?

   (c) Ha a gyerek az 1-es állapotban van, Marinak óránként 100 hajszála hullik ki. Hasonlóan a 2-es állapotban 5, a 3-as állapotban 20 hajszálat veszít óránként. Hány hajszála hullik ki Mérnök Marinak, mire a gyermek eléri a négyhetes kort?

5. Móricka egy dobókockával 120-szor dobott: 1-est 34-szer, 2-est 19-szer 3-ast 20-szor, 4-est 14-szer, 5-öst 23-szor és 6-ost 10-szer. Döntsünk 99%-os szinten arról a hipotézisről, hogy a kocka szabályos.