Feladatok

1. első

1. Legyen $A, B \in \Im$. Adja meg az összes olyan $C \in \Im$ eseményt, melyre $A \cdot C \equiv A \cdot B$ teljesül!

2. Legyen $A, B \in \Im$. Adja meg az A, B-t tartalmazó legszűkebb $\sigma-$algebrát!

3. Legyen $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Im$. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n) \geq \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \cdots + \mathbf{P}(A_n) - (n-1)$.

4. Bizonyítsa be, hogy minden $A, B \in \Im$ esetén $|\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(AC)| \leq \mathbf{P}(B \triangle C)$, ahol $B \triangle C = B\bar{C} + \bar{B}C$!

5. Bizonyítsa be, hogy minden $A, B \in \Im$ esetén $-\frac{1}{4} \leq \mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \leq \frac{1}{4}$!

6. Bizonyítsa be, hogy minden $A, B \in \Im$ esetén $\mathbf{P}(AB)\,\mathbf{P}\left(\bar{A}\bar{B}\right) \leq \frac{1}{4}$!

7. Bizonyítsa be, hogy minden $A, B \in \Im$ esetén $\mathbf{P}(A \triangle B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 2\mathbf{P}(AB)$!

8. Bizonyítsa be, hogy minden $A, B, C \in \Im$ esetén $\mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(AC) - \mathbf{P}(BC) \leq \mathbf{P}(A)$!

9. Bizonyítsa be, hogy minden $A, B, C \in \Im$ esetén $\mathbf{P}(A + B + C) - \mathbf{P}(ABC) \geq \mathbf{P}(B \triangle C)$!

10. Bizonyítsa be, hogy minden $A, B, C \in \Im$ esetén $\mathbf{P}(A \triangle B) \leq \mathbf{P}(A \triangle C) + \mathbf{P}(B \triangle C)$!

11. Bizonyítsa be, hogyha $\mathbf{P}(A) = 0,9$ és $\mathbf{P}(B) = 0,8$, akkor $\mathbf{P}(AB) \geq 0,7$!

12. A $\mathcal{K}$ kísérlet abban áll, hogy véletlenszerűen kiválasztunk n elemnek egy permutációját. Jelentse A_{ij} azt az eseményt, amikor a kiválasztott permutációban az i-edik elem a j-edik helyen áll. Fejezze ki A_{ij}-k segítségével az alábbi eseményeket:
A: ,,az első elem a másodiktól balra áll",
B: ,,az első elem sorszáma legfeljebb j".

13. Legyen $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Im$ és $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$. Állítsuk elő A-t egymást kizáró események összegeként!

14. Egy egyetemi évfolyamon a lányok közül 60-nak a haja barna, 40-nek a haja és a szeme is barna, 110 lánynak a haja és a szeme közül legalább az egyik barna. Hány barnaszemű lány van az évfolyamon?

15. Egy kávéautomata 100 Ft-os érmékkel működik. Egy tetszőleges 100 Ft-os érmét 0,98 valószínűséggel fogad el. Az automata kijelzője mutatja, hogy még 4 adag kávé van benne. Négyen állnak az automata előtt 1-1 db 100 Ft-os érmével a kezükben, amikor odaérkezem. Mekkora a valószínűsége, hogy jut nekem a kávéból? Mekkora annak a valószínűsége, hogy én iszom a 4 adag közül az elsőt?

16. Három szabályos dobókockával dobunk. A: ,,az összeg 7", B: ,, mindegyik páros", C: ,,van közöttük hármas". Számolja ki a $\mathbf{P}(A \cdot (B + \bar{C}))$ és $\mathbf{P}((A + C)\bar{B})$ valószínűségeket!

17. Az ötöslottó esetében melyik lottószám lesz a legnagyobb valószínűséggel a második legnagyobb kihúzott szám?

18. Az ötöslottó esetében mennyi a valószínűsége annak, hogy a következő heti lottószámok legnagyobbika kisebb lesz, mint a rákövetkező hét kihúzott számainak legkisebbike?

19. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a lottón a kihúzott öt szám közül nagyság szerint a középső 50-nél kisebb?

20. Egy sakktáblán találomra elhelyezünk 8 bástyát. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a bástyák nem ütik egymást?

21. Egyszerre n szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
A: az összes kockával ugyanazt az értéket kapjuk?
B: legalább egy hatost dobunk?
C: pontosan egy hatost dobunk?

22. Egy urnában a darab fehér és b darab fekete golyó van. $(a, b \geq 2)$. Viszszatevés nélkül kiveszünk két golyót az urnából. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
A: a két golyó azonos színű?
B: a két golyó különböző színű?

23. Harminc számozott golyót rakunk szét nyolc különböző ládába. (Az elhelyezéskor bármelyik golyót ugyanakkora valószínűséggel tehetünk bármelyik ládába.) Keressük meg annak az elhelyezésnek a valószínűségét, amelynél három láda üres, kettőben három golyó van, kettőbe hat és egybe 12 db golyó kerül!

24. Tekintsük az összes olyan n hosszúságú sorozatot, amelyek $0, 1, 2$ számokból állnak. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy egy véletlenül választott ilyen sorozat:
A: 0-val kezdődik;
B: pontosan $m + 2$ db 0-át tartalmaz, melyek közül kettő a sorozat végén van;
C: pontosan m db 1-est tartalmaz;
D: pontosan m_0 db 0-át, m_1 db 1-est és m_2 db 2-est tartalmaz.

25. Ketten pénzfeldobással játszanak. András nyer, ha egy szabályos érme dobási sorozatában három fej hamarabb következik, mint a fej-írás-fej sorozat. Viszont Béla a nyerő, ha mindez fordítva történik, azaz a fej-írás-fej sorozat előbb jön mint fej-fej-fej. Egyenlőek a játék nyerési esélyei? Milyen legyen a fej dobásának p valószínűsége, hogy a játék „ fair” legyen?

26. Legyen A az az esemény, hogy az ötöslottó húzásánál mindegyik kihúzott szám nem nagyobb mint 50, és B pedig az az esemény, hogy mindegyik kihúzott szám páros. Számoljuk ki a $\mathbf{P}(A), \mathbf{P}(B), \mathbf{P}(AB), \mathbf{P}(A+B)$ valószínűségeket!

27. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a lottóhúzásnál a kihúzott legnagyobb és legkisebb szám különbsége éppen k? $(4 \leq k \leq 89)$.

28. Egy üres, téglalap alakú szobában, melynek falai 10 és 5 méter hosszúak, leejtünk egy golyót. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a golyó egy olyan pontban fog megállni, amely közelebb van a szoba egy sarkához, mint a szoba középpontjához?

29. Egy 10 cm oldalhosszúságú négyzetrácsos hálózatra leejtünk egy 3 cm átmérőjű köralakú pénzdarabot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pénzdarab lefedi egy négyzet csúcsát?

30. Az $ABCD$ négyzetben találomra választunk egy P pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy P közelebb lesz az AB oldalhoz, mint a négyzet középpontjához?

31. Egy d szélességű lécekből álló padlózatra ledobunk egy $s = 2d$ hosszúságú tűt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a tű két padlórést fog egyszerre metszeni?

32. Az egységkör kerületén véletlenszerűen kiválasztunk három pontot: A, B és C-t. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a BAC szög nagyobb lesz 60^o-nál?

33. Legyen $P = (a, b)$ az egységnégyzet egy véletlenül kiválasztott pontja és $p(x) = \frac{1}{3}x^3 - a^2x + b$ egy harmadfokú polinom. Mennyi a valószínűsége annak, hogy $p(x)$-nek pontosan egy, illetve pontosan három valós gyöke van?

34. Találomra kiválasztunk egy P pontot az egységkör kerületén, majd egy Q pontot a körlapon. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a QP szakasz hossza nagyobb, mint 1?

35. A $(0, 2)$ és $(0, 3)$ szakaszokon választunk találomra egy-egy pontot, legyenek ezek x és y. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az x, y és 1 hosszúságú szakaszokból szerkeszthető háromszög?

36. A $[0, 1]$ intervallumon találomra kiválasztunk két számot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az egyik szám több, mint kétszerese lesz a másiknak?

37. Válasszunk ki egy x és egy y pontot az egységintervallumban! Tekintsük azt a téglalapot, melynek oldalhosszai x és y. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a keletkező téglalap kerülete nagyobb, mint 2 és területe kisebb, mint $0,25$?

38. Vegyünk egy véletlen $P = (a, b)$ pontot az egységnégyzetből. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a $p(x) = ax^2 - 2bx + 1$ polinomnak nincs valós gyöke?

39. Egy urnában b darab fekete és r darab fehér golyó van. Véletlenszerűen kihúzunk egy golyót. A kihúzott golyót és még ugyanolyan színűből c darabot visszateszünk az urnába. Ezt megtesszük egymás után n-szer. Igazolja, hogy ezek után, a fekete golyó kihúzásának valószínűsége $\frac{b}{b+r}$!

40. Magyar kártyával huszonegyezünk. A kártya értékei: alsó=2, felső=3, király=4, hetes=7, nyolcas=8, kilences=9, tizes=10, ász=11. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 21-ünk lesz, ha a 19-et értük el az ötödik húzás után?

41. Egy kalapban tíz cédula van, melyekre a $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ számjegyek vannak felírva. Visszatevéssel kiveszünk két cédulát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a számjegyek összege i, feltéve, hogy a számjegyek szorzata nem nulla? ($i = 0, 1, ..., 18$).

42. Először feldobunk egy szabályos érmét. Ha *fej*, egyszer, ha *írás*, akkor kétszer dobunk egy szabályos dobókockával. Mennyi annak a valószínűsége, hogy lesz hatos?

43. Egy rekeszben 15 teniszlabda van, melyek közül 9 még használatlan. Három játékhoz kiveszünk találomra három labdát, majd a játék után visszarakjuk azokat a rekeszbe. (Nyilván, ha volt közöttük használatlan, az a játék során elveszti ezt a tulajdonságát.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindhárom kivételhez 1 új és 2 használt labda kerül a kezünkbe?

44. Egy szövegszerkesztő a karaktereket 7 bitbe kódolja, és ezt egy paritásbittel egészíti ki úgy, hogy az 1-ek száma páros legyen. Teszi ezt azért, hogy egy hibát észlelni tudjon, ha páratlan az egyesek száma. Tegyük fel, hogy a nyolc bitet egy olyan (ún. bináris szimmetrikus) csatornán küldi át, amely egy bitet $\frac{1}{10}$ valószínűséggel ront el. Milyen valószínűséggel kapunk a kimeneten úgy nyolc bitet, hogy az hibás, de mégsem tudjuk azt észlelni?

45. A vizsgázók 75%-a A szakos, 15%-a B szakos és 10%-a C szakos. Annak az eseménynek a valószínűsége, hogy egy hallgató ötöst kap, az A szakosok esetében $0,4$, a B szakosoknál $0,7$, és a C szakosoknál $0,6$. Ha egy személyről tudjuk, hogy ötösre vizsgázott, akkor milyen valószínűséggel lehet A, B illetve C szakos?

46. Három egyforma doboz közül kettőben 2 piros, egyben 1 piros és 1 fehér golyó van. Véletlenszerűen kiválasztunk egy dobozt, és abból egy golyót. Ha ez piros, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobozban maradó golyó színe fehér?

47. Egy szabályos kockával addig dobunk újra és újra, amíg először hatost nem kapunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy eközben pontosan egyszer dobunk egyest?

48. Egyetlen szelvénnyel játszom az ötöslottón. Számaim között a 40-es a középső. Az alábbi három esemény esetleges bekövetkezése közül melyik növeli jobban az ötös találatom feltételes valószínűségét?
A : ,,az első kihúzott szám a 40-es",
B : ,,kihúzták a 40-es számot",
C : ,,a 40-es szám a kihúzott számok között a harmadik".

49. Egy szabályos dobókockával addig dobok, amíg ötöst nem kapok. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezalatt nem dobunk hatost?

50. Bizonyítsa be, hogy ha A, B, C teljesen független események, akkor az $A+B$ esemény független $\bar{C}$-től!

51. Két konkurens üzletben halat árulnak. Az "A" árus aszerint alakítja ki az árakat, hogy a "B" árus az előző nap mennyiért adta a halat. Reggelente ugyanis feldob egy kockát, és ha hatost kap, akkor alámegy 10%-al a "B" árus tegnapi árának. Viszont, ha nem hatost kap, akkor ugyanazt írja ki ma reggel, amiért a konkurense tegnap árult. "B" később nyit. Neki az a szokása, hogy feldob egy pénzdarabot, és ha *fej* annak az árnak, amit az "A" kirakatában lát, veszi a 120%-át, ha *írás* akkor pedig a 80%-át és aznap azon az árfolyamon fog árulni. Ha "B" vasárnap 10 rúpiáért árulta a halat, mennyi a valószínűsége annak, hogy kedden "A" is legalább annyiért fogja árulni?

52. A $19, 26, 54, 89, 90$ számokat játszottuk meg a lottón. Legyen A az az esemény, hogy az első két számunkat kihúzzák, B pedig az, hogy legalább három taklálatunk lesz. $\mathbf{P}(A+B) = ?$

53. Kiválasztunk véletlenszerűen egy pontot az egységnégyzetben. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pont közelebb van egy oldalhoz, mint a középponthoz?

54. András, Béla és Csaba sorsot húznak. Névsor szerint haladva visszatevés nélkül kivesznek egy-egy golyót egy dobozból, melyben eredetileg két fehér és egy fekete színű golyó volt. Az veszít, aki a feketét húzza. Kinek mennyi rá az esélye?

55. Az egységnégyzeten kiválasztunk egy P pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy P közelebb van a négyzet egy átlójához, mint egy középvonalához?

56. Nyári akció során söröskupakokba elhelyeztek egy-egy színes karikát az olimpiai szimbólumból, mind az öt színből összesen ugyanannyit. Ha valakinek összegyűlik mind az öt karikából legalább egy, akkor részt vehet egy sorsoláson. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pályázáshoz k kupakra van szükség?

57. Egy dobozban 100 dobókocka van. Külsőre mind egyformák, de az egyik hamis: mindig hatost dobunk vele. A többi 99 szabályos. Találomra kivéve egyet, legalább hányszor kell vele dobnom, hogy vagy bebizonyosodjon, hogy szabályos a kocka, vagy 90%-ig biztos lehessek benne, hogy a hamis kockát vettem ki?

58. Egy 10x10 cm-es négyzetrácsos hálózatra ledobunk 10 db 2 cm *átmérőjű* pénzdarabot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pénzek között lesz olyan, amelyik lefedi valamelyik négyzet csúcsát?

59. Egy teherautó 100 láda tojást szállít, mindegyik ládában pontosan 1000 tojással. Szállításkor minden tojás 0,001 valószínűséggel összetörhet (a többitől függetlenül). A megrendelő akkor vesz át egy ládát a szállítótól, ha a ládában lévő összetört tojások száma nem haladja meg a 10-et. Menynyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb két ládát nem fognak átvenni?

60. Az egységnégyzeten egymástól függetlenül kiválasztunk 10 pontot. Ezek közül vegyük azt, amelyik legközelebb esik az origóhoz. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez a legrövidebb távolság $\frac{1}{2}$-nél kisebb?

61. Az ötöslottó esetében mennyi a valószínűsége annak, hogy több néggyel osztható lottószámot húznak ki, mint hárommal oszthatót?

62. Mutassa meg, hogy tetszőleges A, B, C eseményekre
$|\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(AC)| \leq \mathbf{P}\left(\bar{B}C + B\bar{C}\right)$!

63. A 32 lapos magyar kártyacsomagból kihúzunk hat lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy e hat lap között mind a négy szín előfordul?

64. Három kockával dobunk. Feltéve, hogy a dobott számok között nincsen két egyforma, mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább az egyiken hatos van?

65. Négyszer feldobunk egy szabályos pénzérmét.
A : az első két dobás fej,
B : az utolsó két dobás írás,
C : az első dobás megegyezik az utolsóval.
Számolja ki a $\mathbf{P}(A + B \mid C + B)$ feltételes valószínűséget!

66. Két kockával addig dobunk egyszerre, amíg mindkét érték azonos nem lesz. Mennyi a valószínűsége annak, hogy legfeljebb tízszer kell dobni?

67. Egy dobozban összesen 1000 fehér és fekete golyó van. Nem ismert a fehér és fekete golyók aránya. Visszatevés nélkül kivettünk 100 golyót, és azt tapasztaltuk, hogy közöttük 72 fekete és 28 fehér volt. Mekkora ekkor annak a feltételes valószínűsége, hogy a fekete és fehér golyók aránya eredetileg 7:3 volt?

68. Igazolja, hogy tetszőleges A, B eseményekre
$\mathbf{P}^2(A + B) + \mathbf{P}^2(A \cdot B) = \mathbf{P}^2(A) + \mathbf{P}^2(B) + 2\mathbf{P}\left(A \cdot \bar{B}\right)\mathbf{P}\left(B \cdot \bar{A}\right)$!

69. Igazolja, hogy ha $\mathbf{P}(A) = 0,8$ és $\mathbf{P}(B) = 0,9$, akkor $\frac{7}{9} \leq \mathbf{P}(A \mid B) \leq \frac{8}{9}$!

70. Legyenek $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = p$. Tegyük fel, hogy A és B függetlenek. Határozza meg annak az eseménynek a valószínűségét, hogy az A és B közül csak az egyik fog bekövetkezni!

71. Az I. dobozban egy piros és egy fehér, a II. dobozban két piros és egy fehér golyó van. Feldobnak egy kockát. Ha a dobás eredménye nem nagyobb, mint kettő, a II. dobozból, különben az I. dobozból húznak ki két golyót visszatevéssel. Ha tudjuk, hogy mindkétszer pirosat húznak, akkor melyik dobozból való húzásnak nagyobb a feltételes valószínűsége?

72. Valaki addig dob ismételten egy kockával, amíg két egymás utáni dobás azonos nem lesz. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ehhez 6 dobásra van szüksége?

73. Egy 5 cm-es szakaszon véletlenszerűen megjelölünk két pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a keletkező három szakasz között lesz 1 cm-nél rövidebb is?

74. Igazolja, hogy tetszőleges A, B, C eseményre
$\mathbf{P}(A + B + C) + (1 - \mathbf{P}(A)) \cdot \left(1 - \mathbf{P}\left(B \mid \bar{A}\right)\right) \cdot \left(1 - \mathbf{P}\left(C \mid \bar{B} \cdot \bar{A}\right)\right) = 1.$

75. Három kockával dobunk. Ha 12 lesz az összeg, akkor mekkora valószínűséggel lesz a dobott értékek között hatos?

76. Van-e olyan A és B esemény, ahol $\mathbf{P}(A \mid B) \geq 0,9$ és $\mathbf{P}\left(B \mid \bar{A}\right) \geq 0,1$?

77. Nem tudom, hogy egy dobozban mennyi fekete és mennyi fehér golyó van, csak azt, hogy van 6 piros golyó is benne. Megmondták, hogy a „fehéret vagy feketét húzok” eseménynek $\frac{3}{5}$, a „pirosat vagy feketét húzok” eseménynek pedig $\frac{2}{3}$ a valószínűsége. Mennyi fehér golyó van a dobozban?

78. Egy bináris forrásból $\frac{1}{3}$ valószínűséggel adnak A jelet és $\frac{2}{3}$ valószínűséggel B jelet. Az A-t 11111-el, a B-t 00000-el kódolják. Zajos csatornán átküldve a jeleket, minden bit a többitől függetlenül 0,6 valószínűséggel az ellenkezőjére változhat. A vételi oldalon úgy dekódolnak, hogy ha az öt vett jelben több az 1-es A-t, különben B-t vesznek. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a vételi oldalon helyesen dekódolják a jeleket?

79. Igazolja, hogy tetszőleges A, B, C eseményekre $\mathbf{P}\left(A \backslash B\bar{C}\right) + \mathbf{P}(AC \backslash B) = \mathbf{P}(A \backslash B) + \mathbf{P}(AC)$!

80. Egy 10 cm szélességű deszkalapokból készített padlózatra leejtünk tíz 5 cm hosszúságú tűt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy közülük éppen kettő fog metszeni padlórést?

81. Bizonyítsa be, hogy ha az A és B eseményre teljesül $\mathbf{P}(A), \mathbf{P}(B) \geq 0,85$, akkor $\mathbf{P}(AB) \geq 0,7$.

82. Egy szórakozott polgár elfelejtette bankkártyájának személyi azonosító (PIN) kódját, csak abban biztos, hogy a négy számjegy között pontosan két hármas volt, és az első jegy biztosan nem a nulla volt. Ha tíz másodpercenként beüt egy lehetséges variációt, akkor mennyi az esélye annak, hogy egy órán belül eltalálja a helyes azonosító számot?

83. Igazolja, hogy tetszőleges A, B esemény esetén
$4\mathbf{P}(AB)(1 - \mathbf{P}(A + B)) \leq 1.$

84. Két urna közül az egyikben 5 fekete és 7 fehér, a másikban 3 fekete és 8 fehér golyó van. Az elsőből találomra átrakunk egyet a másodikba, majd onnan találomra vissza veszünk egyet. Megint az elsőből húzva, mennyi a valószínűsége a fehérnek?

85. Az ötöslottó esetében mekkora valószínűséggel lesz 13 a legkisebb kihúzott lottószám?

86. Két szabályos kockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: a dobott számok összege páros illetve a két szám különbsége abszolút értékben legalább három?

87. Eddig tízszer dobtuk a szabályos dobókockával, és egyszer sem kaptunk hatost. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a következő tíz dobás során sem kapok hatost?

88. Kétszer egymás után feldobunk egy szabályos pénzérmét. A az az esemény, hogy elsőre fejet dobunk, B az az esemény, hogy másodikra dobunk fejet, C pedig, hogy a dobások egyezőek. Bizonyítsa be, hogy az $\{A, B, C\}$ eseményrendszer bár páronként független eseményekből áll, teljesen nem független!

89. Egy zajos bináris csatornán az A és B betűkből álló üzenetsorozatokat küldenek át. Az A betüt 000-val a B betűt 111-el kódolják. Az A és B betűk aránya a küldeményben 3:4. A 0 bit 0,2, az 1 bit 0,3 valószínűséggel az ellenkezőjére vált át a csatornában. A vételi oldalon a dekódolásnál a többségi elvet alkalmazzák: pl. egy hárombites sorozatot A betűnek értelmeznek, ha a nullák száma legalább kettő. Mennyi a hibás dekódolás valószínűsége?

90. Igazolja, hogy tetszőleges A, B, C eseményre
$\mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(AC) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(BC)$!

91. Bizonyítsa be, hogy ha az A, B eseményre $0,7 = \mathbf{P}(B) \leq \mathbf{P}(A)$ teljesül, akkor $0,57 < \mathbf{P}(A \mid B)$!

92. Legalább hányszor kell két szabályos dobókockával dobni ahhoz, hogy legalább 90%-os valószínűséggel kapjunk dupla hatost a dobássorozatban?

93. Legyen A az az esemény, hogy az ötöslottó sorsoláson a legkisebb kihúzott szám sem kisebb 50-nél, B pedig legyen az az esemény, hogy mindegyik kihúzott szám páratlan lesz. Számolja ki a $P(A + B)$ valószínűséget!

94. Legyen A és B két független esemény, C pedig mindkettőjüket kizáró esemény. $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = \frac{1}{3}$. $\mathbf{P}\left(\bar{A} + B + C\right) = ?$

95. András is és Béla is dob két kockával. András összeadja, Béla összeszorozza a kapott értékeket. Mennyi annak a valószínűsége annak, hogy András kap nagyobb számot?

96. Legalább hány szabályos érmét kell feldobni ahhoz, hogy 0,9-nél nagyobb valószínűséggel legyen köztük fej?

97. Legyen A és B két esemény, amelyre $2\mathbf{P}(A) = 2\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(B \mid A) = \frac{1}{2}$. Számítsa ki $\mathbf{P}(A + B)$-t!

98. Dobunk egy szabályos kockával, majd a dobott értéknek megfelelő számú lapot visszatevés nélkül kihúzunk a 32 lapos magyar kártyacsomagból. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között lesz ász?

99. Minimum hány lapot kell kihúzni a 32 lapos kártyacsomagból visszatevés nélkül, hogy 90%-os valószínűséggel legyen közöttük ász?

100. A 00000 és a 99999 számok között találomra kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
A: minden számjegy különböző lesz;
B: minden számjegy egyforma;
C: csak két számjegy egyezik meg;
D: három-kettő számjegy egyezik.

101. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az ötöslottó húzásánál
A: a kihúzott számok mindegyike páros;
B: több páros szám lesz, mint páratlan;
C: a kihúzott számok a húzás sorrendjében növekedőek.

102. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy négytagú társaságban legyen két ember, akinek azonos napra esik a születésnapja? (Szökőnapra eső szülinapokkal most ne foglalkozzunk!)

103. Mennyi annak a valószínűsége, hogy sorban kérdezve az embereket, az n-edik embernél tapasztalunk először ismétlődő születésnapot?

104. $2N$ db molekula mindegyike egymástól függetlenül, véletlenszerűen kerül be a T vagy S térrész valamelyikébe egyaránt $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel.
Mennyi annak a valószínűsége, hogy
A: ugyanannyi molekula lesz T-ben, mint S-ben;
B: T-ben több lesz, mint S-ben;
C: mindkét térrészben páros sok molekula lesz.

105. Egy dobozban 10 golyó van, pirosak és kékek, mindkét színből legalább egy. Nem ismerjük a doboz tartalmát, bármely összetétel ugyanolyan valószínűségű. Kétszer húzunk a dobozból visszatevéssel, és mindkét golyó színe piros volt. Melyik összetétel a legvalószínűbb?

106. Valaki dob egy kockával, és ha az eredmény k, akkor k piros és $7 - k$ fehér golyót beletesz egy urnába. A dobás eredményét előttünk titokban tartja. Ezután 10-szer húz visszatevéssel az urnából, és a kihúzott golyó színét mindig megmondja. Ennek alapján kell eltalálni azt, hogy a kockán hányast dobott előzőleg. Hogyan tippeljünk? Mekkora esélyünk van a találatra?

107. Egy dobozban 3 golyó van: piros, kék, sárga. Ötször húzunk visszatevéssel. Feltéve, hogy kéket is és sárgát is húzunk legalább kétszer, mennyi a valószínűsége annak, hogy egyszer sem húzunk pirosat?

108. Egy dobozban N piros és M fehér golyó van. Visszatevés nélkül húzva, n húzásból k piros lett. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első húzás piros volt?

109. Szabályos kockával dobunk, majd egy szabályos érmét annyiszor dobunk fel, amennyit a kocka mutat.
a) mennyi annak a valószínűsége, hogy egyszer sem dobunk fejet;
b) feltéve, hogy egyszer sem dobunk fejet, mennyi annak a valószínűsége, hogy a kockával 6-ost dobtunk?

110. Röntgenvizsgálat során $0,95$ annak a valószínűsége, hogy tbc-s beteg betegségét felfedezik. Annak a valószínűsége, hogy egy egészséges embert betegnek találnak $0,001$. A tbc-ben szenvedők aránya a lakosságon belül $0,0001$. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az ember egészséges, ha átvilágításkor betegnek találták?

111. Egy 20 cm oldalhosszúságú négyzetrácsos padlózatra ledobunk egy 2 cm élhosszúságú játékkockát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kocka teljes terjedelmével a padlózat egy négyzetében lesz?

112. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ha egy egységnyi szakaszt véletlenszerűen három részre törünk, akkor a keletkező szakaszokból hegyesszögű háromszög szerkeszthető?

1. második

1. Az egységnégyzeten találomra kiválasztunk egy P pontot. Jelölje X a P és a hozzá legközelebb álló csúcs távolságát. Adja meg X eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

2. Legyen $X \in E(\lambda)$ és $Y = X^2$. Adja meg Y sűrűségfüggvényét!

3. Legyen az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)$.
Legyen $Y = \max\{0, X\}$, $Z = \min\{0, -X\}, V = |X|$, és $W = -X$.
Fejezze ki Y, Z, V és W eloszlásfüggvényét $F(x)$-szel!

4. A $(0, 1)$ intervallumban kijelölünk három pontot véletlenszerűen. Határozzuk meg a középső pont 0-tól való távolságának eloszlásfüggvényét!

5. Egy 32 lapos magyarkártya-kötegből kihúzunk egy lapot. Legyen X a kihúzott lap értéke. Adja meg és ábrázolja X eloszlásfüggvényét! Számolja ki a $7,5 < X < 10,2$ esemény valószínűségét!

6. Legyen $X \in U(0, 1)$, és $Y = \sqrt{2X}$. Adja meg Y sűrűségfüggvényét!

7. Egy háztartási gép gyári önköltsége 10 000 Ft. A termékre a gyár 1 év garanciát ad, ami szerint a hibás gépet ingyen kicseréli, amennyiben az 1 éven belül meghibásodik. A gyár szakemberei szerint a gép élettartama 30 év várható értékű exponenciális eloszlású. A termelői ár a gép önköltsége plussz a garanciális cserék önköltségének várható értéke. Mekkora legyen a termelői ár?

8. $X \in E(2)$ segítségével generáljon egy $Y \in G\left(\frac{1}{3}\right)$ valószínűségi változót!

9. Egy gyártmánynak az 1%-a selejtes. A darabokat ezresével dobozokba csomagolják. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott dobozban nincs háromnál több hibás?

10. Egy szabályos pénzérmét addig dobunk fel újra és újra, míg meg nem kapjuk a második *fej*et is. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első *fej* után a második *fej*ig ugyanannyi dobásra van szükség, mint ahány dobás kellett az első *fej*ig?

11. Tekintsük az $f(x) = \frac{3x^2}{7}$, $x \in [1, 2]$ sűrűségfüggvényt! Az $X \in U(0, 1)$ segítségével állítsunk elő olyan Y valószínűségi változót, amelynek sűrűségfüggvénye éppen $f(x)$!

12. Milyen b értéknél lesz az $f(x) = b\sqrt{x-2}$, $x \in (2, 3)$ függvény sűrűségfüggvény?

13. Egy normális eloszlású valószínűségi változó $0,1$ valószínűséggel vesz fel $10,2$-nél kisebb értéket, és $0,25$ valószínűséggel $13,6$-nál nagyobb értéket. Mennyi a várható értéke és szórása?

14. Egy számítógépes szervízben egy hónap húsz munkanapjából átlagosan kettőn nincsen reklamáció. Poisson-eloszlást feltételezve, mennyi annak a valószínűsége, hogy egy adott napon három, vagy háromnál több reklamáció érkezik?

15. Legyen $X \in U(-1, 2)$ és $Y = X^n$. Adja meg Y eloszlásfüggvényét!

16. Egy üteg addig tüzel egy célpontra, amíg el nem találja. A találat valószínűsége minden lövésnél p. Mennyi az egy találathoz szükséges átlagos lőszerkészlet, a muníció?

17. Az A könyvben az egy oldalon található sajtóhibák száma $X \in Po(\lambda)$, míg a B könyvben ugyanez $Y \in Po(\mu)$. Igaz lehet-e a következő két állítás egyszerre: *(i)* Az A könyvben háromszor annyi sajtóhiba van, mint a B könyvben. *(ii)* A B könyvben ötször akkora a hibamentes oldalnak a valószínűsége, mint az A könyvben?

18. A boltban árult izzók 1%-a hibás. Ha veszünk 100 darabot, akkor hány darab lesz benne rossz a legnagyobb valószínűséggel, és mekkora ez a valószínűség?

19. Egy 1MFt önköltségű számítógép termelői árát kell meghatározni. A számítógép élettartama exponenciális eloszlású 10 év várható értékkel. Garanciát vállalunk úgy, hogy ha az első évben a gép elromlik, akkor kicseréljük, ha a második is elromlik egy éven belül, akkor visszaadjuk a gép árát. A termelői ár legyen az az érték, amely mellett a kiadás és a bevétel várható értéke megegyezik. (A visszavett gépek értéktelenek.)

20. Egy mérés elvégzéséhez két lehetőségünk van. Vagy egy drága készülékkel mérünk egyet, ahol a mérés hibája $N(0,1)$ eloszlású, vagy egy olcsó készülékkel mérünk háromszor, és a méréseredményeket átlagoljuk, ahol viszont a mérés hibája már $N(0,\ 1,6)$ eloszlású. Melyik mérési technika adja a pontosabb mérést?

21. Egy dobozban 7 db, a szivárvány hét színével egyező színű golyó van. Addig húzzuk ki a golyókat visszatevéssel a dobozból, amíg valamennyi színű golyót ki nem húztuk egyszer. Mi az ehhez szükséges X húzásszám eloszlása?

22. Legyen az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)$, sűrűségfüggvénye pedig $f(x)$. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{E}F(X) = \frac{1}{2}$.

23. Legyen X logisztikus eloszlású, azaz sűrűségfüggvénye: $f_X(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Számolja ki az X mediánját, vagyis azt az M_X számot, amelyre $\mathbf{P}(X < M_X) = \mathbf{P}(X \geq M_X) = \frac{1}{2}$ teljesül.

24. Legyen $X \in \{0,1,2,...\}$ olyan valószínűségi változó, melynek létezik a várható értéke. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geq i)$.

25. Legyen az X valószínűségi változó olyan, hogy $\mathbf{P}(0 < X < 1) = 1$. Bizonyítsa be, hogy $\sigma^2 X < \mathbf{E}X$!

26. Egy baromfiudvarban a gondozó gyűrűjéről leeső értékes követ az egyik liba lenyelte. A gondozó kénytelen a libák levágásával megpróbálni a kő visszaszerzését. Addig vágja le a véletlenszerűen elkapott libákat, amíg valamelyik begyében meg nem találja a követ. Ha összesen 50 liba van a farmon, mennyi a kényszerűségből levágott libák számának várható értéke?

27. Legyen $Q = (a,b)$ az egységnégyzet egy véletlenszerűen kiválasztott pontja. Jelölje X a Q pont origótól vett Euklideszi távolságát. Mi az X sűrűségfüggvénye?

28. Legyen $X \in B\left(3, \frac{1}{4}\right)$, és $Y = X^3$. Mi Y eloszlása, és mennyi a várható értéke?

29. Az origóból kiindulva egy bolha ugrál a számegyenesen. Minden ugrása egységnyi hosszú és a többitől függetlenül p valószínűséggel jobbra, $1-p$ valószínűséggel balra történik. Az ötödik ugrás után megfigyeljük a bolha helyét. Adja meg ennek az eloszlását!

30. Az X normális eloszlású valószínűségi változó várható értéke -5 és tudjuk, hogy $\mathbf{P}(-5 \leq X < 0) = 0,3$. Mennyi a $\mathbf{P}(-5 < X < 4)$ valószínűség?

31. Létezik-e az $F(x) = x\ln x - x + 1,\ x \in [1,e]$ eloszlásfüggvényű valószínűségi változónak második momentuma?

32. Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{2x}{3e^2}, & \text{ha } 1 < x \leq 2 \end{cases},$$

egyébként pedig $f_X(x) = 0$. Mennyi $\mathbf{E}X$?

33. Egy szabályos pénzérmét addig dobok fel ismételten, amíg két fejet, vagy két írást nem kapok. Mennyi a dobások számának várható értéke és szórása?

34. Legyen $X \in E(0,1)$ és $Y = [X]$, azaz X egészrésze. Mennyi az Y diszkrét valószínűségi változó várható értéke és szórása?

35. Egy játékos rulettezik. Három tétet tesz meg: egy-egy 100 Ft-os zsetont tesz a fekete 13-as számra, a fekete mezőre és a páratlan mezőre. Ötször megismételve ezt a stratégiát, mennyi a játékos nyereségének (veszteségének) várható értéke? (A rulettárcsán 0-tól 36-ig állnak a számok, 18 fekete, 18 piros, a 0-ás zöld színű. A fekete számok között 9 db páros és 9 db páratlan van. Ha valaki számra tesz, a tétet és még annak 36-szorosát seperi be. A fekete vagy páratlan mezőkön a téten felül mégegyszer megkapja a feltett összeget. A 0-ra nem lehet fogadni. Ha 0-ás pörög ki, minden megrakott tétet a bank viszi el.).

36. A 32 lapos magyar kártyacsomagból visszatevés nélkül addig húzunk, amíg piros színű lapot nem kapunk. Ezután folytatjuk a lapok húzását addig, amíg ászt nem kapunk. Jelölje X a kihúzott lapok számát! (Ha az összes kártya elfogyott közben, akkor $X = 32$ lesz.) Adja meg a $\mathbf{P}(X = 3)$ valószínűséget!

37. Egy dobozban 1 piros, 2 fehér és 3 zöldszínű golyó van. Visszatevés nélkül addig húzunk, amíg mindhárom színből nincs már legalább egy golyónk. Jelölje X a szükséges húzások számát! Adja meg X eloszlását és várható értékét!

38. Az α paraméter melyik értékénél lesz sűrűségfüggvény az $f(x) = \alpha\left(2x - x^2\right),\ x \in (0,2)$? Adja meg az ehhez a sűrűségfüggvényhez tartozó eloszlásfüggvényt!

39. Egy óbudai kisvendéglőben az a szokás, hogy a fogyasztás után a vendéggel feldobatnak három kockát, és ha tripla hatost dob, elengedik a számlát. Mekkora egy-egy vendég esetén az üzlet várható vesztesége, ha a fogyasztást Y-nal lehet jellemezni Ft-ban, ahol $Y = X^2$ és $X \in N(30, 10)$?

40. Egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \begin{cases} A\cos\frac{x}{2} & , \text{ ha } \quad 0 < x < \pi \\ 0 & , \quad \text{különben} \end{cases}.$$

a.) $A = ?$
b.) Írja fel az F_X eloszlásfüggvényt!
c.) $\mathbf{P}\left(X > \frac{\pi}{2}\right) = ?$

41. Legyen $X \in U(0,1)$ és $Y = \mathrm{arctg}X$. Számolja ki Y sűrűségfüggvényét!

42. Eloszlásfüggvény-e az $F(x) = \exp(-e^{-x})$?

43. Egy kockával dobunk. Jelölje X a dobott számértéket! Adja meg, és rajzolja fel az $Y = (X-3)^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!

44. Legyen $X \in Po(3)$ és $Y = X(X-1)(X-2)$. Számolja ki Y várható-értékét!

45. Addig dobunk egy szabályos kockával, amíg 3-nál kisebb számot nem kapunk. Jelölje X az ehhez szükséges dobások számát! Melyik valószínűség a nagyobb: $\mathbf{P}(2 \leq X \leq 3)$ vagy $\mathbf{P}(X > 3)$?

46. Legyen $X \in E(1)$ és $Y = e^{-X}$. Számolja ki Y várható értékét és szórását!

47. Egy egységnyi oldalú szabályos háromszög kerületén véletlenszerűen kiválasztunk egy pontot. Jelölje X a pontnak a súlyponttól vett távolságát! Számolja ki a $\mathbf{P}(X \geq 0,5)$ valószínűséget!

48. Egy hipermarket két bejáratánál elhelyeztek 1000-1000 ingyenes hirdetési újságot. Minden vásárló ugyanakkora valószínűséggel vehet el egy lapot bármelyik kupacból. Amikor a két rakás egyikében elfogy az utolsó újság is, a másik bejáratnál még X példány található. Adja meg X eloszlását!

49. Legyen $X \in U(0,1)$ és $Y = \ln \frac{1}{X}$. Számolja ki $\mathbf{E}Y$-et és $\sigma^2 Y$-t!

50. Az egységnégyzetben véletlenszerűen kiválasztunk n pontot. Jelölje X azon pontok számát, melyek ezek közül beleesnek az $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ középpontú $\frac{1}{2}$ sugarú kör belsejébe is. Adja meg a $\mathbf{P}(X \leq 5)$ valószínűséget!

51. Legyen $X \in Po(2)$ és $Y = \left[\frac{X}{2}\right]$. Adja meg Y eloszlását!

52. A h paraméter milyen értékénél lesz sűrűségfüggvény $f(x) = \frac{4h^2}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2 \cdot h^2}$, $x > 0$?

53. Egy üzemben gyártott harisnyák között átlagosan minden ezredik selejtes. A harisnyákat kétszázasával dobozokba csomagolják. 1000 dobozt véletlenszerűen kiválasztva, jelölje X az egyetlen selejtes harisnyát sem tartalmazó dobozok számát! Adja meg X várható értékét és szórásnégyzetét!

54. Hányszor kell feldobnunk egy szabályos pénzérmét ahhoz, hogy a ,,fejek száma 40 és 50 közé esik” esemény valószínűsége maximális legyen?

55. Egy 32 lapos kártyából addig húzunk, amíg ászt nem kapunk. Jelölje X az eközben kihúzott hetesek számát. Számolja ki a $\mathbf{P}(X = 0)$ valószínűséget!

56. Egy dobozban három piros és két fehér golyó van. Visszatevéssel tízszer húzunk a dobozból. Jelölje X a pirosak számát! Adja meg a $Z = (X+2)(X-2)$ várható értékét!

57. Legyen $X, Y \in U(0,1)$ két független valószínűségi változó és $Z = \frac{X}{1+Y}$. Számolja ki a Z várható értékét!

58. Az egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán találomra választunk egy-egy pontot. Jelöljük X-szel a két pont távolságát! Adja meg az $F_X(x)$ eloszlásfüggvényt!

59. Egy réten három szarvas legelészik gyanútlanul. Egymásról nem tudva három vadász lopakodik a tisztáshoz, és egyszerre tüzelnek a vadakra. Mindegyik lövés talál, és halálos.
Mennyi a lövések után a rétről elszaladó szarvasok számának várható értéke és szórása? (Elvileg több vadász is lőhet ugyanabba a szarvasba...)

60. Legyen $X \in N(m, D)$ és $Z = \left(\frac{X-m}{D}\right)^2$. Számolja ki Z sűrűségfüggvényét!

61. Igazolja, hogy ha $X \in B(n, p)$, akkor $\mathbf{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) \leq \frac{1}{(n+1)p}$!

62. Legyen $X, Y \in U(0, 1)$ két független valószínűségi változó és $Z = \frac{X}{Y}$. Számolja ki a Z sűrűségfüggvényét!

63. Milyen c értékre lesz a következő függvény sűrűségfüggvény? Határozza meg azon változó várható értékét, amelynek ez a sűrűségfüggvénye.
$$f(x) = \begin{cases} ce^{|x|}, & \text{ha } x \in [-1, 2], \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

64. Egy normális eloszlású valószínűségi változó $0,2$ valószínűséggel vesz fel 10-nél kisebb értéket és $0,3$ valószínűséggel 14-nél nagyobb értéket. Mik az eloszlás paraméterei? ($\Phi(0,52) = 0,7$, $\Phi(0,84) = 0,8$).

65. Amerikában a hőmérsékletet Fahrenheit-fokokban mérik. Az egyik államban megállapították, hogy az ottani X hőmérséklet eloszlása nyaranta $N(86,\ 4)$. Hogyan változik meg az eloszlás, ha áttérünk a Celsius-skálára? (A Fahrenheit- és Celsius-skála között az átváltási képlet: $\frac{5}{9}(X-32)\ [^oF] = Y\ [^oC]$).

66. Az autók fogyasztását Amerikában mérföld/gallon-ban (*mpg*) fejezik ki, azaz megadják hány mérföldet tesz meg a gépjármű egy gallon üzemanyaggal. Európában, mint ismeretes a fogyasztást liter/100 km formában adják meg. Egy Fordról tudjuk, hogy az X *mpg* fogyasztását az $f(x)$ sűrűségfüggvény jellemzi. Hogyan kell transzformálnunk $f(x)$-et, ha áttérünk a liter/100 km skálára? (1 mérföld=a km, 1 gallon=b liter, ahol $a = 1,609$ és $b = 3,785$).

67. Adjuk meg a 90/5 lottón kihúzott öt szám közül a legkisebb eloszlásfüggvényének az értékét a 25 helyen.

68. Egy automata gép a beállítás szerint 2 kg lisztet adagol a zacskókba, de a technológia következtében a zacskóba került liszt mennyisége $N(m,\ 0,002)$ eloszlást követ. Előzetes megfigyelésekből lehet tudni, hogy $0,01$ annak a valószínűsége, hogy a zacskóban a liszt mennyisége kevesebb 2 kg-nál. $m =?$

69. Egy berendezés élettartama normális eloszlású $6,3$ év várható értékkel és 2 év szórással. Hány év garanciát adjunk, hogy $0,9$ legyen annak a valószínűsége, hogy a berendezés csak garanciális idő után hibásodik meg?

70. Három kockával dobva, mennyi a dobott számok maximumának várható értéke?

1. harmadik

1. Legyenek $X, Y \in G(p)$ függetlenek. Adja meg a $\mathbf{P}(X = Y)$ valószínűséget!

2. Egy autószerelő műhelybe érkezve, két autó van előttünk, az egyiket éppen szerelik. Feltételezve, hogy a szerelési idők egymástól független $E(2)$ eloszlású valószínűségi változók, mennyi a valószínűsége, hogy autónk szerelésére 1 (órán) belül sor kerül?

3. Legyenek $X, Y \in E(1)$ függetlenek. Bizonyítsa be, hogy $\min\{X, Y\} \in E(2)$ és hogy $\max\{X, Y\}$ eloszlása megegyezik $X + \frac{1}{2}Y$ eloszlásával!

4. A karácsonyfánkon 15 db egymással sorosan összekapcsolt színes égő világít. Az izzók élettartamai egymástól független, külön-külön exponenciális eloszlású valószínűségi változók, melyek várható értéke 30 óra. Amikor elalszik a fény, azonnal kicserélem a kiégett izzót. Adja meg az izzócserék közötti időtartam eloszlását!

5. A karácsonyfánkon 15 db egymással sorosan összekapcsolt színes égő világít. Az izzók élettartamai egymástól független, külön-külön exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Milyen kellene, hogy legyen az izzók élettartamának várható értéke ahhoz, hogy 100 órás üzemelés alatt 95%-os valószínűséggel ne kelljen izzót cserélnem?

6. Két kiváló Forma 1-es versenyző köridéje az időmérő edzésen egyaránt egyenletes eloszlású az $\left[1:21', 1:22'\right]$ időintervallumban. (Az óra ezred másodperc pontossággal tud mérni.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy azonos időt fognak menni egy adott körben? Nagyobb vagy kisebb ennél annak a valószínűsége, hogy ha mindegyiküknek két kísérlete van, akkor a két-két eredmény minimuma azonos?

7. Tegyük fel, hogy minden héten tízmillió szelvénnyel fogadnak. Mennyi annak a valószínűsége, hogy tíz héten keresztül nem lesz ötös találat?

8. Pincénkben 2 db párhuzamosan kapcsolt izzó világít. Az izzók élettartamai egymástól független, külön-külön exponenciális eloszlású valószínűségi változók, melyek várható értéke 6 hónap. Csak akkor szoktam izzót cserélni, ha már mindkettő kiégett. Vezesse le az izzócserék közti időtartam eloszlásfüggvényét!

9. Legyenek $X, Y \in N(0, 1)$ függetlenek, és $Z = |X + Y|$. Határozza meg Z sűrűségfüggvényét!

10. Legyenek $X, Y \in E(\lambda)$ függetlenek, és $Z = |X - Y|$. Határozza meg Z sűrűségfüggvényét!

11. Legyenek $X, Y \in E(\lambda)$ függetlenek, és $Z = X + \frac{1}{2}Y$. Határozza meg Z sűrűségfüggvényét! Mennyi a Z várható értéke és szórása?

12. Egy 32 lapos magyar kártyacsomagból kihúzunk visszatevés nélkül 10 lapot. Legyen X_p, X_z, X_t, X_m rendre a kihúzott piros, zöld, tök és makk színű lapok száma! Adja meg $(X_p, X_z, X_t, X_m)^T$ eloszlását! Mennyi a $\mathbf{P}(X_p < X_z)$ valószínűség?

13. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n \in E(\lambda)$ teljesen függetlenek. Határozza meg a $p_k = \mathbf{P}(X_1 + X_2 + \ldots + X_k \leq 1 < X_1 + X_2 + \ldots X_k + X_{k+1})$ valószínűséget! $(1 \leq k \leq n-1)$.

14. Az X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} a\left(x^2+xy+y^2\right), & \text{ha } 0<x,y<1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Mennyi az a értéke? Független-e X és Y?

15. Háromszor dobunk egy szabályos dobókockával. X a kapott hatosok száma, Y a kapott páros értékek száma. Adja meg X és Y együttes eloszlását, kovariancia mátrixukat. Független-e X és Y?

16. Írja fel két független valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvényét, ha az első standard normális, a második pedig $0,2$ paraméterű exponenciális eloszlású!

17. Ha a $\underline{v}=(X,Y)^T$ vektor egyenletes eloszlású az origó középpontú, egységnyi sugarú körlemezen, mi a sűrűségfüggvénye a vektor hosszának, $\|\underline{v}\|=\sqrt{X^2+Y^2}$−nek?

18. Ha $X,Y\in U(0,1)$, akkor mi az $(X+Y,X-Y)^T$ kétdimenziós valószínűségi változó várható érték vektora és kovarianciamátrixa?

19. Legyen az X és Y együttes eloszlásfüggvénye: $F_{X,Y}(x,y)=x^3y,\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1$. Mennyi a $\mathbf{P}(0,25\le X\le 0,75,\quad 0,25\le Y\le 0,5)$ valószínűség?

20. Határozza meg az origó középpontú 1 sugarú körlapon vett egyenletes eloszlás kovarianciamátrixát!

21. Legyen az $(X,Y)^T$ vektor valószínűségi változó sűrűségfüggvénye
$f(x,y)=\frac{1}{7}\left[6x^2y-12xy+6y+18x^2-36x+18\right], x\in[0,1], y\in[0,1]$.
Függetlenek-e a komponensek?

22. Két ember mindegyike addig dob fel egy-egy szabályos pénzérmét, amíg az első fej ki nem jön. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkettőnek ehhez ugyanannyi dobásra van szüksége?

23. Egy jól megkevert 32 lapos magyar kártyacsomagból leosztunk 8-at. Legyen $X=1$, ha a leosztott lapok között van piros, és $X=0$, ha nincs. Legyen továbbá $Y=1$, ha van a nyolc lap között ász, és $Y=0$ különben. Adja meg X és Y együttes eloszlását!

24. Két busz egymástól függetlenül X illetve Y idő alatt éri el a megállót, ahol én várakozom. Bármelyik busszal tudom az utamat folytatni. Mennyi a valószínűsége, hogy $t>0$ időn belül befut valamelyik, ha $X,Y\in E(\lambda)$ függetlenek?

25. Legyenek $X,Y\in U(0,1)$ függetlenek, $Z=\frac{X}{X+Y}$. Számolja ki Z sűrűségfüggvényét!

26. Legyen $X\in U(0,1)$. X segítségével generáljon az origó középpontú egységkör kerületén egyenletes eloszlású kétdimenziós véletlen pontot!

27. Egy műszerben egy bizonyos főegység átlagos élettartama 2 év, a beépített ellenőrző rendszeré pedig 3 év. A használat során egyik sem öregszik és egyikük tönkremenetele sem függ a másiktól. Mennyi a valószínűsége, hogy az ellenőrző rendszer előbb romlik el, mint a főegység? (Segítség: $X\in E\left(\frac{1}{2}\right)$ a főegység, $Y\in E\left(\frac{1}{3}\right)$ az ellenőrző egység élettartama, függetlenek. Mennyi $\mathbf{P}(Y<X)$?)

28. Legyen $X\in Po(0,5)$ és $Y\in Po(0,1)$ független. Mennyi a $\mathbf{P}(X+Y=2)$ valószínűség?

29. Legyen $X \in G(0,5)$ és $Y \in G(0,25)$ független. Mennyi a $\mathbf{P}(X+Y=k)$, $(k=2,3,4,...)$ valószínűség?

30. Számolja ki az $f_X(x)=1,\ x\in[0,1]$ és az $f_Y(y)=\frac{2y}{5},\ y\in[2,3]$ sűrűségfüggvények konvolúciós sűrűségfüggvényét, $f_{X+Y}(t)$-t!

31. Legyenek $X,Y\in U(0,1)$ függetlenek, $Z=2X-Y$. Számolja ki Z sűrűségfüggvényét!

32. Legyenek $X,Y\in U(0,1)$ függetlenek, $Z=X-Y$. Számolja ki Z eloszlásfüggvényét!

33. Bináris, ±1 értékű, egyformán valószínű szimbólumot küldünk át zajos csatornán, ahol a szimbólumhoz tőle független $f(z)=0,5(1-0,5|z|)$, $z\in(-2,2)$ sűrűségfüggvényű zaj adódik. Ha a csatorna kimenete pozitív, akkor 1 mellett, egyébként -1 mellett döntünk. Mennyi a hibás döntés valószínűsége?

34. Egy fogorvosi rendelőbe érkezve ketten vannak előttünk, az egyiknek éppen most kezdték el a kezelését. A fogorvos egy pácienssel 0,5 paraméterű exponenciális idő alatt végez. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egységnyi időn belül sorra kerülünk? Oldjuk meg a feladatot akkor is, ha párhuzamosan két orvos fogad egyszerre!

35. Egy berendezés X ideig működik hibamentesen, és Y idő kell a javításához, ahol $X\in E(\lambda)$ és $Y\in E(\mu)$ egymástól függetlenek. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a gépet egy $T>0$ időtartam alatt legalább kétszer kellett javítani?

36. Legyen $X\in N(5,2)$ és $Y\in N(4,3)$ független. Adja meg a $\mathbf{P}(X<Y)$ valószínűséget!

37. Az emberek testsúlyát $N(75,12)$ eloszlással modellezzük. Ha egy négyszemélyes lift 320 (kg)-os összteherbírású, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy egy négy fős csoport túlsúlyos lesz?

38. Egy üzemben két gép üzemel egymástól független X_1 és X_2 ideig, ahol $X_1,\ X_2\in E(0,2)$. A folyamatos gyártáshoz az egyik gép üzemeltetése is elegendő, a másik gép tartalék. Ha az éppen műszakban álló gép meghibásodik, azonnal a tartalékot állítják üzembe. Melegtartalék esetén a tartalékgép is állandóan be van kapcsolva, azaz ilyenkor a folyamatos működési idő $\max\{X_1,X_2\}$. A hidegtartalékolás esetén a tartalék gépet csak az üzembeállítás pillanatában kapcsolják be. Tehát ilyenkor a folyamatos üzemeltetési idő X_1+X_2 lesz. Határozza meg a folyamatos üzemeltetés idejének várható értékét meleg- és hidegtartalékolás esetén!

39. Legyen $X\in E(2)$. Határozza meg a $\mathbf{cov}\left(X,X^2\right)$ számot!

40. Legyenek $X_1,X_2,...,X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségű változók. Tegyük fel, hogy $\mathbf{P}(X_i>0)=1$. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{E}\left(\frac{X_1+X_2+...+X_k}{X_1+X_2+...+X_n}\right)=\frac{k}{n}$!

41. Legyen az X valószínűségi változó olyan, hogy $\mathbf{P}(X>0)=\alpha, \mathbf{P}(X<0)=\beta, \mathbf{E}X=a, \mathbf{E}|X|=b$. Számolja ki $\mathbf{cov}\left(X,\frac{|X|}{X}\right)$-t!

42. Legyenek $X_1,X_2,...,X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségű változók. $\mathbf{P}(X_i=1)=\mathbf{P}(X_i=-1)=\frac{1}{4}, \mathbf{P}(X_i=0)=\frac{1}{2}$ $(i=1,2,...,n)$. Számítsa ki az $Y=\sum_{i=1}^n X_i$ valószínűségű változó várható értékét és szórását!

43. Legyenek X és Y független valószínűségű változók. Bizonyítsa be, hogy $\sigma^2(XY) = \sigma^2 X \sigma^2 Y + (\mathbf{E}X)^2 \sigma^2 Y + (\mathbf{E}Y)^2 \sigma^2 X$.

44. Legyenek $X_1, X_2, ..., X_n \in U(0,1)$ teljesen függetlenek. Ezek kijelölnek $n+1$ db részintervallumot $(0,1)$-en. Jelölje Y_k a k-adik részintervallum hosszát $(k = 1, 2, ..., n+1)$. Mutassa meg, hogy $\mathbf{E}Y_k = \frac{1}{n+1}$!

45. Fodrásznál sorunkra várunk. Mekkora a valószínűsége, hogy az átlagosnál tovább várakozunk, ha a várakozási idő $E(2)$?

46. Legyenek $X_1, X_2, ..., X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségű változók, melyeknek létezik a várható értékük és szórásuk: $\mathbf{E}X_i = \mu, \sigma^2 X_i = d^2$. Fejezze ki μ és d függvényében a $\sigma^2\left(\sum_{i=1}^n i \cdot X_i\right)$ és $\mathbf{cov}\left(\sum_{i=1}^n i \cdot X_i, \sum_{i=1}^n X_i\right)$ mennyiségeket!

47. Három szabályos kockával dobunk. Jelölje Y a dobott értékek összegét. Adja meg $\mathbf{E}Y$-t és $\sigma^2 Y$-t!

48. Legyen $X \in N(0,1)$. Számolja ki $R\left(X, X^3\right)$-t!

49. Egy kalapban egy-egy cédulára fel vannak írva az $1, 2, 3$ számjegyek. Egymás után, visszatevés nélkül kiveszünk két cédulát. X az első, Y a második húzás eredménye. Adja meg $R(X, Y)$-t! Független-e X és Y?

50. Bizonyítsa be, hogy ha X és Y azonos szórású valószínűségi változók, akkor $X+Y$ és $X-Y$ korrelálatlanok!

51. Legyenek $X, Y \in N(0,1)$ függetlenek. $V = X+Y$ és $W = X-Y+1$. Adja meg a $(V, W)^T$ vektor kovarianciamátrixát!

52. Legyenek X, Y független valószínűségi változók, ahol $\mathbf{E}X = 4, \mathbf{E}Y = 0, \sigma^2 X = 1, \sigma^2 Y = 2$. Határozza meg az alábbi mennyiségeket: $\mathbf{E}(5X - 6Y)$, $\mathbf{E}XY$, $\sigma^2(5X - 6Y + 8)$, $\mathbf{cov}(5X, 6Y)$!

53. Ultizásnál a 32 lapos magyar kártyacsomagból kettőt talonba osztanak. Jelölje X a talonba került piros színű lapok, Y pedig az ászok számát! Számolja ki X és Y kovarianciáját!

54. Bizonyítsa be, hogy ha $\mathbf{E}X = \mathbf{E}X^3 = 0$, akkor X és X^2 korrelálatlanok!

55. Az X és Y együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 10x^2 y, & \text{ha } 0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Határozza meg adott $X = x$ feltétel esetén az Y feltételes sűrűségfüggvényét!

56. Legyen az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{5}\left(x^2 - xy + y^2\right), & \text{ha } x, y \in (0,1) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Számolja ki, az $f_{X|Y}(x \mid y)$ feltételes sűrűségfüggvényt! Számolja ki a kovarianciamátrixot és az $\mathbf{E}(X \mid Y = y)$ regressziós függvényt is!

57. Egy kétdimenziós valószínűségi változó első koordinátájának sűrűségfüggvénye $f_X(x) = 2x, 0 < x < 1$. Ha az első koordináta x, akkor ilyen feltétel mellett az Y második koordináta $1 + x$ paraméterű exponenciális eloszlást követ. Határozza meg annak valószínűségét, hogy a két koordináta összege kisebb, mint 1!

58. Dobjunk n-szer egy szabályos dobókockával. Jelölje X a hatosok, Y pedig a páros dobások számát. Számolja ki a $\mathbf{E}(Y \mid X)$ regressziót!

59. Legyen az X, Y együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi d^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2d^2}\right)$. Határozza meg a $Z = \max\{|X|, |Y|\}$ sűrűségfüggvényét!

60. Legyenek az $X, Y \in N(0, 1)$ független valószínűségi változók a $\underline{V}$ vektor komponensei! Adja meg a $\underline{V}$ vektor hosszának eloszlásfüggvényét!

61. Legyen $(X, Y)^T \in N_2\left(\binom{0}{0}, \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\right)$. Adja meg azt a lineáris transzformációt, amelynek eredményeképp a komponensek független standard normális eloszlásúak lesznek!

62. X és Y együttes eloszlása kétdimenziós normális $\underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^T$ várható érték vektorral és $\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$ kovariancia-mátrixszal. Fejezze ki az $\mathbf{E}(Y \mid X)$ regressziót $\underline{\mu}, \underline{\underline{\Sigma}}$ komponensei és X segítségével!

63. Legyenek $X, Y \in U(0, 1)$ függetlenek. Számolja ki $\mathbf{P}(3X < Y + 1)$-t!

64. Egy gabonaraktárban a búzát X kg-os zsákokba adagolják, ahol $X \in N(80, 5)$ eloszlást követ. Egy teherautóra 100 zsákot felraknak. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a zsákok összsúlya nem haladja meg a 10 tonnát?

65. Az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(u, v) = \frac{4}{3}\left(u^2 - uv + 2v^2\right), u, v \in (0, 1)$. Adja meg az $\mathbf{E}(X \mid Y)$ regressziót!

66. Legyenek $X_1, X_2, ..., X_n \in U(0, 1)$ teljesen függetlenek. Mennyi az $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ szórásnégyzete?

67. Legyenek $X, Y \in U(0, 1)$ függetlenek és $Z = e^{X+Y}$. Mennyi $\mathbf{E}Z$ és $\sigma^2 Z$?

68. Tapasztalatok szerint egy üres vagont X óra alatt lehet feltölteni szénnel és Y óra alatt bauxittal, ahol $X \in E(1)$ és $Y \in E(2)$. Két vagont kezdenek el egyszerre tölteni, az egyiket szénnel, a másikat bauxittal. Mennyi annak a valószínűsége, hogy előbb végeznek a szén berakásával, mint a bauxitéval?

69. Egyszerre feldobnak egy kockát és egy pénzdarabot. X a fejdobás, Y a hatosdobás indikátora. $Z = X^2 + Y^2$. Adja meg Z eloszlását és várható értékét!

70. Szabályos kockával dobunk. Egy dobozba a dobott értéknek megfelelő fehér golyót rakunk. Ezután a kiegészítjük a dobozban lévő golyók számát 10-re feketeszínű golyókkal. Ezután újra dobunk a kockával, és annyi golyót kiveszünk a dobozból visszatevés nélkül, ahányast kaptunk. Jelölje X a kivett golyók közt a fehérek, Y pedig a feketék számát! Számolja ki $\mathbf{P}(X = 3, Y = 3)$-t!

71. Legyenek $X_1, X_2, ..., X_n \in N(0, 1)$ teljesen függetlenek. Adja meg az $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ sűrűségfüggvényét!

72. Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek. X-et az $x-$tengelyre, Y-t az y-tengelyre felmérve, mekkora a keletkező téglalap területének várható értéke és szórásnégyzete?

73. Legyen $X \in E(1)$ és $Y \in N(0,1)$ független, $Z = X^2, W = 3X - Y$. Számolja ki $\mathbf{cov}(Z, W)$-t!

74. Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek. Számolja ki $\mathbf{P}\left(X + Y < 1,\ XY < \frac{2}{9}\right)$-t!

75. Legyenek $X, Y \in N(-5,\ 1)$ függetlenek. Számolja ki $\sigma(3X - Y)$-t!

76. Határozza meg az $f_{X|Y}(x \mid y)$ feltételes sűrűségfüggvényt, ha az együttes sűrűségfüggvény $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}\left(x^2 - xy + y^2\right)}$!

77. Legyen $X \in N(-4, 2), Y = 3X + 1, Z = X^2 - 1$. Számolja ki $\mathbf{cov}(Y, Z)$-t!

78. Háromszor dobunk egy szabályos kockával. X a legkisebb, Y a legnagyobb érték. Adja meg az $\mathbf{E}(X \mid Y = 3)$ feltételes várhatóértéket!

79. Legyenek $X, Y \in N(0,1)$ függetlenek. Mennyi a $\mathbf{P}(kX < Y)$ valószínűség, ahol $k \in \mathbb{N}$. (Az eredményt a standard normális eloszlásfüggvénnyel, Φ-vel fejezze ki!)

80. Legyenek $X, Y \in N(0,1)$ függetlenek és $Z = 3X + Y$. Számolja ki az $\mathbf{E}(Z \mid X)$ regressziót!

81. Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek. Mekkora valószínűséggel lehet az $a = X, b = 1 - X + Y$ és $c = 1 - Y$ véletlen szakaszokból háromszöget szerkeszteni?

82. Az X, Y valószínűségi változó pár együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(u,v) = 2\left(u^3 + v^3\right)$, ha $0 \le u, v \le 1$. Számolja ki $\mathbf{P}\left(X^2 < Y\right)$-t!

83. Az X, Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{v}}$, ha $0 < u < 1$ és $0 < v < u^2$. Számolja ki $\mathbf{P}(X + Y < 1)$-t!

84. Legyenek $X, Y \in Po(2)$ függetlenek. Számolja ki az $\mathbf{R}(X, X + Y - 1)$ korrelációs együtthatót!

85. Kétszer dobunk egy szabályos kockával. X az egyes, Y a hatos dobások száma. Legyen $Z = 3X + Y$ és $V = Y - X$. Számolja ki $\mathbf{cov}(Z, V)$-t!

86. Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek, és $Z = X \cdot Y$. Számolja ki Z sűrűségfüggvényét!

87. Addig dobunk egy szabályos kockával, amíg hatost nem kapunk. Jelölje X a dobások számát, Y pedig azt, hogy közben hányszor dobunk egyest. Adja meg az $\mathbf{E}(Y \mid X)$ regressziót!

88. Legyenek X és Y nulla várható értékű, szórással rendelkező, független valószínűségi változók. Igazolja, hogy $\sigma^2(X \cdot Y) = \sigma^2(X) \cdot \sigma^2(Y)$!

89. Legyen $X \in N(m, D), Y = 3X + 8, Z = 5 - 2X$. Számolja ki az $\mathbf{R}(Y, Z)$ korrelációs együtthatót!

90. Legyenek $X_1, X_2, ..., X_n \in U(0,1)$ teljesen függetlenek. Adja meg a $Z = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ eloszlásfüggvényét!

91. Legyen $X \in N(-4, 2)$ és $Y \in N(3, 1)$ független. Fejezze ki Φ segítségével a $\mathbf{P}(2X < Y)$ valószínűséget!

92. Az X és Y együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{v}}$, ha $0 < u < 1$ és $0 < v < u^2$. Adja meg a perem-sűrűségfüggvényeket! Független-e X és Y?

93. Egy játékos a következő két lottószelvénnyel játszik: 1, 13, 31, 49, 80 illetve 2, 13, 43, 49, 81. Jelölje X azt, hogy hány nyertes szelvénye van, Y pedig a nyeretlen szelvények számát. Számolja ki $\mathbf{R}(X - 1, Y + 1)$-t!

94. Legyenek $X, Y \in N(0, 1)$ függetlenek és $Z = \text{sign}(X) \cdot Y$. Számolja ki Z eloszlásfüggvényét!

95. Legyenek $X, Y \in N(0, 1)$ függetlenek, $U = 3X + 2Y$ és $V = 2X - Y$. Adja meg az $\mathbf{E}(U \mid V)$ feltételes valószínűséget!

96. Egy felhasználónak két szerveren is van e-mail címe. Az egyikre naponta X, a másikra Y üzenet érkezik egymástól függetlenül, ahol $X \in Po(3)$ és $Y \in Po(6)$. Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy nap legfeljebb két üzenet érkezik összesen?

97. Legyenek $X, Y \in U(0, 1)$ függetlenek, $Z = 2X + 1, V = 3Y$. Számolja ki a $\mathbf{P}(V < Z)$ valószínűséget!

98. Két kockával dobunk. X a dobott értékek minimuma, Y pedig a maximuma. Adja meg $\mathbf{cov}(X, 2Y + 1)$-et!

99. Legyen az X, Y együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(x, y) = \frac{4}{5}(x + y + xy)$, ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$. (Különben $f_{X,Y}(x, y) = 0$.) Adja meg az $\mathbf{E}(Y \mid X)$ regressziót.

100. Legyen X a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, $Y = \sin(2\pi X)$ és $Z = \cos(2\pi X)$. Számolja ki az $(Y, Z)^T$ pár kovarianciamátrixát!

101. Két azonos képességű atléta versenyt fut. Mindkettejük eredményét $m = 10,1$ és $\sigma = 0,1$ paraméterű normális eloszlással jellemezhetjük másodpercekben. Mennyi a valószínűsége, hogy az egyik versenyző legalább $0,2$ másodperccel legyőzi a másikat?

102. Legyen X a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, melyet kettes számrendszerben írunk fel: $X = 0, X_1 X_2 ...$, ahol X_1 és X_2 a diadikus tört első és második számjegye. Független-e X_1 és X_2 ?

103. Legyenek $X, Y \in N(0, 1)$ függetlenek és $Z = 3X + Y + 1$. Számolja ki az $\mathbf{E}(Z \mid X)$ regressziót!

104. Tíz kockával dobunk. X a hatosok, Y a hárommal oszthatók számát jelöli. Adja meg az $\mathbf{E}(Y \mid X)$ regressziót!

105. Tekintsük a 90/5 lottóhúzást! Jelölje X a 45-nél kisebb, Y pedig a hárommal osztható számok számát a kihúzottak között! Számolja ki $\mathbf{P}(X = 1, Y = 1)$-t!

106. Legyenek $X, Y \in E(1)$ függetlenek, $Z = Y^2 \text{tg} X - \frac{Y}{X}$. Számolja ki az $\mathbf{E}(Z \mid X)$ regressziót!

107. Legyenek $X, Y \in N(0, 1)$ függetlenek és $T = \min\{X, Y\}$ és $W = \max\{X, Y\}$. Számolja ki a T és W együttes sűrűségfüggvényét!

108. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges A, B eseményre $|\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \le \frac{1}{4}$ teljesül!

109. Két üzemet közös raktárból látnak el nyersanyaggal. Az első üzem havonta $X \in N(150, 10)$, a másik üzem pedig az elsőtől függetlenül $Y \in N(210, 15)$ mennyiségű nyersanyagot használ fel. Mennyi legyen a nyersanyag a hónap elején a raktárban, hogy az a hónap végéig 99%-os biztonsággal fedezze a két üzem szükségletét?$(\Phi(2,34) = 0,99)$.

110. Az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0,25\left(1 + xy\left(x^2 - y^2\right)\right), & |x| < 1, |y| < 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Számolja ki a vetületi sűrűségfüggvényeket! Független-e X és Y?

111. Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek, $Z_1 = XY$ és $Z_2 = X + Y$. Adja meg a $\underline{Z} = (Z_1, Z_2)^T$ vektor kovarianciamátrixát és várható érték-vektorát!

112. Egy pók által rakott peték száma $X \in Po(\lambda)$. Az egyes peték egymástól függetlenül p valószínűséggel pusztulnak el. Jelölje Y a kifejlődött peték számát. Adja meg Y eloszlását!

113. Az X, Y pár együttes sűrűségfüggvénye $f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{, ha } 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$. Számolja ki a peremsűrűségfüggvényeket! Független-e X és Y?

114. Két kockával dobunk. X a hatosok száma, Y pedig a dobott értékek minimuma. Számolja ki $\mathbf{R}(X,Y)$-t!

115. Az X, Y pár együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} 0,8\left(x^2 + xy + 2y^2\right), & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Számolja ki a $Z = 2X + Y$ sűrűségfüggvényét és várható értékét!

116. Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek. Számolja ki $\mathbf{P}\left(X^2 + Y^2 < 1 < 2X + Y\right)$-t!

117. Az X, Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} 6y^2, & \text{ha } |y| < 1, 0 < x < 1, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Mennyi a valószínűsége annak, hogy az (X, Y) pár az $A(0,0), B\left(\frac{1}{2}, 0\right), C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ csúcspontok által meghatározott háromszög belsejébe esik?

118. Két kockával dobunk. X az egyesek száma, Y a dobott összeg. Számolja ki $\mathbf{cov}(X,Y)$-t!

119. Az X, Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} 0,8\left(x^2 + xy + 2y^2\right), & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Számolja ki a $Z = \frac{X}{Y}$ várható értékét!

120. Egy dobozban 1 piros és 3 fehér golyó van. Visszatevéssel húzunk 50-szer. X jelentse a kihúzott pirosak számát az első 30, Y pedig az utolsó 30 húzás során. Határozza meg az X és Y korrelációs együtthatóját!

121. Az X valószínűségi változó az 1, 2, 3 értékeket rendre 0.2, 0.3, 0.5 valószínűséggel veszi fel, a tőle független Y pedig a 0, 2, 3 értékeket 0.25, 0.5, 0.25 valószínűséggel veszi fel. Határozza meg $X \cdot Y$ szórásnégyzetét!.

122. A $[0, 1]$ intervallumban jelöljünk ki találomra három pontot. Határozza meg a középpont abcisszájának eloszlásfüggvényét!

123. Egy szabályos pénzérmét addig dobálok, amíg *másodszorra* nem kapok *fejet*. Jelölje X a szükséges dobások számát. Adja meg X eloszlását, várható értékét és szórását!

A 4. feladatsor

$\boxed{\text{Kulcsszavak}}$: Markov- és Csebisev-egyenlőtlenség, karakterisztikus függvény, valószínűségi változók sorozatainak konvergenciái, nagy számok törvényei, centrális határeloszlás-tételek (Moivre-Laplace-tétel).

IV.1 Egy párt szimpatizánsai p valószínűséggel mennek el szavazni, amit nem ismerünk. A közvéleménykutatók p-t a megkérdezetteknek a pártot választók relatív gyakoriságával becsüli meg. Mekkora legyen a megkérdezettek n számú mintája, ha azt akarják elérni, hogy a becslés a tényleges p értéktől legfeljebb $0,001$-el térjen el $99,9\%$-os megbízhatósággal?

IV.2 Legalább hány megfigyelés kell ahhoz, hogy egy 5-nél nem nagyobb szórású valószínűségi változó értékeinek átlaga 95%-os valószínűséggel a várható érték 0,01 sugarú környezetébe essen?

IV.3 Egy szerencsejátékos megfigyeli, hogy átlagosan 63 kísérlet után nyer. legalább hányszor kell kísérleteznie, hogy 0,99 valószínűséggel nyerjen legalább egyszer?

IV.4 Egy mérés elvégzéséhez egy pontatlan eszközünk van, ahol a mérés hibája normális eloszlású. A mérést n-szer végezzük el, majd a mérési eredményeket átlagoljuk. Mekkora legyen a mérések száma, hogy legfeljebb 10^{-4} valószínűséggel térjen el az átlag a mérendő értéktől $0,1$-el?

IV.5 99%-os valószínűséggel szeretnénk garantálni, hogy 1000 pénzfeldobásból legalább n-szer fejet kapjunk. Hogyan válasszuk meg n-et, ha a fejdobás valószínűsége p?

IV.6 Adottak az $X_1, X_2, \cdots, X_{12} \in U(0,1)$ teljesen független véletlen számok. Ezek segítségével generáljunk $N(5,2)$ normális eloszlású véletlen számot!

IV.7 Jelölje az X valószínűségi változó karakterisztikus függvényét $f(t)$. Fejezzük ki az $Y = -X$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét $f(t)$-vel!

IV.8 Jelölje az X és Y független, azonos eloszlású valószínűségi változók közös karakterisztikus függvényét $f(t)$. Fejezzük ki az $X-Y$ és $\frac{X+Y}{2}$ valószínűségi változók karakterisztikus függvényeit $f(t)$-vel!

IV.9 Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n \in N(0,1)$ teljesen függetlenek, és $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Adjuk meg Y karakterisztikusfüggvényét!

IV.10 Adja meg a $Po(\lambda)$ diszkrét eloszlás karakterisztikus függvényét! Ezt felhasználva számolja ki a negyedik momentumot!

IV.11 Egy alkatrészgyárban microcheap-ek minőségét automatával ellenőrzik. 1000 termék megvizsgálása után azt találták, hogy 12 volt selejtes. Mekkora valószínűséggel állíthatják azt, hogy a többmilliós készletben a selejtarány nem éri el az 1%-ot?

IV.12 Legyenek $X_1, X_2, ..., X_n \in N(0,1)$ teljesen függetlenek! Adja meg az $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ karakterisztikus függvényét!

IV.13 Szkennellel kartonból digitális képet állítanak elő, amelyet diszken tárolnak. A konvertálás akkor selejtes, ha a digitális képen vizualizálásakor valamelyik adat nem olvasható. A digitalizálási munka megrendelőjének az az előírása, hogy a többmilliós állományban a selejtes konvertálások aránya ne érje el az 1%-ot legalább 95%-os biztonsággal. Milyen n-től áll fenn a $\mathbf{P}(r_n < 0,02) \geq 0,95$ reláció, ahol r_n jelöli a selejtarányt az n elemű mintában?($\Phi(1,63) = 0,95$).

IV.14 Egy focicsapat idegenbe megy játszani. A vendéglátó klub 500 jegyet küldött a csapat szurkolóinak. A klub sejtése szerint a jegyek 60%-ka után lesz érdeklődés. Hány 50 fős buszt rendeljenek, ha biztosítani akarják, hogy a jegyet vásárlók 90%-os valószínűséggel felférjenek a buszokra?

IV.15 Legyenek $X_1, X_2, ..., X_n, ... \in N(0,1)$ teljesen függetlenek. Tekintsük az $Y_1 = X_1^2, Y_2 = \frac{X_1^2+X_2^2}{2}, ..., Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2, ...$ valószínűségi változó sorozatot! Hová konvergál $\{Y_n\}$ 1-valószínűséggel?

IV.16 Egy nem szabályos kockán a hatos dobásának ismeretlen p valószínűségét keressük. Hány dobást kell elvégeznünk a kockával ahhoz, hogy a hatos dobás relatív gyakorisága p-t 0,05-nél kisebb eltéréssel közelítse legalább 0,9 valószínűséggel?

IV.17 Egy pályaudvaron az újságárus X lapot ad el óránként, ahol $X \in Po(64)$. A Csebisev-egyenlőtlenség segítségével becsülje meg alulról a $\mathbf{P}(48 < X < 80)$ valószínűséget!

IV.18 Legyenek $X_i \in N\left(i, \left(\frac{1}{3}\right)^i\right)$ teljesen függetlenek, és $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Számolja ki Y karakterisztikus függvényét!

IV.19 Egy társadalomkutató meg akarja becsülni az alkoholisták arányát a munkanélküliek között. Hány megfigyelést végezzen ahhoz, hogy a megfigyelésekből adódó arány a valódi aránytól 90%-os valószínűséggel legfeljebb 2%-kal térjen el?

IV.20 Ismételten dobunk egy szabályos kockával. X_n jelöli az n-edik dobás után az addigi hatosok számát. Hová, és milyen konvergencia szerint konvergál az $\frac{X_n}{n}$ sorozat?

IV.21 Tekintsük azt az X valószínűségi változót, aminek

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{ha} \quad |x| \leq 1 \\ 0 & \text{ha} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

a sűrűségfüggvénye. Adja meg a $\varphi_X(t)$ karakterisztikus függvényét!

IV.22 Egy termékhalmaz selejtarányának becsléséhez $n = 100$ elemű mintát vesznek. A minta selejtarányával becslik a teljes halmaz ismeretlen p selejtarányát. Mennyire valószínű az, hogy a becslés legfeljebb 1%-kal tér el a tényleges p értéktől?

IV.23 Egy 32 lapos magyar kártyacsomagból kiveszünk visszatevés nélkül 4 lapot. Jelölje X a kivett lapok közötti ászok számát! Adja meg X karakterisztikus függvényét!

IV.24 Feldobunk n-szer egy kockát. Jelölje X_n a dobott számok minimumát! Bizonyítsa be, hogy $X_n \stackrel{st}{\to} 1$!

IV.25 Feldobunk n-szer egy kockát. Jelölje X_n az n-edik dobás eredményét és legyen $Z_n = \frac{1}{3{,}5n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Igazolja, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_n < 1) = \frac{1}{2}$!

IV.26 Legyenek $X \in N(0,1)$ és $Y \in E(1)$ függetlenek, $Z = 3X - 1 + 2Y$. Számolja ki Z karakterisztikus függvényét!

IV.27 Legyen $X \in N(0,1)$. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}\left(X^2 \geq 5\right) \leq 0,2$!

IV.28 Legyen $X \in U(0,4)$ és $Z = (X-2)^2$. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(Z \geq 6) \leq \frac{2}{9}$!

IV.29 Egy szavazókörzetben összesen 20000 szavazásra jogosult állampolgár van. Minden szavazó $0,40$ valószínűséggel megy el szavazni, a többi választó szándékától függetlenül. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a szavazás érvényes lesz vagyis, hogy a szavazópolgárok legalább 40%-a részt fog venni a szavazáson?

IV.30 Egy termékbemutató szervezésekor $n = 1000$ meghívót küldenek szét. A tapasztalat szerint a meghívottak egymástól függetlenül $p = 0,1$ valószínűséggel fogadják el a meghívást és jelennek meg a rendezvényen. Mekkora teremben kell a rendezvényt megtartani, ha azt akarják, hogy a megjelentek mind le tudjanak ülni legalább 90%-os valószínűséggel? ($\Phi(1,3) = 0,9$).

IV.31 Egy dobozban 4 cédula van, rajtuk a -1, 0, 2, 2 számok. 192-ször húzunk visszatevéssel a dobozból. A centrális határeloszlás tétel alkalmazásával határozzuk meg annak valószínűségét, hogy a kihúzott számok összege legalább 90, de 180-nál kisebb.