Valószínűségszámítás zárthelyi
2016. április 1.

1. Igazolja, hogy tetszőleges A, B, C eseményekre $\mathbf{P}(A\backslash B\bar{C}) + \mathbf{P}(AC\backslash B) = \mathbf{P}(A\backslash B) + \mathbf{P}(AC)$!

Megoldás: baloldal: $\mathbf{P}(A\backslash B\bar{C}) + \mathbf{P}(AC\backslash B) = \mathbf{P}(A(\bar{B} + C)) + \mathbf{P}(AC\bar{B}) = \mathbf{P}(A\bar{B} + AC) + \mathbf{P}(AC\bar{B}) =$
$\mathbf{P}(A\bar{B}C) + \mathbf{P}(A\bar{B}\bar{C}) + \mathbf{P}(ABC) + \mathbf{P}(A\bar{B}C) - \mathbf{P}(A\bar{B}C) + \mathbf{P}(A\bar{B}C) =$
$= 2\mathbf{P}(A\bar{B}C) + \mathbf{P}(A\bar{B}\bar{C}) + \mathbf{P}(ABC)$
jobboldal: $\mathbf{P}(A\backslash B) + \mathbf{P}(AC) = \mathbf{P}(A\bar{B}) + \mathbf{P}(ABC) + \mathbf{P}(A\bar{B}C) =$
$= \mathbf{P}(A\bar{B}C) + \mathbf{P}(A\bar{B}\bar{C}) + \mathbf{P}(ABC) + \mathbf{P}(A\bar{B}C) =$
$= 2\mathbf{P}(A\bar{B}C) + +\mathbf{P}(A\bar{B}\bar{C}) + \mathbf{P}(ABC)$
Látható, hogy a két oldal egyenlő.

2. Az $[-1,1] \times [-1,1]$ négyzeten egymás után sorsolunk ki véletlen pontokat. Akkor állunk meg, amikor a második kisorsolt pont beleesik az origó középpontú egységkörbe. Jelölje X a kisorsolt pontok számát! Számolja ki X várható értékét!

Megoldás: Annak a valószínűsége, hogy a négyzetben kisorsolt pont az egységkörbe essék: $p = \frac{\pi}{4}$.
$X = Y_1 + Y_2$, ahol Y_1 és Y_2 $G(\frac{\pi}{4})$ eloszlású változók. $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y_1 + \mathbf{E}Y_2 = \frac{8}{\pi}$.

3. Egy 20×20-esnégyzetrácsos padlózatra véletlenül leejtünk 5 db 3 cm-es átmérőjű pénzérmét. A pénzérmék szanaszét gurulva megállnak. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 3 közülük teljesen valamelyik négyzetrács belsejében landol (azaz nincs takarásban semelyik négyzet semelyik oldalával sem)?

Megoldás: Annak valószínűsége, hogy egy érme középpontja egy négyzet belső 17×17-es négyzetébe essen (ekkor nem metsz oldalélt az érme) $p = \frac{289}{400}$ Az öt érme közül X esik belülre, $X \in B(5, p)$. A keresett valószínűség: $\mathbf{P}(X \geq 3) = \sum_{i=3}^{5} \binom{5}{i} p^i (1-p)^{5-i} = \sum_{i=3}^{5} \binom{5}{i} (\frac{289}{400})^i (1 - \frac{289}{400})^{5-i} \approx 0.86538$

4. Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, $f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi} e^{-\frac{(t+2)^2}{2\pi}}$.
a.) Standardizálja X-et!
b.) $\mathbf{P}(X > -2) = ?$
Megoldás: A sűrűségfüggvényből leolvasható, hogy $X \in N(-2, \sqrt{\pi})$.
a.) X standardizáltja: $\tilde{X} = \frac{X+2}{\sqrt{\pi}}$
b.) $\mathbf{P}(X > -2) = 1 - \Phi(0) = 0.5$

5. Legyen $X \in E(\frac{1}{10})$ és $Y = [X]$, azaz X egészrésze. Mennyi az Y diszkrét valószínűségi változó várható értéke és szórása?
Megoldás: $Y + 1 \in G(1 - e^{-0,1}) \Rightarrow \mathbf{E}(Y+1) = \frac{1}{1-e^{-0.1}} = 10.508 \Rightarrow \mathbf{E}Y = 9.508$
$\sigma^2(Y+1) = \sigma^2 Y = \frac{e^{-0.1}}{(1-e^{-0.1})^2} = 99.917$