ANALÍZIS 1. | **I. ZÁRTHELYI** | **2013. október 17.**
Mérnök informatikus szak | A csoport | Munkaidő: 90 perc

---

1. feladat (28 pont)
Határozza meg az alábbi határértékeket:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n+3}-\sqrt{n^2+3n-4}\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n+3^n n}{n!-\sqrt[n]{n^{99}}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(n^n+3^n n)}{n!-\sqrt[n]{n^{99}}}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^9+5n^2+3n}{n^7+n^4}}$

$$\sqrt{n^2-n+3}-\sqrt{n^2+3n-4}\overset{\mathbf{2p}}{=}\frac{n^2-n+3-(n^2+3n-4)}{\sqrt{n^2-n+3}+\sqrt{n^2+3n-4}}=$$

$$=\frac{-4n+7}{\sqrt{n^2-n+3}+\sqrt{n^2+3n-4}}\overset{\mathbf{2p}}{=}\frac{-4+\frac{7}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}}\overset{\mathbf{2p}}{\to}-\frac{4}{2}=-2$$

$$b)\quad \frac{n^n+3^n n}{n!-\sqrt[n]{n^{99}}}\overset{\mathbf{2p}}{=}\frac{n^n}{n!}\cdot\frac{1+3\frac{3^{n-1}}{n^{n-1}}}{1-\frac{\sqrt[n]{n^{99}}}{n!}}\overset{n\ge N}{>}\frac{1}{2}\cdot\frac{n^n}{n!}\to\infty,$$

a speciális rendőrelv értelmében, hiszen $n!\ll n^n$ (**2p**), és

$$\frac{1+3\frac{3^{n-1}}{n^{n-1}}}{1-\frac{\sqrt[n]{n^{99}}}{n!}}\overset{\mathbf{2p}}{\to}1,$$

vagyis létezik olyan $N\in\mathbb{N}$, hogy $n\ge N$ esetén

$$\frac{1+3\frac{3^{n-1}}{n^{n-1}}}{1-\frac{\sqrt[n]{n^{99}}}{n!}}\overset{\mathbf{2p}}{>}\frac{1}{2}.$$

c) $\sin(n^n+3^n n)$ korlátos (**2p**), $\frac{1}{n!-\sqrt[n]{n^{99}}}\overset{\mathbf{2p}}{\to}0$ vagyis

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n^n+3^n n)}{n!-\sqrt[n]{n^{99}}}\overset{\mathbf{2p}}{\to}0.$$

d) A rendőrelv értelmében

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2=\sqrt[n]{\frac{n^9}{n^7+n^7}}\overset{\mathbf{2p}}{\le}\sqrt[n]{\frac{n^9+5n^2+3n}{n^7+n^4}}\overset{\mathbf{2p}}{\le}\sqrt[n]{\frac{n^9+5n^9+3n^9}{n^7}}=\sqrt[n]{9}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2,$$

és az egyenlőtlenség mindkét oldalán álló sorozat 1-hez tart, hiszen $\sqrt[n]{n} \overset{\mathbf{1p}}{\to} 1$ és $p > 0$ esetén $\sqrt[n]{p} \overset{\mathbf{2p}}{\to} 1$, vagyis a rendőrelv értelmében a sorozat 1-hez tart (**2p**).

---

2. feladat (18 pont)

a) Adja meg a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ definícióját.

b) A definíció alapján lássa be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-3n^2}{4n^2-2} = -\dfrac{3}{4}$.

c) Konvergens-e az $a_n = \left(\dfrac{2-3n^2}{4n^2-2}\right)^n$ sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

---

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, ha $\forall\varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $|a_n - A| < \varepsilon$ ha $n \geq N(\varepsilon)$.

3 pont

b) Legyen $\varepsilon > 0$

$$\left|\frac{2-3n^2}{4n^2-2} + \frac{3}{4}\right| =_{\mathbf{2p}} \left|\frac{8-12n^2-6+12n^2}{16n^2-8}\right| \overset{n\geq 2}{=}_{\mathbf{4p}} \frac{2}{16n^2-8} < \varepsilon,$$

ha $n > N(\varepsilon) =_{\mathbf{2p}} \max\left(2, \left[\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}+8}\right]\right)$

c) A b) pont alapján létezik $N\left(\frac{1}{8}\right) \in \mathbb{N}$, hogy $n > N\left(\frac{1}{8}\right) \in \mathbb{N}$ esetén $\left|\dfrac{2-3n^2}{4n^2-2}\right| \leq \dfrac{7}{8}$ (**3 pont**), így $0 \leq |a_n| \leq \left(\dfrac{7}{8}\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (**2 pont**), (a_n) konvergens, és határértéke 0. (**2 pont**)

---

3. feladat (16 pont)

Legyen $a_1 = 4$, és $n = 1, 2, ...$ esetén $a_{n+1} = 9 - \dfrac{14}{a_n}$.

a) Igazolja, hogy $n = 1, 2, \ldots$ esetén $2 < a_n < 7$.

b) Bizonyítsa be, hogy az (a_n) sorozat monoton.

c) Konvergens-e az (a_n) sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

---

a) Teljes indukcióval bizonyítunk: $2 < a_1 = 4 < 7$ (**2p**), és

$$2 < a_n < 7 \quad \overset{\mathbf{1p}}{\Longrightarrow} \frac{1}{2} > \frac{1}{a_n} > \frac{1}{7} \overset{\mathbf{1p}}{\Longrightarrow} -7 = -\frac{14}{2} < -\frac{14}{a_n} < -\frac{14}{7} = -2$$

$$\overset{\mathbf{1p}}{\Longrightarrow} 2 = 9 - 7 < 9 - \frac{14}{a_n} = a_{n+1} < 9 - 2 = 7$$

b) Teljes indukcióval bizonyítunk: $a_1 = 4 < 5,5 = a_2$ (**2p**), és

$$a_n < a_{n+1} \quad \overset{\mathbf{1p}}{\Longrightarrow} \frac{1}{a_n} > \frac{1}{a_{n+1}} \overset{\mathbf{1p}}{\Longrightarrow} -\frac{14}{a_n} < -\frac{14}{a_{n+1}} \Longrightarrow$$

$$\overset{\mathbf{1p}}{\Longrightarrow} a_{n+1} = 9 - \frac{14}{a_n} = 9 - \frac{14}{a_{n+1}} = a_{n+2}$$

c) A sorozat monoton növő, és felülről korlátos, tehát konvergens (és a szuprámumához tart) (**2p**). Ekkor

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 9 - \frac{14}{a_n} = 9 - \frac{14}{A}, \qquad (\mathbf{2}\text{p})$$

vagyis a határérték kielégíti a $0 = A^2 - 9A + 14 = (A-2)(A-7)$ egyenletet, így $A = 2$, vagy $A = 7$, és $a_n \leq A$, így $\lim_{n\to\infty} a_n = 7$. (**2p**)

---

4. feladat (10 pont)

Adja meg az

$$a_n = \left(\frac{3-3n^2}{2+3n^2}\right)^{n^2}$$

sorozat torlódási pontjainak halmazát, limesz inferiorját, illetve limesz szuperiorját. Konvergens-e a sorozat?

$$a_n \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{\left(\frac{1}{n^2}-1\right)^{n^2}}{\left(\frac{2}{3n^2}+1\right)^{n^2}} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{(-1)^{n^2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{\frac{2}{3}}{n^2}\right)^{n^2}} \overset{\mathbf{2p}}{\to} \begin{cases} \frac{e^{-1}}{e^{\frac{2}{3}}} & \text{ha } n \text{ páros} \\ -\frac{e^{-1}}{e^{\frac{2}{3}}} & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

így a torlódási pontok halmaza: $\left\{-e^{-\frac{5}{3}}, e^{-\frac{5}{3}}\right\}$ (**1 p**), és

$$\liminf a_n \overset{\mathbf{1p}}{=} -e^{-\frac{5}{3}} \neq e^{-\frac{5}{3}} \overset{\mathbf{1p}}{=} \limsup a_n,$$

tehát a sorozat nem konvergens. (**1p**).

---

5. feladat (14 pont)
a) Ismertesse a numerikus sorokra vonatkozó majoráns-kritériumot.
b) Igazolja, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n^2}$ sor konvergens.

---

a) Ha $0 \leq a_n \leq b_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is konvergens.(**3p**)

b) $\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n^2} \overset{\mathbf{2p}}{=} \left(\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n}\right)^{n} \overset{\mathbf{2p}}{\leq} \left(\frac{1}{e^3}+\varepsilon\right)^{n}$, $\varepsilon > 0$ esetén, ha $n \geq N(\varepsilon)$, mert $\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n} \to \frac{1}{e^3}$ (**2p**), és $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^3}+\varepsilon\right)^{n}$ egy konvergens mértani sor (**2p**), ha $\frac{1}{e^3}+\varepsilon < 1$ (**1p**), tehát a majoráns-kritérium alapján a sor konvergens. (**2p**)

---

6. feladat (14 pont)
Abszolút illetve feltételesen konvergens-e az alábbi sor

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{n^3-n}?$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3-n}$ a minoráns kritérium alapján divergens, hiszen $\frac{n^2+1}{n^3-n} \geq \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$, tehát a sor nem abszolút konvergens. (**5p**) Másrészt

$$0 < \frac{n^2+1}{n^3-n} = \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{1}{n^2}} \to 0, \qquad (\mathbf{2p})$$

és

$$\begin{aligned} \frac{n^2+1}{n^3-n} > \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^3-n} &\overset{\mathbf{1p}}{\Longleftarrow} (n^2+1)(n^3+3n^2+2n+1) > (n^3-n)(n^2+2n+2) \\ &\overset{\mathbf{2p}}{\Longleftarrow} n^5+3n^4+3n^3+4n^2+2n+1 > n^5+2n^4+n^3-2n^2-2n \\ &\overset{\mathbf{1p}}{\Longleftarrow} n^4+2n^3+6n^2+4n+1 > 0, \end{aligned}$$

tehát a sor Leibniz, így konvergens, tehát feltételesen konvergens. (**3p**)