

Név:

Neptun kód:

--	--	--	--	--	--

1.	2.	3.	4.	5.	6.	Σ

1. feladat (16 pont)

Adjuk meg a

$$x \mapsto y(x)? \quad y' = \frac{y^2 + y - 2}{x^2 + 2x + 2}$$

diffegyenlet összes megoldását. A megoldásfüggvényeket elég implicit alakban megadni.

2. feladat (14 pont)

Az

$$y_a(x) = \sin(x) \left(\sin(x) + \cos(x) \right) + \cos(x)^2$$

formulával megadott függvény megoldása egy bizonyos 3-ad fokú, állandó együtthatós, homogén lineáris diffegyenletnek. Adjuk meg ugyanennek a differenciálgyenletnek azon $x \mapsto y(x)$ megoldását, amelyre $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ és $y''(0) = 4$.

3. feladat (17 pont)

Tekintsük a következő diffegyenletet:

$$x \mapsto y(x)? \quad y' = \frac{\ln(1 + y^2)}{x} \quad (x \neq 0).$$

- Találjunk legalább egy megoldást az $x > 0$ tartományon!
- Tegyük föl, hogy $x \mapsto y(x)$ egy (nem feltétlenül az a) pontban megadott) megoldása a fenti egyenletnek. Fejezzük ki y'' -t mint y és x függvényét!
- Találjunk olyan $c \neq 0$ értéket, hogy az $y(1) = c$ kezdetifeltételhez tartozó megoldásnak biztosan ne legyen inflexiós pontja.

4. feladat (17 pont)

Adjuk meg a

$$x \mapsto y(x)? \quad xy' = \frac{e^{x^2}}{x^2 + 1} + 2x^2y, \quad y(-1) = e$$

Cauchy-probléma megoldását az $x < 0$ tartományon!

5. feladat (18 pont)

Határozzuk meg az x -re vonatkozó x_0 bázis-pontot és R konvergencia-sugarat az

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n-5}{n+3} \right)^{n^2} x^{2n} \quad \text{és} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (3x+1)^n$$

hatványsorok esetében!

6. feladat (18 pont)

Számoljuk ki a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!(n+2)}$$

sor értékét! (Segítség: először vizsgáljuk az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{(n+2)}/(n!(n+2))$ hatványsort, és állapítsuk meg az összegképletét!)