1. feladat (15 pont)
Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását, és az $y(0) = -1$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást:

$$y' - 4\,y\,\mathrm{ch}\,x = 4x^3\,\mathrm{e}^{4\,\mathrm{sh}\,x}$$

Mo. (H) $y' - 4\,y\,\mathrm{ch}\,x = 0 \quad \ldots \quad y_H = C\,\mathrm{e}^{4\,\mathrm{sh}\,x}, \quad C \in \mathbb{R}$ **(5p)**

(I) $y_{ip} = c(x)\,\mathrm{e}^{4\,\mathrm{sh}\,x} \quad \ldots \quad c(x) = x^4$ **(5p)**

$\Longrightarrow \quad y_{iá} = y_H + y_{ip} = C\,\mathrm{e}^{4\,\mathrm{sh}\,x} + x^4\,\mathrm{e}^{4\,\mathrm{sh}\,x}$ **(2p)**
$-1 = C + 0 \quad \Longrightarrow \quad C = -1.$ **(3p)**

---

2. feladat (17 pont)
Vezessan be az $u = \dfrac{y}{x}$ új változót az alábbi differenciálegyenletbe, majd határozza meg az általános megoldást! (Elég az implicit alak.)

$$y' = \frac{y^2 + 4xy - 3x^2}{xy + 4x^2}$$

Mo. $u'x + u = y'$. **(3p)** Behelyettesítve: $u'x + u = \dfrac{u^2 + 4u - 3}{u + 4}$ **(4p)** , vagyis

$$u' = \frac{-3}{x} \cdot \frac{1}{u+4}, \qquad \textbf{(3p)}$$

aminek általános megoldása

$$\frac{(u+4)^2}{2} = -3\ln|x| + c, \qquad \textbf{(5p)}$$

vagyis az eredeti differenciálegyenlet megoldása:

$$\frac{\left(\frac{y}{x} + 4\right)^2}{2} = -3\ln|x| + c. \qquad \textbf{(2p)}$$

3. feladat (22 pont)
Adja meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y''' - 2y'' + 10y' = 10\mathrm{e}^{2x} - 4x$$

Mo. A $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 10\lambda = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei $0, 1 \pm 3i$ **(3p)** , tehát $y_h = c_1 + e^x(c_2\cos(3x) + c_3\sin(3x))$ **(4p)** . Az inhomogén egyenlet megoldásait $y_{ip} = Ae^{2x} + (Bx + C)x$ **(3p)** alakban keressük. Ekkor

$$\begin{array}{r|l} 10\cdot & y'_{ip} := 2Ae^{2x} + 2Bx + C \\ -2\cdot & y''_{ip} = 4Ae^{2x} + 2B \\ 1\cdot & y'''_{ip} = 8Ae^{2x} \end{array} \qquad \textbf{(5p)}$$

$20A = 10$, $20B = -4$, $-4B + 10C = 0$, tehát $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{5}, C = -\frac{2}{25}$ **(4p)** , így az általános megoldás:

$$y = y_{ip} + y_h = \frac{e^{2x}}{2} - \frac{x^2}{5} - \frac{2x}{25} + c_1 + e^x(c_2\cos(3x) + c_3\sin(3x)) \qquad \textbf{(3p)}$$

---

4. feladat (14 pont)
Van-e olyan megoldása az $f(n+2) = \frac{8}{3}f(n+1) + f(n)$ lineáris rekurziónak, amelyre a $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ numerikus sor abszolút konvergens? Adja meg azt a megoldást, amelyre $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = 2$.

Mo. A lineáris rekurziós általános megoldása: $0 = q^{n+2} - \frac{8}{3}q^{n+1} - q^n = q^n(q^2 - \frac{8}{3}q - 1)$ egyenlet gyökei $q_1 = 3$, $q_2 = -\frac{1}{3}$ **(3p)** , tehát $f(n) = c_1 3^n + c_2\left(-\frac{1}{3}\right)^n$. **(2p)** . $\sum f(n)$ konvergens, ha $c_1 = 0$, **(2p)** , és ekkor abszolútértéke $\frac{1}{3}$ hányadosú geoetriai sor, így a sor abszolút konvergens. **(2p)** .

$$2 = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = c_2 \cdot \frac{-\frac{1}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{c_2}{4} \quad \textbf{(4p)},$$

tehát $c_2 = -8$ **(1p)** .

5. feladat (5+19+8=32 pont)
a) Ismertesse a hányadoskritérium valamelyik alakját!
b) Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, adjon becslést az $s \approx s_{99}$ közelítés hibájára!

$$b1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+4}}{(n+2)\, 5^{n+3}} \qquad\qquad b2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-3}{5n^3+2n}$$

Mo. a) Tétel kimondása. **(5p)**
*b*1) Hányadoskritériummal **(2p)** :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\ 4^{n+5}\ 5^{n+3}}{5^{n+4}\ (n+3)\ 4^{n+4}} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{4}{5}\ \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{4}{5} < 1$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergens } \mathbf{(3p)}$$

Mivel $\dfrac{4^{n+4}}{(n+2)\ 5^{n+3}} \overset{(\mathbf{2p})}{\le} \dfrac{4^{n+4}}{5^{n+3}}$, így

$$|s - s_{99}| \overset{(\mathbf{2p})}{=} \sum_{n=100}^{\infty} \frac{4^{n+4}}{(n+2)5^{n+3}} \overset{(\mathbf{2p})}{\le} \sum_{n=100}^{\infty} \frac{4^{n+4}}{5^{n+3}} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{\frac{4^{104}}{5^{103}}}{1-\frac{4}{5}}$$

*b*2) Minoráns kritériummal **(2p)** $\dfrac{4n^2-3}{5n^3+2n} \overset{(\mathbf{2p})}{\ge} \dfrac{n^2}{5n^3+2n^3} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \dfrac{1}{7n}$, és $\sum \dfrac{1}{n}$ divergens, tehát a sor divergens. **(2p)**

IMSC feladat (8 IMSC pont) Egy fa növekedésének sebessége arányos a maximális elérhető magasságának (H) és pillanatnyi magasságának különbségével. Tegyük fel, hogy egy tölgyfa legfeljebb 45 méter magasra nő és 10 évesen 5 méter magas. Hány évesen éri el a 30 méteres magasságot? (A fa méretét ültetésének pillanatában vehetjük nullának.)

Mo. Legyen $h(t)$ a fa magassága az ültetéstől számított t idő elteltével, a feladatban szereplő konstansok pedig legyenek $H = 45\,\text{m}$, $t_1 = 10\,\text{év}$, $h_1 = 5\,\text{m}$, $h_2 = h(t_2) = 30\,\text{m}$, ahol t_2 a kérdés.

A feladat szövege alapján a keresett $h(t)$ függvény a

$$\dot{h}(t) = \lambda\big(H - h(t)\big) \qquad (\mathbf{2p})$$

differenciálegyneletet elégíti ki. A differenciálegyenlet elsőrendű, állandó együtthatós, inhomogén egyenlet, melynek megoldása:

$$h_{\mathrm{H,\acute{a}lt}}(t) = Ae^{-\lambda t}, \qquad h_{\mathrm{I,part}}(t) = H, \qquad h_{\mathrm{I,\acute{a}lt}}(t) = Ae^{-\lambda t} + H. \qquad (\mathbf{2p})$$

A $h(0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} h(t) = H$ feltételeket kielégítő megoldás: $h(t) = H(1 - e^{-\lambda t})$ **(1p)** .

A $h(t_1) = h_1$ feltételből kapjuk, hogy $\lambda = -\frac{\ln\frac{H-h_1}{H}}{t_1} = \frac{\ln(9/8)}{t_1}$, ahonnan

$$h(t) = H\left(1 - (8/9)^{t/t_1}\right), \qquad (\mathbf{2p})$$

és a $h(t_2) = h_2$ egyenlet megoldása:

$$t_2 = t_1 \frac{\ln\big((H - h_2)/H\big)}{\ln(8/9)} = t_1 \frac{\ln(3)}{\ln(9/8)} = 93{,}3\,\text{év}. \qquad (\mathbf{1p})$$