Zárthelyi dolgozat

1. Az A, B és C eseményekről tudjuk, hogy legalább az egyikük mindig bekövetkezik, továbbá A és B függetlenek, B és C pedig egymást kizáróak. Határozzuk meg a fenti események valószínűségét, ha $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(C \mid A \cup C) = \frac{3}{4}$, valamint $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{12}$ is teljesül!

2. Aladár és Bea kártyáznak. Először Aladár húz két lapot egy megkevert magyarkártya-pakliból, majd ezután (a kihúzott lapok ismerete nélkül) Bea húz egy lapot Aladár kezéből.
(a) Mennyi a valószínűsége, hogy Beánál piros színű lap van?
(b) Mennyi a valószínűsége, hogy az Aladárnál maradt 1 darab lap is piros, feltéve, hogy Beánál piros színű lap van? (Egy magyarkártya-pakliban 32 lap van, melyekből pontosan 8 piros.)

3. Válasszunk egy-egy számot egymástól függetlenül véletlenszerűen a $[0, 2]$ és $[0, 4]$ intervallumon. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az összegük 3 és 5 közé esik?

4. Sándor egy n hosszú bitsorozatot szeretne elküldeni Tamásnak, de tudják, hogy a csatornán, amin kommunikálnak, minden átküldött bit egymástól függetlenül 1% valószínűséggel meghibásodik, azaz egy elküldött 1-esből 0, míg egy elküldött 0-ból 1 lesz. Erre a problémára azt az egyszerű megoldást találják ki, hogy Sándor minden egyes bitet egymás után háromszor megismétel, majd megy tovább a következő bitre (és így végeredményben egy $3n$ hosszú sorozatot küld), Tamás pedig az egymás utáni hármas blokkokból úgy dekódolja az üzenetet, hogy minden bithez tartozó hármasból a többször szereplő értéket veszi jónak (azaz ha például az 101 hármast kapja, akkor ezt 1-es értéknek veszi).
Milyen hosszú lehet legfeljebb az elküldött eredeti üzenet (azaz maximum mekkora lehet n értéke), ha azt szeretnék, hogy az Tamáshoz legalább 99% valószínűséggel hibátlanul jusson el?

5. Tekintsük az
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{9}, & \text{ha } x \in (1; c) \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$
hozzárendeléssel megadott függvényt, ahol $c > 1$ egy valós paraméter.
(a) Határozzuk meg a c értékét úgy, hogy a fenti függvény egy folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye legyen!
(b) Legyen X egy olyan valószínűségi változó, amelynek $f(x)$ a sűrűségfüggvénye. Mennyi X várható értéke?

6.* Legyen X egyenletes eloszlású a $[0, 2]$ intervallumon és $Y = \frac{1}{(1+X)^2}$.
(a) Adjuk meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét!
(b) Hasonlítsuk össze a $\mathbb{P}\left(Y < \frac{1}{(1+\mathbb{E}\,X)^2}\right)$ és a $\mathbb{P}\left(Y < \mathbb{E}\,Y\right)$ valószínűségeket!

Tudnivalók: A zárthelyi időtartama 90 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

Eloszlás neve	Jelölés	$\mathrm{Ran}(X)$	$\mathbb{P}(X=k)$ vagy $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0,1\}$	$p,\ 1-p$		p
binomiális	$\mathrm{B}(n;p)$	$\{0,1,...,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$		np
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\{0,1,...\}$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$		λ
geometriai	$\mathrm{Geo}(p)$	$\{1,2,...\}$	$(1-p)^{k-1}p$		$\frac{1}{p}$
egyenletes	$\mathrm{U}(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$
exponenciális	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$1-e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$