7. Gyakorlat

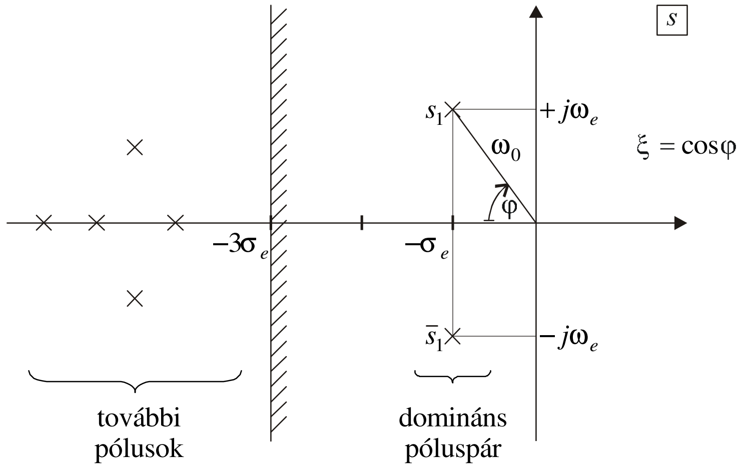
7. Tantermi gyakorlat – Identifikációs algoritmusok

A korábbi gyakorlatok során a szabályozási körben a szakasz árvitelét a legtöbbször adottnak tételeztük fel, vagy fizikai modellje alapján kaptuk meg. Ez nem minden esetben lehetséges, a szabályozandó szakasz modelljét gyakran mérések alapján kell azonosítanunk. A szakaszok identifikációjának igen kiterjedt szakirodalma van, itt a mintavételes, lineáris, időinvariáns és zajjal terhelt modellek azonosításával foglalkozunk. A tantermi gyakorlatot egy demonstráció egészíti ki, ahol a Matlab Real-time Workshop, a Matlab Identifikációs toolbox és egyes dSPACE (http://www.dspace.de/), illetve Quanser (http://www.quanser.com) hardvereszközök használatát mutatjuk be. Ezek az eszközök együttesen egy ún. gyors prototípustervezést lehetővé tevő környezetet biztosítanak a szabályozástechnikai fejlesztései feladatokat ellátó mérnökök számára. A demonstráció végigköveti azt az utat, amelyet a szabályozástechnikai hardver megvalósítása és kifejlesztése után a mérnök végez: adatgyűjtés a folyamaton, a folyamat modelljének meghatározása, a szabályozási algoritmus kifejlesztése és szoftveres megvalósítása, a szabályozási rendszer végső tesztelése és értékelése. Hasonló feladatot a hallgatók későbbi laborgyakorlatokon maguk is elvégeznek, így ez a tantermi gyakorlat a későbbi, hasonló témájú mérések sikeres elvégzését is segíti.

Szabályozási körök dinamikus minőségi jellemzői (ismétlés)

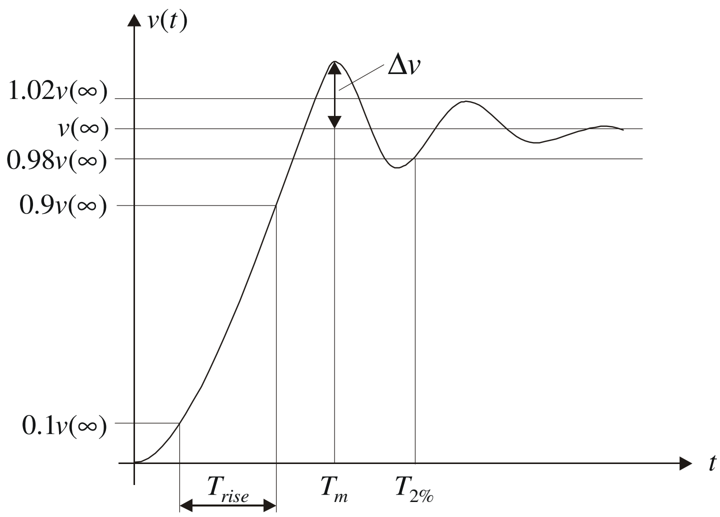
Egy stabilis (s-ben a bal félsíkon lévő) pólushoz tartozó tranziens annál lassabban cseng le, minél közelebb van a pólus valós része nullához. A *zárt szabályozási kör* átviteli függvényének nullához legközelebbi pólusát vagy konjugált komplex póluspárját a zárt rendszer *domináns póluspárjának* nevezzük. Mivel a rendszer gyorsítása és a túllövés csökkentése (a stabilitási tartalék növelése) általában ellentétes követelmények, ezért a tervező a legtöbb szabályozásnál a zárt rendszer számára a két követelmény mérlegelésével valamilyen kompromisszumot választ.

Ökölszabályként elfogadható, hogy ha a többi pólus a domináns konjugált komplex póluspártól balra úgy helyezkedik el, hogy valós részének abszolút értéke legalább háromszor nagyobb a domináns póluspár valós részének abszolút értékénél, akkor a zárt rendszer átmeneti függvényének első maximuma helyén a többi pólus tranziense már lecseng, ezért a dinamikus minőségi jellemzőket a domináns póluspár határozza meg. Mivel a konjugált komplex póluspár kéttárolós lengő tagnak felel meg, ezért a zárt szabályozási kör jól közelíthető kéttárolós lengő taggal. A zárt rendszer pólusainak tipikus elhelyezkedését mutatja a *7.1. ábra*.



7.1. ábra. A zárt szabályozási kör pólusainak tipikus elhelyezkedése

Egy tipikus szabályozási kör tranzienst, a zárt szabályozási kör átmeneti függvényét mutatja az *7.2. ábra*.



7.2. ábra. Szabályozások dinamikus minőségi jellemzői

Az ábra alapján a maradó szabályozási eltérés vagy *statikus hiba* $1 - v(\infty)$. A *dinamikus minőségi jellemzők* a túllövés $\Delta v = [v(T_m) - v(\infty)] / v(\infty)$, az első maximumig terjedő idő T_m, a szabályozási idő $T_{2\%}$ és a felfutási idő T_{rise}. A dinamikus minőségi jellemzők szoros kapcsolatban állnak a zárt rendszer domináns pólus-párjával, amelyet az ω_0 csillapítatlan sajátfrekvenciával és a ξ csillapítással jellemzünk.

A zárt szabályozási kör dinamikus minőségi jellemzői a kéttárolós lengő tagra ismert összefüggésekből számíthatók (az összefüggések az első tantermi gyakorlat anyagában is szerepeltek). Például nulla statikus hiba esetén:

$$v(t) = 1 - \frac{\omega_0}{\omega_e}\exp(-\sigma_e t)\sin(\omega_e t + \varphi) =$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\exp(-\xi\omega_0 t)\sin(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t + \arccos\xi)$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\xi^2} = -\sigma_e \pm j\omega_e,$$

$$\Delta v = \exp(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}),$$

$$T_m = \frac{\pi}{\omega_e} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}},$$

$$T_{2\%} = \frac{\ln 50}{\sigma_e} \approx \frac{4}{\sigma_e} \quad \text{és} \quad T_{5\%} = \frac{\ln 20}{\sigma_e} \approx \frac{3}{\sigma_e}.$$

A megengedett Δv túllövésből (túllendülésből) meghatározható a domináns konjugált komplex póluspár ξ -je. Mivel arra törekszünk, hogy a zárt rendszer minél jobban közelítse a $W_{\text{zárt}}(s) \approx 1$ átviteli függvényt annak érdekében, hogy a szabályozott jellemző minél kisebb hibával kövesse az alapjelet, ezért a zárt rendszer határfrekvenciája (és a felnyitott kör azzal jól megegyező ω_c vágási frekvenciája) kb. azonos a zárt rendszert közelítő kéttárolós lengő tag $\omega_0 = 1/T$ törésfrekvenciájával. A zárt rendszer tranziensének gyorsaságát befolyásoló $\omega_h \approx \omega_c$ határfrekvenciából ezért meghatározható a domináns póluspár ω_0 -ja. Világos azonban, hogy ha például a szakasz átmeneti függvényéből identifikáltuk a szakasz modelljét és határoztuk meg a szakasz T_i időállandóit, akkor a szakasz átmeneti függvényének relatív hibája a kezdeti $v(t) \approx 0$ időintervallum közelében jelentős, ezért ritkán fogjuk úgy felgyorsítani a rendszert, hogy közelébe kerüljünk ennek a időintervallumnak, mert ekkor a szakasz modellje már a nagy relatív hiba miatt nem lesz hihető. Ezért bevezetve a szakasz $T_s = \sum T_i$ szumma-időállandóját (a szakasz átviteli függvényének nevezőjét elsőrendű Taylor-sorával közelítve, azaz a szakaszt T_s időállandójú egytárolós tagnak felfogva), ökölszabályként elfogadható különösen aperiódikus (egytárolós tagok soros kapcsolásaként felírható) szakaszok esetén az

$\omega_0 \approx 5/T_s$ választás. A rendszer gyorsítását korlátozzák a nagy jeleknél fellépő nemlineáris hatások (telítés stb.) és a nagyfrekvenciás zavaró jelek is (utóbbiak hatását a zárt rendszernek jelentősen csökkentenie kell).

Tipikus diszkrétidejű rendszermodellek

A különféle identifikációs szoftverek, így a MATLAB-ra épülő és Ljung által kifejlesztett *System Identification Toolbox* (a továbbiakban IDENT) is különféle rendszermodellek identifikációját teszi lehetővé. Ezek közül a tantermi gyakorlat során kizárólag a diszkrétidejű, zajjal terhelt és egyváltozós (SISO) rendszerek modelljeire fogunk koncentrálni. A rendszermodellek elnevezéseiben AR autoregresszív (auto regressive), MA mozgóátlag (moving average), X külső bemenő jelet tartalmazó (exogenous signal), OE kimenetre redukált additív zajt (output error) tartalmazó, BJ Box-Jenkins modell szerinti és PEM általános lineáris paraméterbecslési modell (parameter estimation model) szerinti folyamatokra utal. A modellek leírásában $t = iT$ a normalizált idő, amelyben T a mintavételi idő és i a mintavételi időpont, $x(t)$ egy lehetséges mintasorozat, z^{-k} shift operátor, amellyel $z^{-k}x(t) := x(t-k)$. Az imént felsorolt modellek differenciaegyenleteit az alábbiak szerint adjuk meg, a polinomok jelölései megegyezik az IDENT toolbox jelöléseivel:

$$A(z^{-1})y(t) = e(t)\,, \tag{AR}$$

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-n_k) + e(t)\,, \tag{ARX}$$

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-n_k) + C(z^{-1})e(t)\,, \tag{ARMAX}$$

$$A(z^{-1})y(t) = \frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})}u(t-n_k) + \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}e(t)\,. \tag{PEM}$$

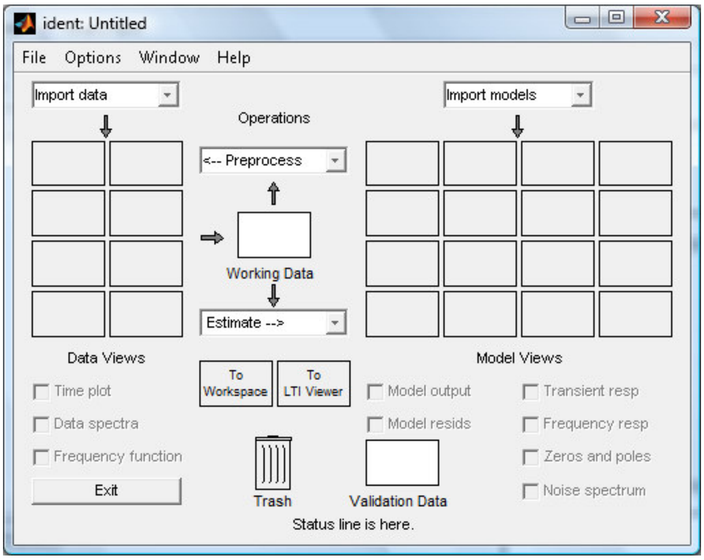
A modellekben $u(t)$ a hasznos külső bemenet (a szakaszra jutó beavatkozó jel), $e(t)$ fehér zaj, $y(t)$ a zajjal terhelt kimenet, továbbá $A(z^{-1}), B(z^{-1}), C(z^{-1}), D(z^{-1}), F(z^{-1})$ polinomok a z^{-1} shift-operátorban és az IDENT szóhasználata szerint n_k felel meg a késleltetésnek vagy "holtidőnek" ($n_k T$, ahol T a mintavételi idő). Az $A(z^{-1}), C(z^{-1}), D(z^{-1}), F(z^{-1})$ polinomok 1 vezető együtthatójú (monic) polinomok a z^{-1} shift-operátorban, pl. $A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n_a} z^{-n_a}$. Azért, hogy a zajmentes rendszer erősítése tetszőleges lehessen, a $B(z^{-1})$ polinom már nem lehet 1 vezető együtthatójú: $B(z^{-1}) = b_1 + b_2 z^{-1} + \cdots + b_{n_b} z^{-(n_b-1)}$. A zajcsatorna erősítése az $e(t) \in N(0,\sigma)$ fehér zaj megfelelőre választott szórásával vehető figyelembe. A szórás helyett az IDENT a $\lambda := \sigma^2$ paramétert használja. A MATLAB konvenciója szerint az

$A(z^{-1}),\ldots,F(z^{-1})$ polinomokat együtthatóikkal kell megadni a z (!) hatványainak csökkenő sorrendjében, tehát $A(z^{-1})$ esetén az $A=[1\ a_1\ a_2\ \ldots\ a_{n_a}]$ sorvektor formájában. Speciális megkötés, hogy n_k és B egyszerre kerül megadásra oly módon, hogy B elején n_k darab vezető nullát szúrunk be.

Egy adott modellt akkor tekintünk identifikáltnak, ha meghatároztuk a polinomok ismeretlen együtthatóit. A polinomok együtthatói a modell paraméterei.

Az IDENT toolbox szolgáltatásai

Itt néhány főbb jellemzőjét ismertetjük az IDENT tolboxnak. A toolbox szolgáltatásainak eléréséhez egy grafikus felhasználói felület is rendelkezésre áll, amely elfedi az eljárások során használt adatstruktúrákat, illetve amely segítségével az identifikált rendszer az LTI böngésző vagy a munkatér felé exportálható. A grafikus felhasználói felület az `ident` parancs segítségével jeleníthető meg.



7.3. ábra. Az IDENT toolbox szolgáltatásainak elérését segítő grafikus felhasználói felület

Az IDENT toolboxon belül a rendszermodell speciális `th` adatstruktúrával jellemezhető (amely sajnos eltér például a Control System Toolbox `ss`, `tf` és `zpk` adatstruktúráitól). Ha a rendszer ismert (a polinomok együtthatói és a fehér zaj szórásnégyzete numerikusan ismertek, mert például ismert rendszeren akarunk jeleket előállítani szimulációs vizsgálatokhoz, pl. az identifikációs módszerek ellenőrzése céljából egy etalon rendszeren), akkor az IDENT a

$$th = \texttt{poly2th}(A, B, C, D, F, \lambda, T)$$

függvényhívás hatására felépíti és th-ban tárolja a rendszert jellemző adatstruktúrát. A hátul álló C, D, F, λ, T paraméterek elhagyhatók híváskor, ilyenkor értékük 1 lesz. Szimulációs vizsgálatokhoz ezután zajos vagy zajmentes kimenetet generálhatunk ismert u és e bemenő jel és zaj sorozatok esetén az IDENT

$$y = \texttt{idsim}([u\ e], th)$$
$$y = \texttt{idsim}(u, th)$$

függvényhívásaival. A bemenő jelek sorozatait oszlopvektorok formájában kell megadni, a kimenő jel oszlopvektorokban keletkezik. Bemenő jeleket generálhatunk például a MATLAB `rand` és `sign` függvényei felhasználásával.

Ismeretlen rendszer identifikációja esetén mérjük az $u(t)$ bemenet és a zajos $y(t)$ kimenet értékeit, ezeket összegyűjtjük az u és y oszlopvektorokban, felépítjük a megfigyelésekből álló és két oszloppal rendelkező $z = [y\ u]$ mátrixot, megválasztjuk a rendszermodellt és az abban szereplő polinomok fokszámait, megválasztjuk a holtidő értékét, és elvégezzük az identifikációt az IDENT szolgáltatásaival. Mindezen lépések a grafikus felhasználói felület segítségével is megvalósíthatók.

Az identifikációs módszerek feladata, hogy meghatározza a polinomok valamilyen értelemben optimális paramétereit, miközben az $e(t)$ zaj értékei ismeretlenek. Erre a célra a legkisebb négyzetek módszere (LS, least squares method) vagy ennél általánosabb paraméterbecslési technikák, a zaj fehérítését megcélzó segédváltozós (IV, instrumental variables) módszer, numerikus optimum keresés, vagy esetleg ezek kombinációja alkalmazható. Az IDENT a rendszermodell típusától függően választja meg az identifikációhoz használt numerikus módszert. A segédváltozós módszer (IV) csak ARX modell esetén alkalmazható. A rendszermodell polinomjaiban szereplő nemtriviális paraméterek számát, ami $B(z^{-1})$ kivételével a polinom fokszáma, egy sorvektorban kell megadni, amely pl. PEM modell esetén az $nn = [n_a\ n_b\ n_c\ n_d\ n_f\ n_k]$ sorvektort jelenti. A 0 fokszám megengedett, pl. $n_a = 0$ esetén $A(z^{-1}) = 1$, tehát hatástalan. Ha a választott rendszermodell nem tartalmazza az összes $A(z^{-1}), \ldots, F(z^{-1})$ polinomot, akkor a hiányzó polinom fokszámát tilos szerepeltetni nn-ben. A megmaradó fokszámok mindig a PEM esetére megadott sorrendben szerepeltetendők nn-ben:

$$nn = n_a \qquad \text{(AR)}$$
$$nn = [n_a\ n_b\ n_k] \qquad \text{(ARX)}$$

$$nn = [n_a \ n_b \ n_k] \qquad \text{(IV4)}$$
$$nn = [n_a \ n_b \ n_c \ n_k] \qquad \text{(ARMAX)}$$
$$nn = [n_a \ n_b \ n_c \ n_d \ n_f \ n_k]. \qquad \text{(PEM)}$$

Az IDENT identifikációs módszerei az identifikáció eredményét (az identifikált paramétereket és λ értékét is tartalmazó) megválasztható nevű th struktúrában helyezik el:

$$thar = \mathtt{ar}(y, nn) \qquad \text{(AR)}$$
$$tharx = \mathtt{arx}(z, nn) \qquad \text{(ARX)}$$
$$thiv4 = \mathtt{iv4}(z, nn) \qquad \text{(IV4)}$$
$$\text{tharmax} = \mathtt{armax}(z, nn) \qquad \text{(ARMAX)}$$
$$thpem = \mathtt{pem}(z, nn). \qquad \text{(PEM)}$$

Az identifikált rendszer zajmentes válasza, vagy szimulációs vizsgálatoknál az ismert $e(t)$ zajsorozat figyelembevételével a zajos rendszer válasza is meghatározható, pl. PEM modell esetén:

$$y = \mathtt{idsim}(u, thpem)$$
$$y = \mathtt{idsim}([u\, e], thpem).$$

Az identifikáció eredménye az

$$\mathtt{idplot}([y\ u])$$

függvényhívással felrajzolható. A polinomok együtthatói kinyerhetők, pl. PEM modell esetén az

$$[A, B, C, D, F] = \mathtt{th2poly}(thpem)$$

függvényhívással. A mérési eredményeket és az identifikáció eredményeit összerajzolhatjuk és vizuálisan összehasonlíthatjuk a MATLAB általános szolgáltatásaival (`plot`, stb.). Megjegyezzük, hogy több itt szereplő függvénynek létezik általánosabb paraméterezése is IDENT-ben, továbbá többváltozós (MIMO) rendszerek identifikációja is lehetséges.

Az IDENT toolbox a fenti diszkrétidejű paraméter identifikációs módszereken kívül lehetővé teszi még folytonosidejű lineáris állapotegyenletek paramétereinek becslését is speciális zajstruktúrák esetén, illetve átviteli függvények paramétereinek meghatározását is. Szolgáltatásai között szerepelnek a paraméterbecslés rekurzív realizációi is, amelyek adaptív irányításoknál jelentősek. Ezeken túlmenően lehetőség van nemparaméteres identifikációra, valamint a korrelációs függvények és a spektrumok számítására is. Ez utóbbi számítások algoritmusai gyors Fourier-transzformáción (FFT, fast Fourier-transformation) és az FFT periodicitása miatt alkalmasan választott ablakozási technikán alapulnak. Az IDENT toolbox algoritmusai alapjául szolgáló elmélet bővebben Ljung: System identification: Theory for the user című könyvében található meg.

Identifikációs módszerek

A továbbiakban nem foglalkozunk a holtidővel, mert ismert n_k esetén $u(t)$ értékeinek előzetesen elvégezhető eltolásával a holtidőt előre figyelembe lehet venni.

Tételezzük fel, hogy kiválasztottunk egy bizonyos M modell típust, ahol ezen belül az egyes $\mathsf{M}(\vartheta)$ modellek a ϑ paramétervektorral paraméterezhetők, ahol a paramétervektornak esetleg bizonyos feltételeket kell kielégítenie (stabil modell, stb.): $\vartheta \in \mathsf{D}_{\mathsf{M}} \subset R^p$. Világos, hogy minden modell lehetőséget kínál a jóslásra. Speciálisan ha a modellosztály

$$y(t) = G(z^{-1}, \vartheta)u(t) + H(z^{-1}, \vartheta)e(t)\,, \tag{7.1}$$

akkor a jóslásra alkalmazható az

$$\mathsf{M}(\vartheta):\quad \hat{y}(t|t-1) = H^{-1}(z^{-1}, \vartheta)G(z^{-1}, \vartheta)u(t) + [1 - H^{-1}(z^{-1}, \vartheta)]y(t)\,. \tag{7.2}$$

1-lépéssel előretartó prediktor, amely mellett a predikciós hiba a következő lesz:

$$\varepsilon(t, \vartheta) = H^{-1}(z^{-1}, \vartheta)[y(t) - G(z^{-1}, \vartheta)u(t)] \tag{7.3}$$

Az 1-lépéssel előretartó prediktor a hibanégyzet várható értékében optimális becslést ad, ha a következő feltételek teljesülnek:

i) $e(t+1)$ és $z(1 - H^{-1}(z^{-1}, \vartheta))[y(t) - G(z^{-1}, \vartheta)u(t)]$ függetlenek.

ii) $e(t+1)$ és $G(z^{-1})u(t+1)$ függetlenek.

iii) $E\,e(t) = 0,\ \forall t$ esetén.

A iii) feltétel fehér zaj esetén mindig teljesül. Ha a rendszer aluláteresztő jellegű, akkor külső zaj esetén az i) és ii) feltételek is teljesülnek. Zárt körben felvett jelek vagy kvantálási zaj esetén azonban problémák lehetnek.

A paraméterbecsléshez rendelkezésre álló adat: $Z^N = \{y(1), u(1), y(2), u(2), \ldots y(N), u(N)\}$. A kérdés az, hogyan kell a Z^N-ben lévő információ alapján a megfelelő $\hat{\vartheta}_N$ parmétervektort, és így a megfelelő $\mathsf{M}(\hat{\vartheta}_N)$ modellt kiszelektálni az $\mathsf{M}_* = \{\mathsf{M}(\vartheta) : \vartheta \in D_\mathsf{M}\}$ rendszerosztályban:

$$Z^N \to \hat{\vartheta}_N \in D_\mathsf{M}. \tag{7.4}$$

Egy ilyen leképzést modell-identifikációs célú paraméterbecslésnek nevezünk. Olyan modellt keresünk, amely "leírja" az adatokat, és úgy gondolkozunk, hogy a modell lényege a modell predikciós képessége. Ez azt jelenti, hogy a "jó" modell kiválasztásához a következőképp kell eljárni: A Z^t-ben lévő információ alapján meghatározzuk az $\varepsilon(t, \vartheta)$ predikciós hibát. A $t = N$ időpontban úgy választjuk meg $\hat{\vartheta}_N$ értékét, hogy az $\varepsilon(t, \hat{\vartheta}_N)$, $t = 1, 2, \ldots, N$ predikciós hibák a lehető legkisebbek legyenek.

Tisztázni kell, mit értünk "kicsi" alatt. A predikciós hibasorozat egy vektor R^N-ben, ezért hibáját a norma négyzetével jellemezzük. A korrelációs feltételek javítása érdekében azonban célszerű előbb a predikciós hibasorozatot egy stabil $L(z^{-1})$ lineáris szűrőn keresztülküldeni:

$$\varepsilon_F(t, \vartheta) = L(z^{-1})\varepsilon(t, \vartheta) = H^{-1}(z^{-1}, \vartheta)[L(z^{-1})y(t) - G(z^{-1})L(z^{-1})u(t)] \tag{7.5}$$

A predikciós hiba jellemzésére választható

$$V_N(\vartheta, Z^N) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\frac{1}{2}\left|\varepsilon_F(t, \vartheta)\right|^2. \tag{7.6}$$

A $\hat{\vartheta}_N$ becslést minimalizálással definiáljuk:

$$\hat{\vartheta}_N = \arg\min_{\vartheta \in D_\mathsf{M}} V_N(\vartheta, Z^N). \tag{7.7}$$

Az ARX modell esetén az optimum analitikusan is meghatározható, ha nem korlátozzuk a modellosztályt ($\mathsf{D}_\mathsf{M} = R^p$), más esetben optimumkereső eljárást kell alkalmazni. Foglalkozzunk ezért $V_N(\vartheta, Z^N)$ deriváltjainak meghatározásával. Ha $L(z^{-1}) = 1$ (nem szűrjük a predikciós hibát), akkor a gradiens a következőképp határozható meg:

$$V_N'(\vartheta, Z^N) = \frac{d}{d\vartheta}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\frac{1}{2}\varepsilon^2(t,\vartheta) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\frac{d}{d\vartheta}[\varepsilon(t,\vartheta)]\varepsilon(t,\vartheta), \tag{7.8}$$

$$\psi(t,\vartheta) = -\frac{d}{d\vartheta}[\varepsilon(t,\vartheta)] = \frac{d}{d\vartheta}[\hat{y}(t,\vartheta)], \tag{7.9}$$

$$V_N'(\vartheta, Z^N) = -\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\psi(t,\vartheta)\varepsilon(t,\vartheta). \tag{7.10}$$

Tekintsük ezután a második derivált (Hess-mátrix) meghatározását. Mivel ε skalár és a ϑ vektor szerinti első deriváltja a $-\psi$ vektor, ezért a második deriváltja a ϑ vektor szerint azonos $-\psi$ első deriváltjával a ϑ vektor szerint, ami mátrix, és ezért

$$V_N''(\vartheta, Z^N) = -\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\psi'(t,\vartheta)\varepsilon(t,\vartheta) + \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\psi(t,\vartheta)\psi^T(t,\vartheta) \tag{7.11}$$

és mivel $\varepsilon(t,\vartheta)$ az optimum közelében már kicsi, ezért az optimum közelében a $V_N''(\vartheta, Z^N)$ Hess-mátrix közelíthető a jobb oldalon álló kifejezés második tagjával:

$$V_N''(\vartheta, Z^N) \approx H_N(\vartheta) := \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\psi(t,\vartheta)\psi^T(t,\vartheta). \tag{7.12}$$

A közelítésre azért van szükség, mert $\psi'(t,\vartheta)$ számítására nem áll rendelkezésre használható kifejezés. A Hess-mátrix közelítése $H_N(\vartheta)$-val lehetővé teszi a jó konvergencia tulajdonságú kvázi Newton-módszer alkalmazását. Az ARMAX és az annál bonyolultabb modelleknél az IDENT toolbox kvázi Newton-módszert használ. A fő problémát az optimumkeresésnél az okozza, hogy több lokális optimum lehet (különösen bonyolultabb rendszermodelleknél), ezért nagy a veszélye annak, hogy a keresés révén nem a globális optimumot, hanem csak egy lokális optimumot határozunk meg. Ezért szükség lehet arra, hogy a keresést különböző kezdeti értékekről indítva többször is megismételjük.

ARX modell identifikációja a legkisebb négyzetek módszerével

Az ARX modell esetén

$$y(t) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(t) + \frac{1}{A(z^{-1})}e(t) =: G(z^{-1})u(t) + H(z^{-1})e(t), \tag{7.13}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}(t,\vartheta) &= A(z^{-1})\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(t)+[1-A(z^{-1})]y(t) \\ &= [1-A(z^{-1})]y(t)+B(z^{-1})u(t),\end{aligned} \tag{7.14}$$

ami a

$$\varphi^T(t) := [-y(t-1)\ \ldots\ -y(t-n_a)\ u(t)\ \ldots\ u(t-n_b+1)]\,, \tag{7.15}$$

$$\vartheta := (a_1\ \ldots\ a_{n_a}\ b_1\ \ldots\ b_{n_b})^T \tag{7.16}$$

jelölésekkel a ϑ paraméterben lineáris

$$\hat{y}(t,\vartheta) = \varphi^T(t)\vartheta \tag{7.17}$$

prediktort eredményezi. A predikciós hiba és a minimalizálandó kritérium ekkor

$$\varepsilon(t,\vartheta) = y(t) - \varphi^T(t)\vartheta\,, \tag{7.18}$$

$$V_N(\vartheta, Z^N) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\frac{1}{2}\left|y(t)-\varphi^T(t)\vartheta\right|^2\,, \tag{7.19}$$

amely egy lineáris paraméterbecslési feladat, amelynek megoldása a $V_N'(\vartheta, Z^N) = 0$ feltételből számítható:

$$V_N'(\vartheta, Z^N) = -\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)y(t)+\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(t)\vartheta = 0\,, \tag{7.20}$$

$$\hat{\vartheta}_N^{LS} := \left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(t)\right]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)y(t)\,. \tag{7.21}$$

Egy lehetséges másik alakra jutunk, ha bevezetjük az $Y = (y(1), y(2), \ldots, y(N))^T$ vektor és $\Phi = [\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(N)]^T$ mátrix jelölést, amellyel $V = \frac{1}{2}\|Y-\Phi\vartheta\|^2$ és $\hat{\vartheta}^{LS} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T Y$.

Egy sztochasztikus interpretáció adható, ha bevezetjük az $R(N) := \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(t)$ és $h(N) := \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)y(t)$ jelöléseket, ahol $R(N)$ mátrix és $h(N)$ vektor, amellyel az

LS becslés $\hat{\vartheta}_N^{LS} = [R(N)]^{-1} h(N)$ alakú lesz. Az $R(N)$ mátrixnak invertálhatónak kell lennie, ami fizikailag azt jelenti, hogy a jeleknek ún. "perzisztensen" gerjesztőnek kell lenniük. Ha a megfigyelt adatokat a ϑ_0 valódi paraméterhez tartozó zajos $y(t) = \varphi^T(t)\vartheta_0 + v_0(t)$ rendszer generálta, akkor

$$\hat{\vartheta}_N^{LS} = [R(N)]^{-1} \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \varphi(t)[\varphi^T(t)\vartheta_0 + v_0(t)] = \vartheta_0 + [R(N)]^{-1} \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \varphi(t) v_0(t). \quad (7.22)$$

A $\hat{\vartheta}_N^{LS}$ becsléstől elvárjuk, hogy legyen ϑ_0 közelében és konvergáljon ϑ_0-hoz, ha $N \to \infty$. Ha jelek stacionáriusak és ergodikusak (a jel bármelyik elég hosszú reprezentációjának átlagai jól közelítik a valószínűségi átlagokat), akkor $R(N) \to R_{\varphi\varphi}$ autokorrelációs függvényhez és $h(N) \to R_{\varphi v_0}$ keresztkorrelációs függvényhez tart. Ekkor annak feltétele, hogy az LS becslés konzisztens legyen, azaz teljesüljön $\hat{\vartheta}_N^{LS} \to \vartheta_0$, ahol ϑ_0 a valódi paraméter (amely a valódi rendszerhez tartozik), ekvivalens az $R_{\varphi v_0} = 0$ feltétellel, vagyis ekkor a $\varphi(t)$ megfigyeléseknek és a $v_0(t)$ zajnak korrelálatlannak kell lenniük.

Az LS-becslés numerikus meghatározásakor a $\varphi^T(t)$ ún. regressziós vektorok számításához általában csak az $y(t)$, $u(t)$, $1 \le t \le N$ megfigyelések állnak rendelkezésre, ezért n_a és n_b értékétől függő számú, és az LS becsléshez szükséges $t \le 0$ időpontokhoz tartozó kezdeti értékek hiányoznak. Ezért az adatsort rendszerint csak $t = n+1$ értéktől tekintjük, ahol $n = \max\{n_a, n_b - 1\}$. A probléma átidexeléssel és N alkalmas átdefiniálásával az eredeti alakra transzformálható.

ARX modell identifikációja a segédváltozók módszerével

Mint láttuk, az $\hat{y}(t,\vartheta) = \varphi^T(t)\vartheta$ lineáris regressziós modell esetén problémát okozhat, ha a $\varphi(t)$ megfigyelés és a $v_0(t)$ zaj korrelál. A korreláció csökkentésére próbálkozzunk meg $\varphi(t)$ lecserélésével egy alkalmasan választott $\xi(t)$ jelre, az ún. segédváltozóra (IV, instrumental variable) a becslés képletének alkalmasan megválasztott helyén.

Ha a valódi rendszer $y(t) = \varphi^T(t)\vartheta_0 + v_0(t)$, akkor $v_0(t) = y(t) - \varphi^T(t)\vartheta_0$, ezért az LS becslés a következő alakban is megfogalmazható:

$$\hat{\vartheta}_N^{LS} = \mathrm{sol}\left\{ \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \varphi(t)[y(t) - \varphi^T(t)\vartheta] = 0 \right\}, \quad (7.23)$$

ahol “sol” a megoldásra (solution) utal. Ezért olyan $\xi(t)$ segédváltozót keresünk, amelyre

$$\hat{\vartheta}_N^{IV} = \text{sol}\left\{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\xi(t)[y(t)-\varphi^T(t)\vartheta]=0\right\}. \tag{7.24}$$

Ekkor az IV becslés alakja a következő lesz:

$$\hat{\vartheta}_N^{IV} := \left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\xi(t)\varphi^T(t)\right]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\xi(t)y(t). \tag{7.25}$$

Ahhoz, hogy a $\hat{\vartheta}_N$ becslés tartson a valódi ϑ_0 paraméterhez nagy N esetén, teljesülnie kell az $1/N\sum_{t=1}^{N}\xi(t)v_0(t)\to 0$ feltételnek. Ha az átlagokat várható értékkel helyettesítjük, akkor a $\xi(t)$ segédváltozónak ki kell elégítenie a következő feltételeket:

$$E\xi(t)\varphi^T(t) \text{ nemszinguláris,} \tag{7.26}$$

$$E\xi(t)v_0(t)=0. \tag{7.27}$$

Ez azt jelenti, hogy a $\xi(t)$ segédváltozónak korreláltnak kell lennie a $\varphi(t)$ megfigyelésekkel, ugyanakkor korrelálatlannak kell lennie a $v_0(t)$ zajjal.

Az IDENT a numerikusan jó tulajdonságú IV4 algoritmust használja az ARX modell paramétereinek segédváltozós módszerrel történő meghatározására.

1. Írjuk fel a modell struktúrát az $\hat{y}(t,\vartheta)=\varphi^T(t)\vartheta$ lineáris regressziós alakban, és határozzuk meg θ becslését LS módszerrel. Jelölje $\hat{\vartheta}_N^{(1)}$ az így kapott becsült paramétert és $\hat{G}_N^{(1)}(z^{-1})$ a hozzátartozó átviteli függvényt. Legyen $x^{(1)}(t)=\hat{G}_N^{(1)}(z^{-1})u(t)$.
2. Legyenek a segédváltozók $\xi^{(1)}(t)=[-x^{(1)}(t-1)\ \ldots\ -x^{(1)}(t-n_a)\ u(t)\ \ldots\ u(t-n_b+1)]^T$ és határozzuk meg a hozzátartozó $\hat{\vartheta}_N^{(2)} := \hat{\vartheta}_N^{IV}$ IV becslést. Jelölje a $\hat{\vartheta}_N^{(2)}$-höz tartozó átviteli függvényt $\hat{G}_N^{(2)}(z^{-1})=\hat{B}_N^{(2)}(z^{-1})/\hat{A}_N^{(2)}(z^{-1})$ és legyen $x^{(2)}(t)=\hat{G}_N^{(2)}(z^{-1})u(t)$.

3. Legyen $\hat{w}_N^{(2)}(t) := \hat{A}_N^{(2)}(z^{-1})y(t) - \hat{B}_N^{(2)}(z^{-1})u(t)$, és írjunk elő egy $n_a + n_b$ fokszámú AR modellt $\hat{w}_N^{(2)}(t)$ számára (amely nem más, mint a második modell esetén fellépő egyenlethiba): $L(z^{-1})\hat{w}_N^{(2)}(t) = e(t)$.Határozzuk meg $L(z^{-1})$ becslését az LS módszerrel (ekkor φ-ben hiányoznak az u-hoz tartozó tagok). Jelölje az LS becslés eredményét $\hat{L}_N(z^{-1})$.
4. Képezzünk az új $\xi^{(2)}(t) = \hat{L}_N(z^{-1})[-x^{(2)}(t-1) \ \ldots \ -x^{(2)}(t-n_a) \ u(t) \ \ldots \ u(t-n_b+1)]^T$ segédváltozókat. Alkalmazzuk az $\hat{L}_N(z^{-1})$ előszűrőt $\varphi(t)$ és $y(t)$ szűrésére is, és az így kapott $\varphi_F(t), y_F(t)$ szűrt (F, filtered) jelekkel legyen a végső IV becslés $\hat{\vartheta}_N := \left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\xi^{(2)}(t)\varphi_F^T(t)\right]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\xi^{(2)}(t)y_F(t)$.

ARMAX modell identifikációja kvázi Newton-módszerrel

Az IDENT toolbox az $A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t) + C(z^{-1})e(t)$ ARMAX modell esetén a paraméterbecslésre a kvázi Newton-módszer szerinti optimum keresést használja. Az 1-lépéssel előretartó prediktor algoritmusa alkalmazható az ARMAX modellre, amely alapján számítható $\hat{y}(t,\vartheta)$ és $\varepsilon(t,\vartheta)$, ezek ismeretében pedig a hibakritérium $V_N'(\vartheta, Z^N)$ gradiense, továbbá a Hess-mátrix $H_N(\vartheta)$ közelítésében használt $\psi(t,\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta}[\hat{y}(t,\vartheta)]$. Az IDENT toolbox az ARMAX modell identifikációjához is többlépéses algoritmust használ, amelynek induló lépése IV4.

Az identifikált modellel szembeni elvárások

A diszkrétidejű lineáris modellekkel kapott identifikációs eredményektől elvárjuk, hogy mintavételezett folytonosidejű (analóg) lineáris rendszerhez tartozzanak. Ismeretes, hogy ha s_i a folytonosidejű rendszer pólusa, akkor ennek a mintavételezett rendszer diszkrétidejű átviteli függvényében a $z_i = e^{s_i T}$ pólusba kell leképződnie. Ez azt jelenti, hogy ha z_i a negatív valós tengelyen lévő pólusa az identifikált modellnek és multiplicitása páratlan, akkor a modell nem tartozhat folytonosidejű lineáris rendszerhez, mert annak $s_i = \ln(z_i)/T$ komplex értékű pólusai csak az $\tilde{s}_i$ konjugált komplex párjukkal együtt fordulhatnak elő, ami nem teljesülhet, ha z_i a negatív valós tengelyen lévő páratlan multiplicitású pólus.

Az IDENT stabil rendszert feltételezve megoldja, hogy a numerikus pontatlanságok miatt esetleg az egységkörön kívülre (az instabil tartományba) eső z_i modell pólusok visszakerüljenek az egységkör belsejébe azáltal, hogy $|z_i| > 1$ esetén z_i-t automatikusan z_i^{-1}-gyel helyettesíti.

Elképzelhető azonban, hogy pl. az LS módszerrel kapott ARX modell jelei jól közelítik ugyan az identifikációhoz használt, az ismeretlen rendszeren regisztrált bemenő és kimenő jeleket, de pl. a kvantálási hibák következtében a diszkrétidejű modell bizonyos pólusai a negatív valós tengely $[-1, 0)$ intervallumába esnek és páratlan multiplicitásúak. Ekkor javasolható a bonyolultabb, de pontosabb IV4 vagy ARMAX modellek használata.

Ellenőrző kérdések a gyakorlathoz

1. Adja meg az autoregresszív (AR) és mozgóátlag (MA) folyamatok diszkrétidejű modelljeinek definícióját. Adja meg a diszkrétidejű ARX és ARMAX modellek értelmezését ezek általánosításaiként.

2. Vezesse le, hogy a
$$D(z) = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$
átviteli függvényű diszkrétidejű rendszer identifikációja $y(t) = \varphi^T(t)\vartheta$ alakú lineáris paraméterbecslési feladatra vezet a $q^{-k}x(t) = x(t-k)$ eltolásoperátor bevezetésével. Adja meg a rendszerhez tartozó $\varphi^T(t)$ és ϑ felépítését.

3. Adja meg az $y(t) = \varphi^T(t)\vartheta$ lineáris paraméterbecslési feladat $V(\vartheta, t)$ veszteségfüggvényét, a lineáris paraméterbecslési feladat általános megoldásának két alakját és az abban szereplő kifejezések értelmezését. Mennyiben változik a megoldás W súlyozómátrix előírása esetén?

4. Adja meg az $y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t)$ (additív színes zajjal terhelt) rendszer esetén az optimális 1-lépéssel előretartó $\hat{y}(t \mid t-1)$ jóslás és az $\varepsilon(t)$ reziduál (becslési hiba) alakját. Mutassa meg az eredmény felhasználásával, mi lesz ARX modell esetén az $\hat{y}(t \mid t-1)$ jóslás és az $\varepsilon(t)$ reziduál alakja.

5. Adja meg ARX modell esetén az optimális $\hat{\vartheta}^{LS}$ paraméterbecslés alakját. Mutassa meg, hogy $y(t) = \varphi^T(t)\vartheta_0 + v_0(t)$ jel esetén becslési hiba léphet fel, és adja meg, mire kell törekedni ennek kiküszöbölése érdekében.

6. ARX modell esetén az optimális $\hat{\vartheta}^{LS}$ paraméterbecslés
$$\hat{\vartheta}^{LS} = \text{sol}\left\{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)[y(t)-\varphi^T(t)\vartheta]=0\right\}$$
alakban is felírható. Mutassa meg, milyen módosítást végzünk ezen a $\xi(t)$ segédváltozó (instrumental variable) értelmezésekor. Adja meg a segédváltozós módszer (IV) ebből következő $\hat{\vartheta}^{IV}$ paraméterbecslésének alakját. Adja meg a segédváltozóval szemben támasztott két követelményt, ha a jel $y(t)=\varphi^T(t)\vartheta_0+v_0(t)$ alakú.
7. Adja meg ARMAX modell alakját, és alkalmazása esetén az $\hat{y}(t\,|\,t-1)$ jóslás és az $\varepsilon(t)$ reziduál alakját. Milyen numerikus módszert használ a System Identification Toolbox az ARMAX modell paramétereinek meghatározásakor?

8. Egy ismeretlen rendszeren adatgyűjtést végezve rendelkezésre állnak az $y(t),\, u(t),\, t=1,\ldots,N$, bemenő- és kimenőjelek az `y` és `u` vektorokban oszlopfolytonosan. A rendszer
$$D(z)=\frac{b_1z^2+b_2z+b_3}{z^3+a_1z^2+a_2z+a_3}$$
diszkrétidejű lineáris modelljét a System Identification Toolbox `tharx=arx(z,nn)` függvényhívásával akarjuk meghatározni. Adja meg a hívást megelőző előkészítő lépéseket, a hívást, és az ARX modell identifikált paramétereit kinyerő lépéseket MATLAB utasítások formájában.

9. Egy ismeretlen rendszeren zárt szabályozási körben adatgyűjtést végezve rendelkezésre állnak a szakasz $y(t),\, u(t),\, t=1,\ldots,N$, bemenő- és kimenőjelei az `y` és `u` vektorokban oszlopfolytonosan. A rendszer
$$D(z)=\frac{b_1z^2+b_2z+b_3}{z^3+a_1z^2+a_2z+a_3}$$
diszkrétidejű lineáris modelljét a System Identification Toolbox `thiv4=iv4(z,nn)` függvényhívásával akarjuk meghatározni. Adja meg a hívást megelőző előkészítő lépéseket, a hívást, és a modell identifikált paramétereit kinyerő lépéseket MATLAB utasítások formájában.

10. Egy ismeretlen rendszeren zárt szabályozási körben adatgyűjtést végezve rendelkezésre állnak a szakasz $y(t),\, u(t),\, t=1,\ldots,N$, bemenő- és kimenőjelei az `y` és `u` vektorokban oszlopfolytonosan. A rendszer
$$D(z)=\frac{b_1z^2+b_2z+b_3}{z^3+a_1z^2+a_2z+a_3}$$

diszkrétidejű lineáris modelljét a System Identification Toolbox `tharmax=armax(z,nn)` függvényhívásával akarjuk meghatározni. A zajmodellben szereplő polinom fokszámát a szakasz rendszámával azonosnak választjuk. Adja meg a hívást megelőző előkészítő lépéseket, a hívást, és a modell identifikált paramétereit kinyerő lépéseket MATLAB utasítások formájában.

11. Lassan változó munkapontok esetén egy ismeretlen SISO rendszer lineáris paraméterbecslésen alapuló $y(t)=\varphi^T(t)\vartheta$ modelljének ϑ paramétervektorát rekurzív paraméterbecsléssel akarjuk identifikálni. Jelölje $\lambda \in (0,1]$ a felejtési tényezőt. Adja meg a felejtést alkalmazó $V(\vartheta,t)$ veszteségfüggvény alakját. Adja meg a $\hat{\vartheta}(t)=[\Phi\Lambda\Phi^T]^{-1}\Phi\Lambda Y$ optimális becslésben szereplő Φ, Λ, Y értelmezését. Tudván, hogy a rekurzív megoldás
$$\hat{\vartheta}(t)=\hat{\vartheta}(t-1)+P(t)\varphi(t)[y(t)-\varphi^T(t)\hat{\vartheta}(t-1)]$$
alakra hozható, mi a $P(t)$ mátrix definíciója, és létezik-e rekurzív számítására szintén zárt alak.

12. Nulla vagy ismert $u(t)$ bemenőjel esetén a nemlineáris rendszer állapotegyenlete $\dot{x}(t)=f(t,x(t))$ alakra hozható. Legyen $\xi(t)$ az állapotegyenlet egy megoldása (egyensúlyi helyzete, határciklusa, vagy más megoldása). Adja meg a $\xi(t)$ megoldás Ljapunov-értelemben vett stabilitásának definícióját, és a definíció illusztrációját mérnöki felfogásban egy rajzon is (speciálisan $x \in R^1$ esetén). Mit értünk egyenletes stabilitáson és aszimptotikus stabilitáson?

13. Adja meg a $V(t,x)$ pozitív definit függvény definícióját. Mi lesz a negatív definit és a negatív szemidefinit függvény értelmezése? Hol van szerepe a pozitív (negatív) definit függvényeknek?

14. Tegyük fel, hogy az $\dot{x}(t)=f(t,x(t))$ nemlineáris rendszernek $\xi \equiv 0$ egyensúlyi helyzete. Adja meg Ljapunov első tételét (direkt módszer) a $\xi \equiv 0$ egyensúlyi helyzet stabilitásvizsgálatához. Adja meg az abban szereplő $V(t,x)$ Ljapunov-függvény idő szerinti $\dot{V}(t,x)$ deriváltjának alakját V-vel és f-fel kifejezve. Mikor lesz a rendszer aszimptotikusan is stabil?

15. Tegyük fel, hogy az $\dot{x}(t)=f(t,x(t))$ nemlineáris rendszernek $\xi \equiv 0$ egyensúlyi helyzete. Adja meg Ljapunov második tételét (indirekt módszer) a $\xi \equiv 0$ egyensúlyi helyzet stabilitásvizsgálatához, amely kapcsolatot teremt az

$\dot{x} = A(t)x$ linearizált rendszer és az $\dot{x} = A(t)x + f_1(t, x)$ alakra hozott nemlineáris rendszer $\xi \equiv 0$ egyensúlyi helyzetének stabilitása között.

16. Adja meg az $\dot{x} = Ax$ időinvariáns lineáris rendszer klasszikus stabilitásfogalma és a Ljapunov-stabilitás közötti kapcsolatot. Adja meg a Ljapunov-egyenletet és a megoldására épülő $V(x)$ Ljapunov függvényt.

17. Legyen az $\dot{x} = f(x)$ időinvariáns nemlineáris rendszernek $\xi \equiv 0$ egyensúlyi helyzete. Adja meg az invariáns halmaz és a maximálisan invariás halmaz definícióját. Adja meg a LaSalle-tételt az egyensúlyi helyzet stabilitásvizsgálatához. Adja meg az aszimptotikus stabilitás feltételét a maximális invariáns halmazzal kifejezve.