ANALÍZIS(2) II. ZÁRTHELYI 2003. április 17.
Műszaki Informatika szak B kurzus Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (12 pont)

a)
$$\sum_{k=5}^{\infty} \frac{x^k}{k-3}$$
Írja fel a sor összegfüggvényét és határozza meg a sor konvergencia sugarát!

b) $\displaystyle\sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{2^{2k-1}\,(k-3)} = ?$

2. feladat (10 pont)

Írja fel az
$$f(x) = \frac{1}{x+2} + e^x$$
függvény $x_0 = 3$ bázispontú Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

3. feladat (13 pont)

a) Mutassa meg, hogy a $2^4 \binom{-1/2}{3}$ egész szám!

b) $f_1(x) = (1+x)^{-1/2}$, $\quad f_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$g_1(x) = \arcsin x$, $\quad g_2(x) = \arcsin(2x^3)$

Írja fel az f_1, f_2 és a g_1, g_2 függvények $x_0 = 0$ körüli Taylor sorainak első három nem nulla tagját! Adja meg e sorok konvergencia sugarait!

4. feladat (12 pont)

a) Hogyan definiáljuk a 2π szerint periodikus, Riemann-integrálható függvények skaláris szorzatát?

b) Határozza meg az alábbi függvény Fourier sorát!

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in [-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi] \\ -3, & \text{ha } x \in (-\pi/2, 0) \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ 3, & \text{ha } x \in (0, \pi/2) \end{cases} \qquad f(x) = f(x+2\pi), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

5. feladat (16 pont)

$$f(x,y) = \frac{e^{4y-x^2}}{y^2+1}$$

a) Totálisan deriválható-e az f függvény a $P(-2,1)$ pontban?

b) $\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{(-2,1)} = ?$, ha $\underline{e} \parallel [-3,4]$

c) Írja fel a P ponthoz tartozó érintősík egyenletét!

d) $df\big((-2,1), (dx, dy)\big) = ?$

6. feladat (16 pont)

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\,\sin\dfrac{x^2+y}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Folytonos-e az f függvény az origóban?

b) $f'_x(0,0) = ?$, $\quad f'_y(0,0) = ?$

c) Totálisan deriválható-e az f függvény az origóban?

d) $\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{(0,0)} = ?$, ha $\underline{e} = [1,0]$

7. feladat (8 pont)

$$g(x,y) = f\,(x^3+y^2), \qquad f \in C^2_{\mathbb{R}} \quad \text{(egyváltozós)}$$

$g'_x = ?$, $\; g'_y = ?$, $\; g''_{xy} = ?$, $\; g''_{xx} = ?$

8. feladat (12 pont)

$$f(x,y) = (x-y)^2 - (y^2 - 2y + 5)^2$$

Van-e lokális szélsőértéke f-nek?

Pótfeladat (csak az elégségeshez javítjuk ki):

9. feladat (10 pont)

Határozza meg az alábbi hatványsor konvergenciasugarát, konvergencia tartományát, majd adjon meg egy olyan intervallumot, amelyen a konvergencia egyenletes!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{3n}\,(4-x)^n}{2^{2n}}$$

Horváth Álmos

H. 57.

NALÍZIS(2) — űszaki Informatika szak

II. ZÁRTHELYI — B kurzus

2003. április 17. — Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

5

6

1. feladat (12 pont)

a)
$$\sum_{k=5}^{\infty} \frac{x^k}{k-3}$$
Írja fel a sor összegfüggvényét és határozza meg a sor konvergencia sugarát!

b) $\displaystyle\sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{2^{2k-1}(k-3)} = ?$

a.) $f(x) := \sum_{k=5}^{\infty} \frac{x^k}{k-3} = \frac{x^5}{2} + \frac{x^6}{3} + \dots$

$f(0)=0$

Ha $x \neq 0$: $\quad f(x) = x^3 \sum_{k=5}^{\infty} \frac{x^{k-3}}{k-3} := x^3 f_1(x)$ (1)

$f_1'(x) = \sum_{5}^{\infty} \cancel{\frac{k-3}{k-3}} x^{k-4}$ (2) $= x + x^2 + \dots = \frac{x}{1-x}$ (1), ha $|x|<1$, $R_1 = 1$ (1)

$f_1(x) = \int_0^x f_1'(x)\,dx = \int_0^x \frac{x}{1-x}\,dx$ (1) $= \int_0^x \left(-1 + \frac{1}{1-x}\right) dx$ (1) $= -x - \ln(1-x)$ (1)

$R = R_1 = 1$ (1)

$f(x) = x^3 f_1(x) = -x^4 - x^3 \ln(1-x)$ (1) és $R=1$

b.) $\sum_{5}^{\infty} \frac{1}{2^{2k-1}(k-3)} = 2 \sum_{5}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^k}{k-3} = 2f\left(\frac{1}{4}\right)$ (1) $= 2\left(-\left(\frac{1}{4}\right)^4 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 \ln\frac{3}{4}\right)$ (1) $\Big\}$ 2

2. feladat (10 pont)
Írja fel az
$$f(x) = \frac{1}{x+2} + e^x$$
függvény $x_0 = 3$ bázispontú Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x-3)+5} = \frac{1}{5}\,\frac{1}{1 - \frac{-(x-3)}{5}}$ (1) $= \frac{1}{5}\left(1 - \frac{x-3}{5} + \left(\frac{x-3}{5}\right)^2 - \left(\frac{x-3}{5}\right)^3 + \dots\right) =$ (2)

$= \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n}(x-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}}(x-3)^n$

K.T.: $|q| = \left|\frac{-(x-3)}{5}\right| = \frac{|x-3|}{5} < 1$ (1) $\Rightarrow |x-3| < 5$, $x \in (-2, 8)$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, (1) $\forall x$ (1)

$e^x = e^3 e^{x-3} = e^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}$ (2) $x \in \mathbb{R}$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{5^{n+1}} + \frac{e^3}{n!}\right)(x-3)^n$ (1) $\quad x \in \mathbb{R} \cap (-2,8) = (-2,8)$ (1) $\Big\}$ 4

3. feladat (13 pont)

a) Mutassa meg, hogy a $2^4\binom{-1/2}{3}$ egész szám!

b) $\quad f_1(x) = (1+x)^{-1/2}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$

$\quad g_1(x) = \arcsin x, \qquad g_2(x) = \arcsin(2x^3)$

Írja fel az f_1, f_2 és a g_1, g_2 függvények $x_0 = 0$ körüli Taylor sorainak első három nem nulla tagját! Adja meg e sorok konvergencia sugarait!

a.) $2^4\binom{-1/2}{3} = 2^4 \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}$ (1) $= -5$ (1) (egész)

b.) $f_1(x) = (1+x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^n = 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2}x^2 + \dots$ (2)

$R_1 = 1$ (1)

$f_2(x) = (1 + (-x^2))^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n}(-x^2)^n = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \dots$ (1)

$|-x^2| < 1$, $R_2 = 1$ (1)

$g_1(x) = \int_0^x f_2(x)\,dx = \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \dots\right) dx =$

$[0,x] \subset (-1,1)$-ben szabad tagonként integrálni

$= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \dots$ (2) $\quad R_3 = R_2 = 1$ (1)

$g_2(x) = g_1(2x^3) = 2x^3 + \frac{1}{6}2^3x^9 + \frac{3}{40}2^5x^{15} + \dots$ (1)

$|2x^3| < 1$ (1) $\Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; $\quad R_4 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (1)

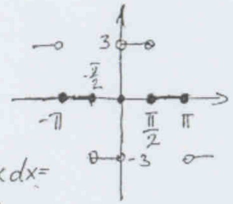
feladat (12 pont)

a) Hogyan definiáljuk a 2π szerint periodikus, Riemann-integrálható függvények skaláris szorzatát?

b) Határozza meg az alábbi függvény Fourier sorát!

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x\in[-\pi,-\pi/2]\cup[\pi/2,\pi] \\ -3, & \text{ha } x\in(-\pi/2,0) \\ 0, & \text{ha } x=0 \\ 3, & \text{ha } x\in(0,\pi/2) \end{cases} \qquad f(x)=f(x+2\pi),\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

a.) $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,dx$ (1)



b.) f páratlan $\Rightarrow a_k=0$ (1) ; $k=0,1,\dots$

$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cdot\sin kx}_{\text{prtl. prtl.}}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin kx\,dx=$ (1)

képlet: (1) ps (1)

$=\frac{2}{\pi}\cdot 3\int_0^{\pi/2}\sin kx\,dx=\frac{6}{\pi}\left.\frac{-\cos kx}{k}\right|_0^{\pi/2}=-\frac{6}{k\pi}\left(\cos k\frac{\pi}{2}-1\right)=$ (1) (2)

$$=\begin{cases}\frac{6}{k\pi}, & \text{ha } k=2l-1\\ \frac{12}{k\pi}, & \text{ha } k=4l+2\\ 0, & \text{ha } k=4l\end{cases}$$ (2)

$f\sim\phi^f(x)=\frac{6}{\pi}\left(\sin x+\frac{2}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{2}{6}\sin 6x+\dots\right)$ (2)

Folytonossági helyeken: $f(x)=\phi(x)$

Szakadási helyeken: $\phi(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

$\Rightarrow f(x)=\phi(x)$, ha $x\neq\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$0=f(\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi)\neq\phi(\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi)=\pm\frac{3}{2}\qquad(k\in\mathbb{Z})$

5. feladat (16 pont)

$$f(x,y)=\frac{e^{4y-x^2}}{y^2+1}$$

a) Totálisan deriválható-e az f függvény a $P(-2,1)$ pontban?

b) $\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{(-2,1)}=?$, ha $\underline{e}\parallel[-3,4]$

c) Írja fel a P ponthoz tartozó érintősík egyenletét!

d) $df((-2,1),(dx,dy))=?$

a.) $f'_x=\frac{1}{y^2+1}\,e^{4y-x^2}\,(-2x)$ (2)

$f'_y=\frac{4e^{4y-x^2}(y^2+1)-e^{4y-x^2}\cdot 2y}{(y^2+1)^2}$ (2)

K_P-ben léteznek és folytonosak $\Rightarrow \operatorname{grad} f|_P\ \exists$ (2)

(Egyébként mindenhol $\exists$ grad f)

b.) $\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_P=\operatorname{grad} f|_P\cdot\underline{e}$ (1) alkalmazható.

$f'_x(P)=2$; $f'_y(P)=\frac{4\cdot 2-2}{4}=\frac{3}{2}$: $\operatorname{grad} f(P)=2\underline{i}+\frac{3}{2}\underline{j}$ (1)

$\underline{e}=\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}=\frac{-3\underline{i}+4\underline{j}}{\sqrt{9+16}}=-\frac{3}{5}\underline{i}+\frac{4}{5}\underline{j}$ (1)

$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_P=\left(2\underline{i}+\frac{3}{2}\underline{j}\right)\left(-\frac{3}{5}\underline{i}+\frac{4}{5}\underline{j}\right)=-\frac{6}{5}+\frac{6}{5}=0$ (2)

c.) $f'_x(P)\,(x-(-2))+f'_y(P)(y-1)-(z-\underbrace{f(-2,1)}_{=\frac{1}{2}})=0$ képlet: (1)

$2\,(x+2)+\frac{3}{2}(y-1)-(z-\frac{1}{2})=0$ behelyettesítés: (2)

d.) $df((-2,1),(dx,dy))=f'_x(-2,1)\,dx+f'_y(-2,1)\,dy=$

$=2\,dx+\frac{3}{2}\,dy$ (2)

feladat (16 pont)

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\,\sin\dfrac{x^2+y}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ , & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Folytonos-e az f függvény az origóban?
b) $f'_x(0,0)=?$, $f'_y(0,0)=?$
c) Totálisan deriválható-e az f függvény az origóban?
d) $\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{(0,0)}=?$, ha $\underline{e}=[1,0]$

a.) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{(x+y)}_{\to 0\ (1)}\ \underbrace{\sin\frac{x^2+y}{x^2+y^2}}_{\text{korl. } (1)} = 0 = f(0,0)$ (1) folytonos (1)

b.) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$ (1) $=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h\sin 1-0}{h}$ (1) $=\sin 1$ (1)

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k}$ (1) $=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{k\sin\frac1k-0}{k}$ (1) $=\lim\limits_{k\to0}\sin\frac1k\ \nexists$ (2)

c.) $\nexists\ f'_y(0,0) \Rightarrow (0,0)$-ban nem tot. deriválható! (2)

d.) (b) -vel:

$\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{f(\underline{e}t)-f(\underline{0})}{t}=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=$ (1)

$=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{t\sin1-0}{t}=\sin 1\ \ (=f'_x(0,0))$ (2)

7. feladat (8 pont)

$g(x,y)=f(x^3+y^2)$, $f\in C^2_{\mathbb{R}}$ (egyváltozós)

$g'_x=?$, $g'_y=?$, $g''_{xy}=?$, $g''_{xx}=?$

$g'_x=f'(x^3+y^2)\cdot3x^2$ (2) $g'_y=f'(x^3+y^2)\cdot 2y$ (2)

$g''_{xy}=f''(x^3+y^2)\cdot2y\cdot3x^2$ (2)

$g''_{xx}=f''(x^3+y^2)\cdot3x^2\cdot3x^2+f'(x^3+y^2)\cdot6x$ (2)

8. feladat (12 pont)

$$f(x,y)=(x-y)^2-(y^2-2y+5)^2$$

Van-e lokális szélsőértéke f-nek?

$f'_x=2(x-y)=0$ (1) (1) Szüks. felt.: (1)

és $f'_y=-2(x-y)-2(y^2-2y+5)(2y-2)=0$ (1) (2)

(1) : $y=x$

(2) $-2\,(\underbrace{(y-1)^2+4}_{0})\,2(y-1)=0 \Rightarrow y=1$ és $x=1$ (2)

$P_0(1,\ 1)$-ben lehet lok. sz.é.

$f''_{xx}=2$ (1) $f''_{xy}=f''_{yx}=-2$ (1)

$f''_{yy}=2-2(2y-2)^2-2((y-1)^2+4)\cdot2$ (1) $f''_{yy}(1,1)=-14$

$D|_{P_0}=\begin{vmatrix}2&-2\\-2&-14\end{vmatrix}=-24<0$ (2) : nincs lok. szélsőértéke f-nek. (2)

Pótfeladat (csak az elégségeshez javítjuk ki):

9. feladat (10 pont)

Határozza meg az alábbi hatványsor konvergenciasugarát, konvergencia tartományát, majd adjon meg egy olyan intervallumot, amelyen a konvergencia egyenletes!

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{3n}\,(4-x)^n}{2^{2n}}$$

$\sum\limits_1^\infty \dfrac{(-1)^n n\sqrt{3n}}{4^n}(x-4)^n$ $x_0=4$; $a_n=\dfrac{(-1)^n n\sqrt{3n}}{4^n}$ (1)

$\lim\sqrt[n]{|a_n|}=\dfrac{\sqrt[n]{n}\ \sqrt[n]{\sqrt3}\ \sqrt{\sqrt[n]{n}}}{4}=\dfrac{1\cdot1\cdot1}{4}=\dfrac14=\dfrac1R\Rightarrow R=4$ (3) (1)

$(4-4,\ 4+4)=(0,8)$

Végpontok: $x=0$ $\sum\limits^\infty n\sqrt{3n}$ div. (ált. tag $\not\to0$) (1)

$x=8$ $\sum\limits^\infty(-1)^n n\sqrt{3n}$ div — " — (1)

$\Rightarrow$ K.T. : $(0,8)$ (1)

$[\alpha,\beta]\subset(0,8)$ esetén $[\alpha,\beta]$-n a konvergencia egyenletes.
Pl. $[1,2]$ (2)