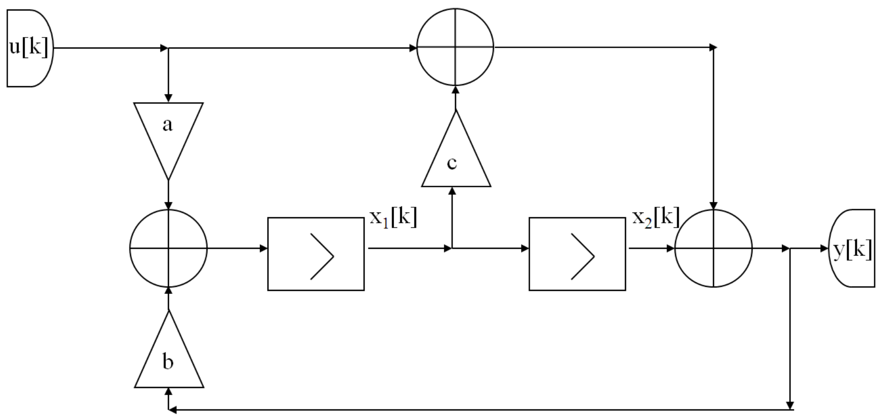
Jelek és rendszerek (VIHVA214)

1. zárthelyi **A** *csoport*
2011.10.17.

Név (olvashatóan)	
Aláírás	Neptun kód

	Pontszám	Javító
Nagypélda		
Kispélda		
Összesen		

Nagypélda (Megoldását külön lapra kérjük!)
A diszkrét idejű rendszer az alábbi jelfolyam hálózattal adott.



1. Adja meg a rendszer állapotváltozós leírását normál alakban az ábrán feltüntetett állapotváltozók segítségével a= 0,92; b= 0,08; c= –7,5 paraméter értékek mellett! Vizsgálja meg a rendszer stabilitását! /10 pont/
2. Adja meg a rendszer impulzusválaszának formuláját! /10 pont/
3. Az a, b, c paraméterek valamely értékei mellett a rendszer impulzusválasza: $h[k] = \varepsilon[k-1]\left(2(0{,}4)^{k-1} + 5(0{,}2)^{k-1}\right) + \delta[k]$. Adja meg a válaszjel k = 0..7 ütemekhez tartozó értékét, ha a gerjesztés $u[k] = \varepsilon[k-5]$ /10 pont/

Megoldás:
1.

$$\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}6 & 0{,}08 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u[k]$$ **/5 pont**

$$y[k] = \begin{bmatrix} -7{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} + u[k]$$ **/3 pont**

A karakterisztikus polinom:

$$\begin{vmatrix} \lambda + 0{,}6 & -0{,}08 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 0{,}6\lambda - 0{,}08$$ **/1 pont**

Jury kritérium alapján:

$1 + 0{,}6 - 0{,}08 > 0$

$1 - 0{,}6 - 0{,}08 > 0$ Teljesül, vagyis a rendszer ASZ stabil, így G-V stabil is. **/1 pont**

$|-0{,}08| < 1$

Vagy a sajátértékek alapján:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-0,6 \pm \sqrt{0,6^2 - 4(-0,08)}}{2} = \frac{-0,6 \pm \sqrt{0,68}}{2}$$

$\lambda_1 = -0,712$

$\lambda_2 = 0,112$

DI rendszer ASZ stabilis, ha $|\lambda_i| < 1$, így a rendszer ASZ stabil, tehát G-V stabil is. **/1 pont**

2.

$$h[k] = \varepsilon[k-1]\underline{C}^T \underline{\underline{A}}^{k-1}\underline{B} + D\delta[k] = \varepsilon[k-1]\left(\underline{C}^T \lambda_1^{k-1}\underline{\underline{L}}_1\underline{B} + \underline{C}^T \lambda_2^{k-1}\underline{\underline{L}}_2\underline{B}\right) + D\delta[k]$$

$$\underline{\underline{L}}_1 = \frac{\underline{\underline{A}} - \lambda_2 \underline{\underline{I}}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{-0,824}\begin{bmatrix} -0,712 & 0,08 \\ 1 & -0,112 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,864 & -0,097 \\ -1,214 & 0,136 \end{bmatrix}$$ **/2 pont**

$$\underline{\underline{L}}_2 = \frac{\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{I}}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1}{0,824}\begin{bmatrix} 0,112 & 0,08 \\ 1 & 0,712 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,136 & 0,097 \\ 1,214 & 0,864 \end{bmatrix}$$ **/2 pont**

$$\underline{C}^T \underline{\underline{L}}_1 \underline{B} = \begin{bmatrix} -7,5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,864 & -0,097 \\ -1,214 & 0,136 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7,5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,864 \\ -1,214 \end{bmatrix} = -6,48 - 1,214 = -7,694$$

/2 pont

$$\underline{C}^T \underline{\underline{L}}_2 \underline{B} = \begin{bmatrix} -7,5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,136 & 0,097 \\ 1,214 & 0,864 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7,5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,136 \\ 1,214 \end{bmatrix} = -1,02 + 1,214 = 0,194$$ **/2 pont**

$$h[k] = \delta[k] + \varepsilon[k-1]\left(-7,694(-0,712)^{k-1} + 0,194(0,112)^{k-1}\right)$$ **/2 pont**

3.

$$h[k] = \delta[k] + \varepsilon[k-1]\left(2(0,4)^{k-1} + 5(0,2)^{k-1}\right) \qquad u[k] = \varepsilon[k-5]$$

Az $\varepsilon[k-5]$-re a válasz megegyezik az $u[k] = \varepsilon[k]$-re adott válasszal, csak 5 ütemmel eltolva.

$y[k] = 0 \quad k = 0..4$ idáig: **4 pont**

$y[0] = h[0]u[0] \quad y[1] = h[0]u[1] + h[1]u[0] \quad y[2] = h[0]u[2] + h[1]u[1] + h[2]u[0]$

k	$h[k]$	$u[k]$	$y[k]$
5	1	1	1
6	7	1	8
7	1,8	1	9,8

6 pont

Tehát: $y[5] = 1 \quad y[6] = 8 \quad y[7] = 9,8$

<u>*Vagy másképpen:*</u>

Kiszámoljuk $u[k] = \varepsilon[k]$ gerjesztésre adott választ konvolúcióval, majd eltoljuk 5 ütemmel és behelyettesítünk.

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]u[k-i] = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\delta[i] + \varepsilon[i-1]\left(2(0,4)^{i-1} + 5(0,2)^{i-1}\right)\right)\varepsilon[k-i] =$$

$$= \varepsilon[k] + \sum_{i=1}^{k} 2(0,4)^{i-1} + 5(0,2)^{i-1} = \varepsilon[k] + \sum_{i=1}^{k} 2\frac{0,4^i}{0,4} + 5\frac{0,2^i}{0,2} = \varepsilon[k] + \left\{5\sum_{i=1}^{k} 0,4^i + 25\sum_{i=1}^{k} 0,2^i\right\}\varepsilon[k-1] =$$

$$= \varepsilon[k] + \left\{5\left(\frac{1-0,4^{k+1}}{1-0,4} - 1\right) + 25\left(\frac{1-0,2^{k+1}}{1-0,2} - 1\right)\right\}\varepsilon[k-1] =$$

$$= \varepsilon[k] + \varepsilon[k-1]\left\{\frac{25}{3}\left(1-0{,}4^{k+1}\right) - 5 + 31{,}25\left(1-0{,}2^{k+1}\right) - 25\right\} =$$

$$= \varepsilon[k] + \varepsilon[k-1]\left\{\frac{115}{12} - \frac{25}{3}0{,}16 \cdot 0{,}4^{k-1} - \frac{125}{4}0{,}04 \cdot 0{,}2^{k-1}\right\}$$ **/7 pont**

Ebbe az eredménybe behelyettesítve a k=0, 1, 2 értékeket, vagy az eredményt eltolva 5 ütemmel, vagyis k helyébe mindenhova (k-5)-t írva a k=5, 6, 7 értékeket behelyettesítve visszakapjuk az $y[5]=1 \quad y[6]=8 \quad y[7]=9{,}8$ eredményt. **/3 pont**

<u>*Vagy másképpen:*</u>
(a nyers erőt használva)

$y[0] = h[0]u[0]$

$y[1] = h[0]u[1] + h[1]u[0]$

$y[2] = h[0]u[2] + h[1]u[1] + h[2]u[0]$

$y[3] = h[0]u[3] + h[1]u[2] + h[2]u[1] + h[3]u[0]$

$y[4] = h[0]u[4] + h[1]u[3] + h[2]u[2] + h[3]u[1] + h[4]u[0]$

$y[5] = h[0]u[5] + h[1]u[4] + h[2]u[3] + h[3]u[2] + h[4]u[1] + h[5]u[0]$

$y[6] = h[0]u[6] + h[1]u[5] + h[2]u[4] + h[3]u[3] + h[4]u[2] + h[5]u[1] + h[6]u[0]$

$y[7] = h[0]u[7] + h[1]u[6] + h[2]u[5] + h[3]u[4] + h[4]u[3] + h[5]u[2] + h[6]u[1] + h[7]u[0]$

k	$h[k]$	$u[k]$	$y[k]$
0	1	0	0
1	7	0	0
2	1,8	0	0
3	0,52	0	0
4	0,168	0	0
5	0,0592	1	1
6	0,02208	1	8
7	0,008512	1	9,8

Kispéldák (A megoldást a feladat szövege alá írja! Minden kispélda 2 pontot ér. Csak a végeredményt kérjük odaírni, a levezetésre, részeredményekre részpontszám nem jár!)

1. Mikor nevezünk egy rendszert lineárisnak?

Egy rendszer akkor lineáris, ha az $y = \mathscr{W}\{u\}$ explicit gerjesztés-válasz kapcsolatában szereplő $\mathscr{W}$ operátor lineáris, vagy ha a rendszerre érvényes a szuperpozíció elve.

Másik megoldás:

Jelölje a rendszernek az u_a, illetve az u_b gerjesztéshez tartozót válaszát y_a, illetve y_b. Ha az $u = C_a u_a + C_b u_b$ gerjesztéshez $y = C_a y_a + C_b y_b$ válasz tartozik bármely C_a és C_b esetén, akkor (és csakis akkor) a rendszer lineáris.

2. Adja meg egy lineáris, invariáns, kauzális FI rendszer válaszát $u(t)$ gerjesztésre, ha ismert $h(t)$ impulzusválasz függvénye!

$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)u(\tau)d\tau$, vagy $y(t) = \int_{0}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau$

3. Adja meg egy $x(t) = X\cos(4t)$ deriváltjának komplex amplitúdóját!

$\overline{X} = 4Xe^{-j\frac{3\pi}{2}} = 4Xe^{j\frac{\pi}{2}}$ Helyes amplitúdó: **1 pont**; helyes fázis: **1 pont**.

4. A gerjesztés és az átviteli karakterisztika ismeretében adja meg a rendszer válaszát!

$u(t) = \frac{2}{3}\sin\left(\sqrt{2}t\right)$ $\quad H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$

$\omega = \sqrt{2}$ $\quad H(j\omega)\big|_{\omega=\sqrt{2}} = \frac{1}{j\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-j0{,}955}$ $\quad \overline{U} = \frac{2}{3}e^{-j\frac{\pi}{2}}$

$$\overline{Y} = \frac{2}{3}e^{-j\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-j0{,}955} = 0{,}385e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+0{,}955\right)}$$

$$y(t) = 0{,}385\cos\left(\sqrt{2}t - \frac{\pi}{2} - 0{,}955\right) = 0{,}385\sin\left(\sqrt{2}t - 0{,}955\right)$$

5. Egy DI rendszer impulzusválasza: $h[k] = \varepsilon[k]0{,}4^k$. Határozza meg a rendszer $u[k] = (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-3])0{,}6^k$ gerjesztésre adott válaszát!

Írjuk át a gerjesztést:

$$u[k] = (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-3])0{,}6^k = \varepsilon[k]0{,}6^k - 0{,}6^3\varepsilon[k-3]0{,}6^{k-3} = \varepsilon[k]0{,}6^k - 0{,}216\varepsilon[k-3]0{,}6^{k-3}$$

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[k-i]u[i] = \sum_{-\infty}^{\infty} \varepsilon[k-i]0{,}4^{k-i}\varepsilon[i]0{,}6^i = 0{,}4^k\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{0{,}6}{0{,}4}\right)^i =$$

$$0{,}4^k\frac{\left(\frac{0{,}6}{0{,}4}\right)^{k+1} - 1}{\left(\frac{0{,}6}{0{,}4}\right) - 1} = \frac{0{,}6^k\left(\frac{0{,}6}{0{,}4}\right) - 0{,}4^k}{\left(\frac{0{,}6}{0{,}4}\right) - 1} = \varepsilon[k]\left(3\cdot 0{,}6^k - 2\cdot 0{,}4^k\right)$$

A válasz tehát:

$$y[k] = \varepsilon[k]\left(3\cdot 0{,}6^k - 2\cdot 0{,}4^k\right) - 0{,}216\varepsilon[k-3]\left(3\cdot 0{,}6^{k-3} - 2\cdot 0{,}4^{k-3}\right)$$