Felsőbb matematika vizsga – 2011-01-03

Név ______________________________ **Neptun** __________

Minden feladat 1 pontot ér, kivéve ha meg van adva a pontszám. Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán segédeszköz nem használható.

1. Mit értünk egy vektortér dimenzióján?

a belőle kiválasztható maximális lineárisan független vektorrendszer elemszámát.

2. Legyen adva az $\mathbb{R}$ test fölötti $\mathcal{V}$ vektortér! Mit jelent az, hogy a $\mathcal{V}$ vektortér euklideszi tér?

Hogy definiálva van $\mathcal{V}$-n egy skaláris szorzatnak nevezett $\langle .,. \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}$ függvény, hogy
$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$
$\langle \lambda\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \lambda \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$
$\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$

3. Adva az $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontása és a $\mathbf{b}$ vektor:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert az LU-felbontás felhasználásával. Írjuk a keretbe a megoldandó egyenletrendszereket, és azok megoldásvektorait!

$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, $\mathbf{y} = (2, -2, 4)$,
$\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$, $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$.

4. Adjuk meg az $\left\{ \begin{array}{c} x + y = 3 \\ 3x + 3y = 5 \\ 2x + 2y = 5 \end{array} \right\}$ egyenletrendszer optimális, minimális abszolút értékű megoldását!

A megoldás $x = y = 1$. (A normálegyenlet $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$, amiből $14x + 14y = 28$. A sorteret pedig az $(1,1)$ vektor generálja. Egy másik megoldás pszeudoinverzzel: $\frac{1}{28}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.)

5. Írjuk fel az $e^{\mathbf{J}}$ mátrixot, ha

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$e^3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Egy 11×11-es $\mathbf{A}$ mátrixnak λ 11-szeres algebrai multiplicitású sajátértéke. $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 6, 3, 1, 0. Mennyi a Jordan-láncok száma? Milyen hosszú a leghosszabb lánc? Rajzoljuk le a Jordan-láncokat! *(2 pont)*

A Jordan-láncok száma $n - \mathrm{r}(\mathbf{A}) = 11 - 6 = 5$. A leghosszabb lánc hossza 4 ($\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ legkisebb $\mathbf{O}$-t adó hatványa).

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet \\ \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet & & \\ \bullet & \longleftarrow & \bullet & & & & \\ \bullet & & & & & & \\ \bullet & & & & & & \end{array}$$

7. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását Givens-forgatással!

$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/13 & 12/13 \\ 0 & -12/13 & 5/13 \end{bmatrix}$, $\mathbf{R} = \mathbf{Q}_1'\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & 13 & 12 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

8. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy mátrix *(a)* diagonalizálható *(b)* unitéren diagonalizálható, *(c)* ortogonálisan diagonalizálható legyen? *(1.5 pont)*

Hogy *(a)* létezik a mátrix sajátvektoraiból álló bázis, vagy a geometriai multiplicitások megegyeznek az algebraiakkal, *(b)* a mátrix normális, *(c)* szimmetrikus legyen.

9. Soroljon fel legalább három, a mátrixok hasonlóságára nézve invariáns *mennyiséget*! *(1.5 pont)*

mindegyik sajátérték (spektrum), determináns, nyom, rang, nullitás

10. Írjuk fel a $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix szinguláris felbontását!

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11. Számítsuk ki az $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix pszeudoinverzét!

Számolható pl. az $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$ képlettel:
$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

12. Az $3x^2+8xy+5y^2+10x+12y+30=0$ egyenletű görbének parabola, hiperbola vagy ellipszis a képe? Melyik mátrix vizsgálatával állapítjuk ezt meg, és hogyan?

Hiperbola, mert különböző előjelűek a sajátértékei.

13. Primitívek-e az alábbi mátrixok? Válaszunkat röviden indokoljuk! *(2 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 8 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Mindegyik mátrix irreducibilis. $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$, tehát sosem lesz pozitív, így nem primitív. $\mathbf{B}^2$ nem irreducibilis, így $\mathbf{B}^{2n}$ sem, tehát nem primitív. $\mathbf{C}$ irreducibilis, és van a főátlójában pozitív elem, tehát primitív. $\mathbf{D}^5 > \mathbf{O}$, tehát primitív.

14. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ pozitív elemű és minden oszlopában s az oszlopösszeg, akkor s a spektrálsugár. *(3 pont)*

$\mathbf{A}^T$-nek sajátvektora $\mathbf{1}$, a hozzá tartozó sajátérték s. Mivel $\mathbf{1} > \mathbf{0}$, ezért e sajátvektor Perron-tétele szerint csak a Perron-vektor skalárszorosa lehet s-sel, mint sajátértékkel, és ekkor ez a spektrálsugár.

15. Igazoljuk, hogy különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek! *(3 pont)*

16. Igazoljuk a szinguláris felbontás létezésére vonatkozó tételt! *(3 pont)*