$$r'_\varphi \times r'_\theta = \begin{vmatrix} & j & \\ -2\sin\theta\sin\varphi & 2\sin\theta\cos\varphi & k \\ 2\cos\theta \ldots & & 0 \end{vmatrix}$$

2. Vizsgazárthelyi megoldásokkal 2006/07 A3

1. Oldja meg az $y'(x) + 3x^2 y(x) = x^2$ differenciálegyenletet Laplace-transzformáció alkalmazása nélkül!

MO. A homogén: $y' + 3x^2 y = 0 \leadsto \int \frac{dy}{y} = -\int 3x^2\,dx \leadsto \ln|y| = -x^3 + c \leadsto y = ce^{-x^3}$, vagyis a homogén általános megoldása: $y_{há} = ce^{-x^3}$. Az inhomogén az állandók variálásával: $y(x) = d(x)e^{-x^3} \leadsto$ $\leadsto d'e^{-x^3} - 3x^2 de^{-x^3} + 3x^2 de^{-x^3} = x^2 \leadsto d'e^{-x^3} = x^2 \leadsto d' = x^2 e^{x^3} \leadsto d(x) = \int x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}e^{x^3} \leadsto$ $\leadsto y = \frac{1}{3}e^{x^3}e^{-x^3} = \frac{1}{3}$. Így az inhomogén egy partikuláris megoldása: $y_{ip} = \frac{1}{3}$, amivel az inhomogén általános megoldása: $y_{iá} = y_{há} + y_{ip} = \frac{1}{3} + ce^{-x^3}$.

---

2. Legyen G a háromdimenziós térben az origóközéppontú R sugarú felső félgömbfelületből és az azt alulról lezáró origóközéppontú R sugarú $[x, y]$ síkbeli körlapból álló kifelé irányított zárt felület. Számítsuk ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}|\mathbf{r}|^3$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény felületmenti integrálját G-n!

MO. Legyen $v(r) = r|r|^3$, n a gömb normálisa, v_n pedig v-nek n-re eső vetülete. Ekkor a félgömbön:

$$\int_G v\,df = \int_G v_n\,|df| = \int_G |r|^4\,|df| = \int_G R^4\,|df| = R^4 \int_G |df| = R^4|G| = R^4 \cdot 2R^2\pi = 2R^6\pi$$

(VAGY : Gauss–Osztrogradszkijjal: $\operatorname{div} r|r|^3 = |r|^3 \operatorname{div} r + r \cdot \operatorname{grad}|r|^3 = 3|r|^3 + r \cdot 3|r|^2 \frac{r}{|r|} = 6|r|^3 \leadsto$

$$\leadsto \int_G r|r|^3\,df = \int_V 6|r|^3\,dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^R\int_0^{2\pi} 6r^3 \cdot r^2 \sin\theta\,d\varphi\,dr\,d\theta = 6 \cdot 2\pi \frac{R^6}{6}\left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi/2}\right) = R^6 \cdot 2\pi \cdot 1 = 2R^6\pi$$

A körlapon pedig az integrál 0, mert annak normálisa: $-k \perp r \| v$, hisz $r \in [x, y]$ a körlapon.
(A jelölések: k a z irányú egységvektor, $\int_F v\,df$ a v felületmenti, $\int_F v\,|df|$ a v felszín szerinti integrálja. Felhasználtuk, hogy $\int_F v\,df = \int_F v_n\,|df|$, ahol v_n a v-nek a felületi normálisra eső vetülete.)

---

3. Határozza meg a $v(x, y, z) = (2xy, x^2 + 4yz, 2y^2)$ skalárpotenciálját!

MO. $u_x = 2xy \leadsto u = x^2y + c(y, z) \leadsto x^2 + 4yz = u_y = x^2 + c_y \leadsto c = 2y^2z + d(z) \leadsto u = x^2y + 2y^2z + d(z) \leadsto 2y^2 = u_z = 2y^2 + d' \leadsto d = const. \leadsto u = x^2y + 2y^2z + const.$

---

4. $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{z^4} - 1}{z^4(z-1)}\,dz = ?$

MO. Legyen K_0 és K_1 az origó és a $z = 1$ körüli 1/3 sugarú körök. Ekkor $\displaystyle\int_{K_0} \frac{1}{z-1}\frac{e^{z^4}-1}{z^4}\,dz = 0$ mivel $\displaystyle\frac{e^{z^4}-1}{z^4} \xrightarrow[z \to 0]{} 1$, tehát az argumentumnak megszüntethető szakadása van az origóban. Másrészt, a Cauchy-integrálformulával $\displaystyle\int_{K_1} \frac{\frac{e^{z^4}-1}{z^4}}{z-1}\,dz = 2\pi j \left.\frac{e^{z^4}-1}{z^4}\right|_{z=1} = 2\pi j(e-1)$ Következésképp:

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{z^4}-1}{z^4(z-1)}\,dz = \int_{K_0} \frac{\frac{e^{z^4}-1}{z^4}}{z-1}\,dz + \int_{K_1} \frac{1}{z-1}\frac{e^{z^4}-1}{z^4}\,dz = 2\pi j(e-1)$$

---

5. Legyen minden $z \neq 0$ esetén $f(z) = \dfrac{\frac{\sin z}{z} - 1}{z}$. Folytonossá tehető-e az f függvény az origóban? Ha igen, a folytonosított változat deriválható-e az origóban? Ha igen, mennyi a derivált értéke?

MO. $\sin z$ Taylor-sora: $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots \leadsto f(z) = \frac{\frac{\sin z}{z} - 1}{z} = -\frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} \ldots$ ha $z \neq 0 \leadsto f(0) \doteq 0$ esetén f egy mindenütt konvergens hatványsor határfüggvénye, így mindenütt akárhányszor deriválható, Taylor-sora az őt előállító hatványsor $\leadsto f'(0) = -\frac{1}{6}$.

6.
(a) Mit nevezünk egy függvény Laplace-transzformáltjának?
(b) Fogalmazza meg a (háromdimenziós) Gauss–Osztrogradszkij-tételt!
(c) Fogalmazza meg a Cauchy-integráltételt!

MO. (a) Legyen f definiálva a jobboldali félegyenesen. Az $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ az f Laplace-transzformáltja (mely azokon az s-eken értelmezett, amelyre az $F(s)$ konvergens improprius integrál, pl. $s > \alpha$ esetén, ha f minden véges intervallumon integrálható és van olyan M, T valósok, hogy $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ minden $t \geq T$).
(b) Legyen F zárt kifele irányított felület és legyen v folytonosan deriválható F-en és az F által bezárt V térrészen. Ekkor $\int_F v\,df = \int_V \operatorname{div} v\,dV$.
(c) Ha egy komplex függvény reguláris egy egyszeresen összefüggő tartományon, akkor a tartományba eső tetszőleges rektifikálható/sima zárt egyszerű görbén vett integrálja 0.