

1. Legyen $\mathbf{A}$ az alábbi mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Számítsa ki az $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ szorzatot, majd számítsa ki $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)$ -t!

Megoldás: Azon összeadandókat, melyeknek legalább egyik tényezője 0 elhagyva:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 6 \cdot 6 + (-2)(-2) + 1 \cdot 1 & (-2)3 + 1(-2) & 1 \cdot 2 \\ 3(-2) + (-2)1 & 3 \cdot 3 + (-2)(-2) & -2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 & 2(-2) & 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & -8 & 2 \\ -8 & 13 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

A determinánsok szorzástétele miatt $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}^T)$. Másrészt a transzponálás a determináns értékét nem változtatja, így $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$. Azaz elegendő $\mathbf{A}$ determinánsát kiszámítani.

$\mathbf{A}$ egy felső háromszög mátrix, így a determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata, azaz $6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$. Innen $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = 36^2 = 1296$.

2. Számítsa ki az alábbi sorozat határértékét!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\frac{5n^2 + n}{2n^2 - n}}$$

Megoldás: Rendőr-elvvel kell dolgoznunk.

$$\sqrt[n]{\sqrt[n]{\frac{5}{2}}} = \sqrt[2n]{\frac{5}{2}} \leq \sqrt[2n]{\frac{5n^2}{2n^2}} \leq \sqrt[2n]{\frac{5n^2 + n}{2n^2 - n}} \leq \sqrt[2n]{\frac{5n^2 + n^2}{2n^2 - n^2}} = \sqrt[2n]{6} = \sqrt[n]{\sqrt{6}}$$

Mivel minden $p \in \mathbb{R}^+$ konstansra $\sqrt[p]{p} \rightarrow 1$, továbbá nemnegatív tagú sorozatokra $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{A}$, így az alsó és felső becslés is 1-hez tart, azaz a rendőr-elv miatt az eredeti határérték is 1.

3. Oldja meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$-2iz^3 = 16$$

Megoldás: Átosztva $-2i$ -vel:

$$z^3 = \frac{16}{-2i} = \frac{16}{-2i} \frac{i}{i} = 8i.$$

Azaz az egyenlet megoldásai a $8i$ szám köbgyökei. Ezek kiszámításához írjuk át trigonometrikus alakba $8i$ -t:

$$8i = 8 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right).$$

Innen a köbgyököket a

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

képletből nyerhetjük n helyébe hármat helyettesítve, így

$$z_{1,2,3} = \sqrt[3]{8} \left(\cos \left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) \right) = 2 \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_3 = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right) \right) = 2 \left(\cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) \right) = -2i$$

4. Számítsa ki az alábbi függvény határértékét!

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x \sin(x)}$$

Megoldás:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x \sin(x)} \frac{\cos(x) + 1}{\cos(x) + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{x \sin(x)(1 + \cos(x))} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2(x)}{x \sin(x)(1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{x} \frac{1}{1 + \cos(x)} = -1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$$

5. Határozza meg az alábbi függvény folytonossági pontjait, szakadási pontjait és azok típusát!

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2+x-2} + 2 & \text{ha } x < 0 \\ \frac{x^2}{x^2+2x+2} & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

Megoldás: Folytonos függvények kompozíciója is folytonos, így a függvénynek csak az illesztési pontban és a nevezők gyökeiben lehet szakadása, a többi pontban folytonos. $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$, innen csak $x = -2$ negatív szám, az $x = 1$ nem jelent problémát, mert abban a pontban más a függvény definíciója. Másrészt $x^2 + 2x + 2$ -nek nincsen gyöke, mert a diszkrimináns negatív. Azaz a vizsgálandó pontok: $x = 0$ és $x = -2$.

Ha $x = -2$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x-1}{x^2+x-2} + 2 = \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} + 2 = \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{\overset{\rightarrow 1}{1}}{\underbrace{x+2}_{\rightarrow 0+}} + 2 = \infty$$

(Az utolsó előtti egyenlőség csak $x \neq 1$ esetén igaz, de a határérték számításakor csak a -2 környezeteit vizsgáljuk, így feltehető, hogy $x \neq 1$.) Mivel ezen határérték

jobbról ∞ , így függetlenül a bal határértéktől a függvénynek lényeges szakadása van az $x = -2$ pontban.

Ha $x = 0$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2}{x^2 + 2x + 2} = \frac{0}{0 + 0 + 2} = 0$$

és

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x - 1}{x^2 + x - 2} + 2 = \frac{0 - 1}{0 + 0 - 2} + 2 = \frac{5}{2},$$

így a függvénynek véges ugrása van az $x = 0$ pontban.