ANALÍZIS 1.	**I. ZÁRTHELYI**	**2015. október 15.**
Mérnök informatikus szak	α-variáns	Munkaidő: 50 perc

1. feladat (12 pont)
Adja meg trigonometrikus alakban az

$$z^4 - 2(i+1)z^2 + i = 0$$

egyenlet összes megoldását.

$(z^2)_{1,2} \overset{\mathbf{2p}}{=} \dfrac{2(i+1)+\sqrt{8i-4i}}{2} = i+1+\sqrt{i}$, és mivel $i \overset{\mathbf{1p}}{=} \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, így $\sqrt{i} \overset{\mathbf{2p}}{=} \pm\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

$$z^2 = i+1+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)(i+1) \overset{\mathbf{3p}}{=} (\sqrt{2}+1)\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

egyenlet megoldásai $z_{1,2} \overset{\mathbf{1p}}{=} \pm\sqrt{\sqrt{2}+1}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$, a

$$z^2 = i+1-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(i+1) \overset{\mathbf{2p}}{=} (\sqrt{2}-1)\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

egyenlet megoldásai $z_{3,4} \overset{\mathbf{1p}}{=} \pm\sqrt{\sqrt{2}-1}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

---

2. feladat (7 pont)
A definíció alapján bizonyítsa be, hogy

$$\frac{n^3+5}{n^2+2n} \to \infty.$$

Legyen $P > 0$, olyan $N(P)$ küszöbindexet keresünk, hogy $n \ge N(P)$ esetén $\dfrac{n^3+5}{n^2+2n} > P$ teljesüljön (**2p**). Ehhez elég, ha

$$\frac{n^3+5}{n^2+2n} \ge \frac{n^3}{n^2+2n^2} = \frac{n}{3} > P, \qquad \mathbf{(3p)}$$

vagyis $N(P) = [3P]+1$ jó lesz (sőt, $N(P) = 3P$ is, ha nem követeljük meg, hogy a küszöbindex egész legyen) (**2p**).

3. feladat (6+4 pont)

Határozza meg a következő sorozatok határértékét:

$$a_n = \left(\frac{2n+4}{2n-7}\right)^{6n-1}, \qquad b_n = \frac{n^8 + 8^n - 4^{2n-1}}{n^2 3^n - 2^{4n+1}}.$$

$$a_n \overset{\mathbf{3p}}{=} \left(\frac{\left(1+\frac{4}{2n}\right)^{2n}}{\left(1-\frac{7}{2n}\right)^{2n}}\right)^3 \left(\frac{2n+4}{2n-7}\right)^{-1} \overset{\mathbf{3p}}{\to} \left(\frac{e^4}{e^{-7}}\right)^3 \cdot 1 = e^{33}.$$

$$b_n \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{4^{2n}}{2^{4n}} \cdot \frac{\frac{n^8}{16^n} + \left(\frac{8}{16}\right)^n - \frac{1}{4}}{n^2\frac{3^n}{8^n} - 2} \overset{\mathbf{2p}}{\to} \frac{-\frac{1}{4}}{-2} = \frac{1}{8}.$$

---

4. feladat (11 pont)

Legyen $a_1 = 6$, és $a_{n+1} = \sqrt{12a_n - 35}$

a) Igazolja, hogy a $5 \le a_n \le 7$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

b) Igazolja, hogy a sorozat monoton.

c) Konvergens-e az (a_n) sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

Ha a sorozat konvergens, A határtéke kielégíti az $A = \sqrt{12A - 35}$, vagyis az $A^2 - 12A + 35 = 0$ egyenletet. Ennek megoldásai $A = 5$ és $A = 7$. (**2p**)

a) Sejtés: $5 \le a_n \le 7$. (**1p**) Teljes indukcióval igazoljuk.

   i) $5 \le a_1 = 6 \le 7$. (**1p**)

   ii) $5 \le a_n \le 7 \Longrightarrow 60 \le 12a_n \le 84 \Longrightarrow 25 \le 12a_n - 35 \le 49 \Longrightarrow$
   $5 \le \sqrt{12a_n - 35} = a_{n+1} \le 7$. (**2p**)

b) $a_2 = \sqrt{12 \cdot 6 - 35} = \sqrt{37} \ge 6 = a_1$. Sejtés: a sorozat monoton növő.Teljes indukcióval igazoljuk.

   i) $6 = a_1 \le a_2 = \sqrt{37}$. (**1p**)

ii) $a_n \leq a_{n+1} \Longrightarrow 12a_n \leq 12a_{n+1} \Longrightarrow 12a_n - 35 \leq 12a_{n+1} - 35 \Longrightarrow$ $a_{n+1} = \sqrt{12a_n - 35} \leq \sqrt{12a_{n+1} - 35} = a_{n+2}$. (**2p**)

c) Mivel a sorozat monoton növő és felülről korlátos, így konvergens, és határértéke a legkisebb felső korlátja, ami csak $A = 7$ lehet. (**2p**)

---

5. feladat (6+4 pont)
Határozza meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját és limesz inferiorját.

$$a_n = (-1)^n \cdot \sqrt[n]{\frac{n^2+2n}{n^3+5}}, \qquad b_n = (-1)^n \cdot \sqrt{\frac{n^2+2n}{n^3+5}}.$$

Konvergensek-e a sorozatok?

$$\frac{n^2}{n^3+5n^3} \leq \frac{n^2+2n}{n^3+5} \leq \frac{n^2+2n^2}{n^3}, \text{ (\textbf{2p}) vagyis}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{6n}} \leq a_n \leq \sqrt[n]{\frac{3}{n}} = \sqrt[n]{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}. \qquad \text{(\textbf{1p})}$$

Mivel $p > 0$ esetén $\sqrt[n]{p} \to 1$, $\sqrt[n]{n} \to 1$, és szorzat, illetve hányados határértéke a határértékek szorzata, illetve hányadosa, így a rendőrelv értelmében $\sqrt[n]{\frac{n^2+2n}{n^3+5}} \to 1$. (**1p**) Emiatt $a_{2n} \to 1$, $a_{2n+1} \to -1$, vagyis $S = \{-1, 1\}$, $\limsup a_n = 1 \neq -1 = \liminf a_n$, vagyis a sorozat nem konvergens. (**2p**)

$\frac{n^2+2n}{n^3+5} \to 0$ (lehet hivatkozni arra, hogy a 2. feladatban szereplő sorozat reciproka) (**1p**) , így $\sqrt{\frac{n^2+2n}{n^3+5}} \to 0$, vagyis b_n egy 0-hoz tartó sorozat és egy korlátos sorozat szorzata (**1p**). Emiatt $\lim b_n = 0 = \limsup b_n = \liminf b_n$, és $S = \{0\}$ (**2p**).