Jelek és jelfeldolgozás (BMEVIHVBB01)
2. gyakorlat

Szerkesztette: Dr. Horváth Bálint Péter, BME-HVT

2022.02.24.

MATLAB ismertető

- vektorok és mátrixok megadása, egységmátrix
- vektor és mátrixműveletek (szorzás, inverz, transzponált, sajátértékek, sajátvektorok stb.)
- egyenközű vektor definiálása (0:dt:T)
- mátrixok mérete, vektorok hossza
- ciklusok (for, esetleg while)
- ábrázolás (plot, label, markerek stb.)

Összefoglalás

Folytonos idejű rendszerekben az ÁVLNA:

$$\begin{aligned} \underline{x}'(t) &= \underline{\underline{A}}\,\underline{x}(t) + \underline{B}u(t) \\ y(t) &= \underline{C}^T\underline{x}(t) + \underline{D}u(t) \end{aligned}$$

A válasz mindig kifejezhető:

$$\boxed{y(t_k) = \underline{C}^T\underline{x}(t_k) + Du(t_k)}$$

Előrelépő Euler-séma formulája:

$$\boxed{\underline{x}(t_k + h_k) = \left(\underline{\underline{I}} + h_k\underline{\underline{A}}\right)\underline{x}(t_k) + h_k\underline{B}u(t_k)}$$

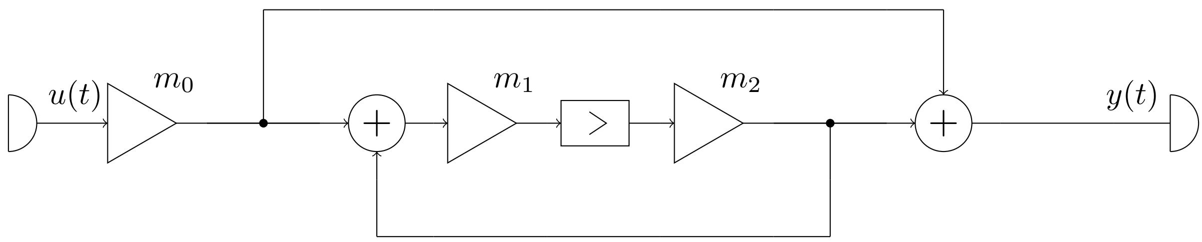
Hátralépő Euler-séma formulája:

$$\boxed{\underline{x}(t_k + h_k) = \left(\underline{\underline{I}} - h_k\underline{\underline{A}}\right)^{-1}\left(\underline{x}(t_k) + h_k\underline{B}u(t_{k+1})\right)}$$

1. Jelfolyamhálózatok vizsgálata

1.1. Feladat

Adjuk meg az alábbi jelfolyamhálózat által reprezentált rendszer állapotváltozós leírásának normálalakját.



Megoldás

Vegyük fel az állapotváltozót a folytonos idejű integrátor kimenetére és jelöljük $x(t)$-vel. Ekkor az integrátor bemenete $x'(t)$. Az állapotváltozós leírás megadásához fejezzük ki $x'(t)$-t. Jól látható, hogy ezt a baloldali összegző m_1-szereseként tudjuk felírni, vagyis:

$$\begin{aligned} x'(t) &= m_1(m_0u(t) + m_2x(t)) \\ &= m_1m_2x(t) + m_1m_0u(t) \end{aligned}$$

A válasz pedig a jobboldali összegző kimeneteként adódik:

$$y(t) = m_2x(t) + m_0u(t)$$

Ebben az egyszerű, elsőrendű esetben e két egyenlet alkotja az állapotváltozós leírás normálalakját.

1.2. Feladat

Ismert az alábbi ábrán látható elsőrendű soros RC tag állapotváltozós leírása, amelynek válasza a kapacitás árama:

$$\begin{aligned} u_c'(t) &= -\frac{1}{RC}u_c(t) + \frac{1}{RC}u(t) \\ y(t) &= -\frac{1}{R}u_c(t) + \frac{1}{R}u(t), \end{aligned}$$

ahol u_c a kapacitás feszültsége, és y a rajta átfolyó áram, ebben az esetben a keresett válasz. A válasz analitikusan meghatározható az U_0 egyenfeszültség bekapcsolása esetén az alábbi időfüggvény: $i(t) = \frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$, ahol $\tau = RC, t \geq 0$. Belátható, hogy a 1.1 feladatban megadott jelfolyamhálózat állapotváltozós leírása megegyzik a fenti rendszerével, amennyiben $m_0 = \frac{1}{R}, m_1 = \frac{1}{C}.m_2 = -\frac{1}{R}$ választással élünk.

a.) Adjuk meg a válasz formuláját az előre- és hátralépő Euler sémával!

b.) A formula alapján számítsuk ki numerikusan (MATLAB, Octave stb. segítségével) a válasz értékét $0 \leq t \leq 5$ sec között, ha $R = 1\text{M}\Omega, C = 1\text{uF}$. A kapcsolási jelenséget tekinthetjük úgy, mint egy gerjesztést, melynek időfüggvénye

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 \\ U_0, & \text{ha } t \geq 0 \end{cases}$$

c.) Hasonlítsuk össze a numerikusan számított választ az analitikus eredménnyel. Vizsgáljuk meg a h_k paraméter megválasztását az eredmény pontosságára.

Megoldás

a.) Azonosítsuk az állapotváltozós leírás mátrixait (jelen esetben ezek mind skalárok):

$$\underline{\underline{A}} = -\frac{1}{RC}, \quad \underline{B} = \frac{1}{RC}, \quad \underline{C}^T = -\frac{1}{R}, \quad D = \frac{1}{R}$$

Ez alapján az előrelépő Euler-módszer:

$$\begin{aligned} u_c(t_k + h_k) &= u_c(t_k) + h_k \left(-\frac{1}{RC} u_c(t_k) + \frac{1}{RC} u(t_k) \right) \\ &= \left(1 - \frac{h_k}{RC} \right) u_c(t_k) + \frac{h_k}{RC} u(t_k) \end{aligned}$$

Hátralépő Euler-módszer:

$$\begin{aligned} u_c(t_k + h_k) &= u_c(t_k) + h_k \left(-\frac{1}{RC} u_c(t_k + h_k) + \frac{1}{RC} u(t_k + h_k) \right) \\ &= \frac{1}{1 + \frac{h_k}{RC}} \left(u_c(t_k) + \frac{h_k}{RC} u(t_k + h_k) \right) \end{aligned}$$

A válasz mindkét esetben :

$$y(t_k) = i_c(t_k) = \frac{1}{R} u_c(t_k) + \frac{1}{R} u(t_k)$$

b.) Végezzük el a közelítő számítást számítógépes program segítségével. Éljünk a $h_k = 0,1$ választással.

```
clear;close all;clc
set(0,'defaultAxesFontSize',16)
% Parameterek
R  = 1e6;        % Ohm
Cs = 1e-6;       % Farad
U0 = 1;          % Volt
% Allapotvaltozos leiras
A = [-1/R/Cs];
B = [ 1/R/Cs];
C = [-1/R];
D = [1/R];
%%
% Euler sema parametere
```

```matlab
hk = 0.1;

% Euler sema kiszamitasa adott idolepessel
% Idointervallum eleje/vege
T_start  = 0;    % sec
T_end  = 5;    % sec
% idovektor letrehozasa
t_vec = T_start:hk:T_end;

%% valtozok inicializalasa
u = ones(1, length(t_vec));
% elorelepo Euler semahoz
x_elore = zeros(length(C), length(t_vec));
y_elore = zeros(1,length(t_vec));
% hatralepo Euler semahoz
x_hatra = zeros(length(C), length(t_vec));
y_hatra = zeros(1,length(t_vec));

% "egysegmatrix"
E = eye(size(A));

%% kezdeti ertekek
x_elore(1,:) = 0;
x_hatra(1,:) = 0;

% Elso lepesben a valasz (a ciklusban az elso lepes ele nem latunk)
y_elore(1) = C*x_elore(:,1) + D*u(1);
y_hatra(1) = C*x_hatra(:,1) + D*u(1);
% ciklus az iterativ szamitashoz
for ii = 2:length(t_vec)
    tk = t_vec(ii);
    x_elore(:,ii) = (E + hk*A)*x_elore(:,ii-1) + hk*B*u(:,ii-1);
    y_elore(ii) = C*x_elore(:,ii) + D*u(ii);

    % !!! inv(E-hk*A)* == (E-hk*A)\
    x_hatra(:,ii) = (E-hk*A)\(x_hatra(:,ii-1) + hk*B*u(:,ii));
    y_hatra(ii) = C*x_hatra(:,ii) + D*u(ii);

end

%% Analitikus megoldas kiertekelese
dt = 0.001;     % sec
t_vec_a = T_start:dt:T_end;

% "analitikus" valasz szamitasa
y_a=U0/R*exp(-t_vec_a./(R*Cs));

y_ha=U0/R*exp(-t_vec./(R*Cs));

e_elore =  abs(y_ha - y_elore).^2 ;
e_hatra =  abs(y_ha - y_hatra).^2;

%% kirajzolas
% osszehasonlitas
figure(1)
plot(t_vec,1e6*y_elore,'k-o','LineWidth',2)
hold on
plot(t_vec,1e6*y_hatra,'b-s','LineWidth',2)
plot(t_vec_a,1e6*y_a,'r--','LineWidth',2)
grid on
```

```
xlabel('Ido [s]')
ylabel('i [uA]')
legend('Elorelepo Euler','Hatralepo Euler','analitikus')
title('Elore- es hatralepo Euler sema ')
%
figure(2)
plot(t_vec,e_elore,'k-o','LineWidth',2)
hold on
grid on
plot(t_vec,e_hatra,'b-s','LineWidth',2)
xlabel('Ido [s]')
ylabel('absz. negyzetes hiba')
legend('Elorelepo Euler','Hatralepo Euler')
title('Kozelitesi hiba')
```

c.) Vizsgáljuk meg milyen hatása van, ha a programban $h_k = \{0.02; 0.1; 0.5\}$ paraméter értékekkel futtatjuk a számítást.

1.3. Feladat

Egy egyenáramú (DC) motor modellezhető egy másodrendű rendszerként, melynek az állapotváltozós leírása:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\omega' \\ i'\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}-\frac{K_e}{J} & \frac{K_b}{J} \\ -\frac{K_t}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega \\ i\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 \\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}u \\ y &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega \\ i\end{bmatrix} + [0]u,\end{aligned}$$

ahol ω a motor szögsebessége és i az armatúra[1] áram, R, L, K_b, J, K_t, K_e pedig sorban a motor ohmos ellenállása, induktivitása, súrlódási együttható, a rotor tehetetlenségi nyomatéka, valamint a motor nyomatékára és sebességére jellemző konstans. Legyenek a paraméter értékek:
$R = 1\Omega, L = 0,5\text{H}, J = 0,01\text{kgm}^2, K_e = 0,03\text{Nms}, K_b = K_t = K = 0,04.$

a.) Adjuk meg a válasz formuláját az előre- és hátralépő Euler sémával!

b.) A formula alapján számítsuk ki numerikusan (MATLAB, Octave stb. segítségével) a válasz értékét $0 \leq t \leq 5$ sec között. A gerjesztés az armatúra feszültsége, melynek időfüggvénye

$$u(t) = \begin{cases} 0\text{V}, & \text{ha } t < 0 \\ 1\text{V}, & \text{ha } t \geq 0 \end{cases}$$

c.) * A rendszer kimeneteként nem a motor szögsebességét, hanem az armatúra áramot szeretnénk megfigyelni. Mit változtassunk az állapotváltozós leíráson? Módosítsuk a programot és oldjuk meg az áramra a feladatot.

d.) * Vizsgáljuk meg a rendszer válaszát az alábbi gerjesztésre is:

$$u(t) = \begin{cases} 0\text{V}, & \text{ha } t < 0 \\ 1\text{V}, & \text{ha } 0 \leq t \leq 2,5 \\ 0,5\text{V}, & \text{ha } 2,5 < t \end{cases}.$$

Megoldás

a.)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix}-\frac{K_e}{J} & \frac{K_b}{J} \\ -\frac{K_t}{L} & \frac{R}{L}\end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix}0 \\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}, \quad \underline{C}^T = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \quad D = 0$$

[1] a DC motor forgórészére tekercselt huzal

Ez alapján az előrelépő Euler-módszer:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t_k+h_k) &= \underline{x}(t_k) + h_k\left(\underline{\underline{A}}\ \underline{x}(t_k) + \underline{B}u(t_k)\right) \\ &= \left(\underline{\underline{I}} + h_k\underline{\underline{A}}\right)\underline{x}(t_k) + h_k\underline{B}u(t_k) \end{aligned}$$

Hátralépő Euler-módszer:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t_k+h_k) &= \underline{x}(t_k) + h_k\left(\underline{\underline{A}}\ \underline{x}(t_k+h_k) + \underline{B}u(t_k+h_k)\right) \\ &= \left(\underline{\underline{I}} - h_k\underline{\underline{A}}\right)^{-1}\left(\underline{x}(t_k) + h_k\underline{B}u(t_k+h_k)\right) \end{aligned}$$

b.) Az Euler módszer univerzalitását mutatja, hogy a feladat numerikus megoldásához elég módosítanunk a 1.2 feladat kódját úgy, hogy megadjuk a paraméterek értékét, valamint az $\underline{\underline{A}}, \underline{B}, \underline{C}^T, D$ mátrixokat.

c.) * Ahhoz, hogy a másik állapotváltozót kapjuk kimenetként, a $\underline{C}^T$-t módosítsuk.

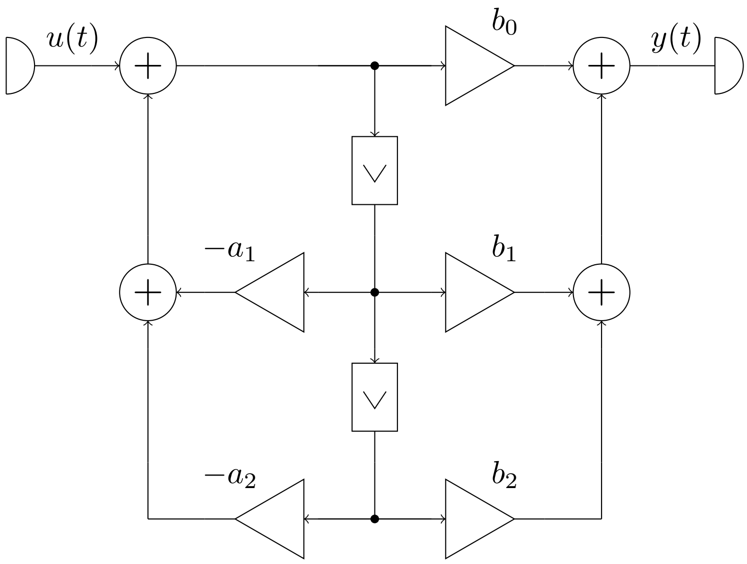
d.) * Az átkapcsolási jelenség gerjesztéséhez módosítsuk az u vektort az alábbiak szerint:

```
u(length(u)/2+1:end) = 0.5*u(length(u)/2+1:end);
```

A teljes MATLAB kód a függelékben található.

1.4. Feladat

Adjuk meg az alábbi másodrendű jelfolyamhálózat állapotváltozós leírásának normálalakját.



Legyen $x_1(t), x_2(t)$ a felső és alsó FI integrátor kimenete, az állapotváltozók. Ekkor felírhatjuk:

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= -a_1 x_1(t) - a_2 x_2(t) + u(t) \\
x_2'(t) &= x_1(t) \\
y(t) &= b_0 x_1'(t) + b_1 x_1(t) + b_2 x_2(t) = \\
&= (b_1 - b_0 a_1) x_1(t) + (b_2 - b_0 a_2) x_2(t) + b_0 u(t)
\end{aligned}
$$

1.5. Feladat

Egy folytonos idejű, másodrendű rendszer állapotváltozós leírása:

$$\begin{aligned} \underline{x}'(t) &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 11 & -4 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} -0,5 \\ 1,5 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + 0,2u(t) \end{aligned}$$

Számitsuk ki a rendser válaszát numerikusan (Euler-módszerrel), ha a gerjesztése

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 \\ 1, & \text{ha } t \geq 0 \end{cases}.$$

MATLAB kód feladathoz

```matlab
%%
clear;close all;clc
set(0,'defaultAxesFontSize',16)

%% DC motor parameterek
R= 2.0; % Ohm
L= 0.5; % Henry
K = 0.04;
Kb = K; % nyomatek konstans - V/rad/sec
Kt = K; % motor sebesseg (emf) konstans - Nm/A
Ke = 0.03; % Nms
J= 0.02; % kg.m^2

%% Allapotvatlozos leiras
% 2 AV (szogsebesseg, aram)
A = [-Ke/J Kb/J; -Kt/L, -R/L ];
B = [0; 1/L];
C = [1 0];
D = [0];

%%
% Euler sema parametere
hk = 0.1;

% Euler sema kiszamitasa adott idolepessel
% Idointervallum eleje/vege
T_start  = 0;    % sec
T_end  = 5;    % sec
% idovektor letrehozasa
t_vec = T_start:hk:T_end;

%% valtozok inicializalasa
u = ones(1, length(t_vec));
% u(length(u)/2+1:end) = 0.5*u(length(u)/2+1:end);
% elorelepo Euler semahoz
x_elore = zeros(length(C), length(t_vec));
y_elore = zeros(1,length(t_vec));
% hatralepo Euler semahoz
x_hatra = zeros(length(C), length(t_vec));
y_hatra = zeros(1,length(t_vec));

% "egysegmatrix"
E = eye(size(A));

%% kezdeti ertekek
x_elore(1,:) = 0;
x_hatra(1,:) = 0;

% Elso lepesben a valasz (a ciklusban az elso lepes ele nem latunk)
y_elore(1) = C*x_elore(:,1) + D*u(1);
y_hatra(1) = C*x_hatra(:,1) + D*u(1);
% ciklus az iterativ szamitashoz
```

```
for ii = 2:length(t_vec)
    tk = t_vec(ii);
    x_elore(:,ii) = (E + hk*A)*x_elore(:,ii-1) + hk*B*u(:,ii-1);
    y_elore(ii) = C*x_elore(:,ii) + D*u(ii);

    % !!! inv(E-hk*A)* == (E-hk*A)\
    x_hatra(:,ii) = (E-hk*A)\(x_hatra(:,ii-1) + hk*B*u(:,ii));
    y_hatra(ii) = C*x_hatra(:,ii) + D*u(ii);

end


%% kirajzolas
% osszehasonlitas
figure(1)
plot(t_vec,y_elore,'k-o','LineWidth',2)
hold on
plot(t_vec,y_hatra,'b-s','LineWidth',2)
grid on
xlabel('Ido [s]')
ylabel('y(t_k)')
legend('Elorelepo Euler','Hatralepo Euler','analitikus')
title('Elore- es hatralepo Euler sema ')

figure(2)
plot(t_vec,u,'k--','LineWidth',2)
grid on
ylim([0 1.05])
xlim([T_start-0.5 T_end])
xlabel('Ido [s]')
ylabel('u(t_k)')
```