3. Pumpálási lemma. Nyelvtanok

1. A pumpálási lemma segítségével igazolja, hogy az alábbi nyelvek nem regulárisak!
   (a) $L_a = \{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n : 1 \le m \le n \le 2m\}$
   (b) $L_b = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k : i > j \ge 0,\ \ k \ge 0\}$.
   (c) $L_c = \{\mathtt{0}^{n!} : n \ge 1\}$
   (d) $L_d = \{\mathtt{0}^p : p \text{ prímszám }\}$
   (e) $L_e = \{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n : n \ne m,\ \ n, m \ge 0\}$

Megoldás:

(a) Tegyük fel, hogy a nyelv reguláris. Ekkor igaz rá a pumpálási lemma, legyen $p > 0$ az ebből adódó pumpálási hossz. Válasszuk pl. a $z = \mathtt{a}^p\mathtt{b}^p$ szót. Erre $z \in L_a$ és $|z| = 2p \ge p$ teljesül. Ahhoz, hogy ellentmondásra jussunk, azt kell megmutatni, hogy ennek minden $z = uvw$ felosztásához, ahol $|uv| \le p$ és $|v| > 0$ van olyan $k \ge 0$ szám, amire $uv^kw \notin L_a$.

Minden ilyen felosztásban $|uv| \le p$ miatt v csak $\mathtt{a}$ betűkből áll, $v = \mathtt{a}^t$ ahol $0 < t \le p$. Ezért pl. $k = 2$ esetén $uv^2w = \mathtt{a}^{p+t}\mathtt{b}^p \notin L_a$, hiszen $m = p + t > p$, $n = p$, és így nem teljesül, hogy $m \le n$.

Tehát erre az L_a-beli szóra nem teljesül a pumpálási lemma, a nyelv nem reguláris.

(b) Tegyük fel, hogy a nyelv reguláris. Ekkor igaz rá a pumpálási lemma, legyen $p > 0$ az ebből adódó pumpálási hossz. Válasszuk pl. a $z = \mathtt{a}^p\mathtt{b}^{p-1}\mathtt{c}^{p-1}$ szót. Erre $z \in L_b$ és $|z| = 3p - 2 \ge p$ teljesül. Azt kell megmutatni, hogy ennek minden $z = uvw$ felosztásához, ahol $|uv| \le p$ és $|v| > 0$ van olyan $k \ge 0$ szám, amire $uv^kw \notin L_b$.

Minden ilyen felosztásban, $|uv| \le p$ miatt, v csak $\mathtt{a}$ betűkből áll, $v = \mathtt{a}^t$ ahol $0 < t \le p$. Legyen most $k = 0$. Ekkor $uv^0w = \mathtt{a}^{p-t}\mathtt{b}^{p-1}\mathtt{c}^{p-1}$ ami nincs L_b-ben, hiszen $p - t \le p - 1$.

Tehát erre az L_b-beli szóra nem teljesül a pumpálási lemma, a nyelv nem reguláris.

(c) Tegyük fel, hogy a nyelv reguláris. Ekkor igaz rá a pumpálási lemma, legyen $p > 0$ az ebből adódó pumpálási hossz. Ha ez kisebb, mint 2, akkor legyen $p = 2$. (Nagyobb számot mindig választhatunk, mint a tényleges pumpálási hossz. Miért?) Válasszuk pl. a $z = \mathtt{0}^{p!}$ szót. Erre $z \in L_c$ és $|z| = p! \ge p$ teljesül. Azt kell megmutatni, hogy ennek minden $z = uvw$ felosztásához, ahol $|uv| \le p$ és $|v| > 0$, van olyan $k \ge 0$ szám, amire $uv^kw \notin L_c$.

A v részszó csak $\mathtt{0}^t$ alakú lehet, ahol $0 < t \le p$. Ekkor $uv^2w = \mathtt{0}^{p!+t}$. Mivel $p \ge 2$, ezért $p! < p! + t \le p! + p \le 2p! < (p + 1)!$, tehát uv^2w hossza nem faktoriális, $uv^2w \notin L_c$.

Tehát erre az L_c-beli szóra nem teljesül a pumpálási lemma, a nyelv nem reguláris.

(d) Tegyük fel, hogy a nyelv reguláris. Ekkor igaz rá a pumpálási lemma, legyen $p > 0$ az ebből adódó pumpálási hossz. Válasszunk egy $z = \mathtt{0}^r$ szót, ahol $r \ge p$ prímszám. (Ez lehetséges, mivel végtelen sok prímszám van.)

Erre $z \in L_d$ és $|z| = r \ge p$ teljesül. Azt kell megmutatni, hogy ennek minden $z = uvw$ felosztásához, ahol $|uv| \le p$ és $|v| > 0$ van olyan $k \ge 0$ szám, amire $uv^kw \notin L_d$.

A v részszó csak $\mathtt{0}^t$ alakú lehet, $0 < t \le p$. Most a $k = 2$ nem biztos, hogy segít, hiszen lehet, hogy $r + t$ prímszám. De ha a $k = r + 1$ esetet nézzük, akkor $uv^kw = \mathtt{0}^{r+(k-1)t}$, aminek hossza $r + (k - 1)t = r + rt = r(t + 1)$ biztos nem prím. Ezért az $uv^{r+1}w = \mathtt{0}^{r(t+1)} \notin L_d$.

Tehát erre az L_d-beli szóra nem teljesül a pumpálási lemma, a nyelv nem reguláris.

(e) Tegyük fel, hogy a nyelv reguláris. Ekkor igaz rá a pumpálási lemma, legyen $p > 0$ az ebből adódó pumpálási hossz. Válasszunk egy $z = \mathtt{a}^p\mathtt{b}^{p+r}$ szót, ahol $r > 0$.

Erre $z \in L_e$ és $|z| = 2p + r \ge p$ teljesül. Azt kell megmutatni, hogy ennek minden $z = uvw$ felosztásához, ahol $|uv| \le p$ és $|v| > 0$ van olyan $k \ge 0$ szám, amire $uv^kw \notin L_e$.

A v részszó csak $\mathtt{a}^t$ alakú lehet, $0 < t \le p$. Ekkor $uv^kw = \mathtt{a}^{p+(k-1)t}\mathtt{b}^{p+r}$. Ha tudunk olyan r számot választani, melyre minden $0 < t \le p$ esetén van olyan k egész, hogy $(k - 1)t = r$, akkor a z ellentmond a pumpálási lemmának, tehát a nyelv nem reguláris. Egy ilyen r-nek teljesítenie kell, hogy osztható a $t = 1, 2, 3, \ldots, p$ számok mindegyikével. Ilyen pedig van, pl. az $r = p!$ jó választás, tehát egy z szó, amivel az ellentmondást így megkapjuk a $z = \mathtt{a}^p\mathtt{b}^{p+p!}$.

2. Legyen $\Sigma = \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}$. A pumpálási lemma segítségével igazolja, hogy az alábbi nyelvek nem regulárisak!

   (a) $L_a = \{s \in \Sigma^* :$ van olyan $x, y \in \Sigma^*$, hogy $|x| = |y|$ és $s = x\mathtt{0}y\}$.

   (b) $L_b = \{s \in \Sigma^* :$ van olyan $x \in \Sigma^*$, hogy $s = xx\}$.

Megoldás:

(a) Tegyük fel, hogy a nyelv reguláris. Ekkor igaz rá a pumpálási lemma, legyen $p > 0$ az ebből adódó pumpálási hossz. Mivel a nyelv azokból a szavakból áll, amiknek a közepén nulla van, célszerű olyan szót választani, amin pumpálás után könnyen látszik, hogy a középső karakter továbbra is nulla vagy nem nulla.

Válasszuk pl. a $z = \mathtt{1}^p\mathtt{0}\mathtt{1}^p$ szót. Ez persze benne van a nyelvben, és a hossza $2p + 1 \geq p$. A pumpálási lemma szerinti felosztásoknál a v rész a szó elején levő $\mathtt{1}$-k közül tartalmaz néhányat, legyen $v = \mathtt{1}^t$, ahol a feltételek szerint $0 < t \leq p$. Ezért pl. a $k = 2$ esetben az $uv^2w = \mathtt{1}^{p+t}\mathtt{0}\mathtt{1}^p$ szóban az egyetlen nulla már nem középen lesz, ezért ez a szó nincs az L_a nyelvben, ami ellentmond a pumpálási lemmának. Tehát a nyelv nem reguláris.

(b) Tegyük fel, hogy a nyelv reguláris. Ekkor igaz rá a pumpálási lemma, legyen $p > 0$ az ebből adódó pumpálási hossz. Itt is hasonló ötlet segít mint az előbb.

Legyen most a szó pl. $z = \mathtt{1}^p\mathtt{0}\mathtt{1}^p\mathtt{0}$. Ez az $x = \mathtt{1}^p\mathtt{0}$ választással $z = xx \in L_b$ és $|z| = 2p + 2 \geq p$.

A pumpált v részszó az első $\mathtt{1}$-blokk része lesz. Ha ezt megismételjük, akkor egy $\mathtt{1}^{p+t}\mathtt{0}\mathtt{1}^p\mathtt{0}$ alakú szóhoz jutunk. Ez viszont nincs a nyelvben, mert csak két $\mathtt{0}$ szerepel benne és az egyik a szó végén, így ha yy alakban szeretnénk felírni, az y-nak $\mathtt{0}$-ra kellene végződni, de a két $\mathtt{0}$ előtt nem ugyanannyi $\mathtt{1}$ áll, tehát a két rész nem lehet egyforma.

Tehát nem igaz rá a pumpálási lemma, a nyelv nem reguláris.

(Ha pl. a $z = 1^{2p} \in L_b$ szót választottuk volna, az nem működne, mert igaz ugyan, hogy a pumpáláskor az eredeti közepe a szónak „elcsúszik", de ettől még a szó a nyelvben maradhat. Valóban ez történik, ha olyan felbontást veszünk, amiben a pumpált v szakasz páros hosszú. Ezért ezzel a z választással nem kapunk ellentmondást.)

3. Legyen $L_1 = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^k\mathtt{c}^k : n \geq 1, k \geq 0\}$, $L_2 = \{\mathtt{b}^k\mathtt{c}^m : k, m \geq 0\}$ és $L = L_1 \cup L_2$. Igazolja, hogy L_1 nem reguláris, L_2 reguláris, L pumpálható és L nem reguláris!

Megoldás: L_1 nem reguláris: Tegyük fel, hogy reguláris. Akkor a metszete a reguláris $\mathtt{a}\mathtt{b}^*\mathtt{c}^*$ nyelvvel is reguláris. Ez viszont az $\{\mathtt{a}\mathtt{b}^k\mathtt{c}^k : k \geq 0\}$ nyelv, amiről a pumpálási lemma segítségével megmutatjuk, hogy nem reguláris. Ehhez legyen $p > 0$ a pumpálási hossz, és vegyük a $z = \mathtt{a}\mathtt{b}^p\mathtt{c}^p \in L_1$ szót, aminek hosszára teljesül a lemma feltétele, $|z| = 2p + 1 \geq p$. Ennek minden, a pumpálási lemmának megfelelő $z = uvw$ felosztásában v vagy $v = \mathtt{a}$ vagy $v = \mathtt{a}\mathtt{b}^t$ és $0 < t < p$ vagy $v = \mathtt{b}^t$ alakú, ahol pedig $0 < t \leq p$. Az uv^2w szóban az első két esetben két $\mathtt{a}$ betű is lesz, a harmadik esetben pedig a $\mathtt{b}$-k száma el fog térni a $\mathtt{c}$-k számától, tehát valóban minden felosztásra teljesül, hogy $uv^2w \notin L_1$, és ezért a nyelv nem reguláris.

L_2 reguláris: ez a $\mathtt{b}^*\mathtt{c}^*$ nyelv, tehát reguláris.

L pumpálható: ha egy L_2-beli szót veszünk, akkor a pumpáltjai is L_2-ben vannak, tehát L-ben is. Egy tetszőleges L_1-beli szónál, a pumpált szakasz álljon egyetlen $\mathtt{a}$ betűből (tehát pl. $u = \varepsilon, v = \mathtt{a}$, w pedig a szó további része.) Ekkor a pumpálással csak az $\mathtt{a}$-k száma változik. Ha ez nő ($k > 1$), akkor a pumpált szó is L_1-ben lesz. A lefelé pumpálásnál ($k = 0$) továbbra is L_1-ben marad, ha az eredeti szó legalább 2 db $\mathtt{a}$-val kezdődött. Abban az esetben, amikor csak 1 db $\mathtt{a}$ van a szó elején, a lefelé pumpálás átvisz az L_2 nyelvbe, tehát ilyenkor is L-ben lesz a pumpált szó. Ebből látszik, hogy valóban minden L-beli szónak van olyan felosztása, ami pumpálható.

L nem reguláris: Az $\mathtt{a}$, $\mathtt{ab}$, $\mathtt{abb}$, $\mathtt{abbb}$ ... szavak páronként megkülönböztethetők, hiszen $\mathtt{a}$ $\mathtt{b}^k$ csak a $\mathtt{c}^k$-val kiegészítve lesz L-ben, más $\mathtt{c}^\ell$-lel kiegészítve nem. Azt meg tudjuk, hogy ha van végtelen sok páronként megkülönböztethető szó a nyelvben, akkor a nyelv nem reguláris („végtelen sok állapot kellene")

4. Igazolja, hogy minden nem reguláris $L_1 \subseteq \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ nyelvhez van olyan nem reguláris $L_2 \subseteq \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ nyelv, hogy az $L_1 \cup L_2$ nyelv reguláris!

Megoldás: Ha L_1 egy tetszőleges nem reguláris nyelv, akkor a komplementere sem reguláris, legyen ez az L_2. Így $L_1 \cup L_2 = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$, amiről tudjuk, hogy reguláris.

5. Tudjuk, hogy az $L_1, L_2, L_3 \subseteq \{\texttt{0},\texttt{1}\}^*$ nyelvek közül L_1 és L_3 reguláris. Következik-e ebből, hogy L_2 is reguláris, ha
   (a) $L_3 = L_1 \cap L_2$?
   (b) $L_3 = L_1 \cup L_2$?
   (c) $L_3 = L_1 L_2$?

   Megoldás:
   (a) Nem, pl. $L_1 = \texttt{0}^*$ és $L_2 = \{\texttt{0}^n\texttt{1}^n : n \geq 0\}$ esetén $L_3 = \emptyset$.
   (b) Nem, pl. $L_1 = \texttt{0}^*\texttt{1}^*$ és $L_2 = \{\texttt{0}^n\texttt{1}^n : n \geq 0\}$ esetén $L_3 = L_1$.
   (c) Nem, pl. ha $L_1 = \emptyset$, akkor függetlenül L_2 választásától $L_3 = \emptyset$.

6. Igaz-e, hogy minden nem üres L nyelvnek
   (a) van olyan $L_r \subseteq L$ nem üres résznyelve, ami reguláris?
   (b) van olyan $L_n \subseteq L$ nem üres résznyelve, ami nem reguláris?

   Megoldás:
   (a) Igen, pl. $L_r = \{s\}$, ahol $s \in L$.
   (b) Nem. Legyen L egy véges (de nem üres) nyelv. Ennek minden részhalmaza is véges, tehát reguláris.

7. Határozza meg az alábbi nyelvtan által generált nyelvet! Melyik osztályba tartozik a nyelvtan?

$$S \to \texttt{a}SBC \mid \texttt{a}BC \qquad CB \to BC \qquad AA \to \texttt{a}A$$

$$\texttt{a}B \to \texttt{ab} \qquad \texttt{b}B \to \texttt{bb} \qquad \texttt{b}C \to \texttt{bc} \qquad \texttt{c}C \to \texttt{cc}$$

   Megoldás: A nyelvtan 0. osztályú mert a 3. szabályban nem egy változó helyettesítése van, hanem két váltpzó felcserélése. Látszik, hogy A nem szerepel levezetésben, a B, C változókból csak a nekik megfelelő kis betű lehet. Az 1. és 2. szabállyal lehet ezeket létrehozni, tehát az biztos, hogy minden levezetett szóban az $\texttt{a}$, a $\texttt{b}$ és a $\texttt{c}$ betűk száma azonos (és legalább 1) lesz.

   $L = \{\texttt{a}^n\texttt{b}^n\texttt{c}^n : n \geq 1\}$.

   Ezek levezethetők: alkalmazzuk $(k-1)$-szer az 1., majd egyszer a 2. szabályt. Ekkor $\texttt{a}^k(BC)^k$ a kapott szimbólumsorozat. A 3. szabály segítségével a C-ket a végére rendezhetjük, utána előről haladva minden B-t lecserélünk $\texttt{b}$-re (5, 6. szabály), majd hasonlóan a C-ket $\texttt{c}$-re (7, 8. szabály).

   Az, hogy más nem vezethető le onnan látszik, hogy betűre mindig csak az első változót tudjuk váltani és ha egy C-t olyankor cserélünk le $\texttt{c}$-re, amikor van még utána B, akkor ettől a B-től nem lehet megszabadulni, mert ahhoz közvetlen előtte egy $\texttt{b}$ (vagy $\texttt{a}$) kellene.

8. Adjon meg egy nyelvtant ami az $L = \{\texttt{a}^n\texttt{b}^{n+1}\texttt{a}^n : n \geq 1\}$ nyelvet generálja!

   Megoldás: Hasonlóan az előző feladathoz előbb legyártunk kellő számú példányt a változókból, utána biztosítjuk, hogy csak a megfelelő módon átrendezett sorrendjük esetén lehessen szót levezetni., például így:

$$S \to \texttt{a}SBA \mid \texttt{ab}BA \qquad AB \to BA \qquad \texttt{b}B \to \texttt{bb} \qquad \texttt{b}A \to \texttt{ba} \qquad \texttt{a}A \to \texttt{aa}$$

   Ez jó lesz, mert ha a 3. szabály biztosítja, hogy az összes A változót az összes B mögé mozgassuk, utána meg a 4-6. szabályok segítségével minden változót a megfelelő betűre cseréljünk. Másrészt, ha egy levezetés során keletkezett szimbólumsorozatban még van AB, akkor ha az A-t valamelyik szabállyal $\texttt{a}$-ra cseréljük, egy $\texttt{a}B$ keletkezik, ahonnan a B már sehogy sem tűnhet el.

   (A kezdő $\texttt{a}$ betűk helyett is lehetett volna előbb valamilyen változót generálni, de akkor vigyázni kell rá, hogy ez meg ne cserélhessen helyet a B-vel.)

9. Igaz-e, hogy minden véges nyelvhez van 3. osztályba tartozó nyelvtan?

Megoldás: Igen, hiszen minden ilyen nyelv reguláris, és ezért van reguláris nyelvtana.

Megjegyzés: nem nehéz felírni egy ilyen nyelvtant, pl. egy $a_1a_2\cdots a_n$ szóhoz egy $S \to a_1A_1$, $A_1 \to a_2A_2, \ldots, A_{n-2} \to a_{n-1}A_{n-1}$, $A_{n-1} \to a_n$ jó, ahol az A_i-k különböző változók. Ha több szót is akarunk generálni, akkor az S-hez felvesszük mindegyikből az első szabályt.

10. Adjon minél magasabb osztályú nyelvtant a következő, $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ feletti nyelvekhez!

   (a) Az L_a azokból a szavakból áll, melyek tartalmazzák a `baba` részszót.

   (b) Az L_b a páros hosszú szavakból áll.

   (c) $L_c = \{\mathtt{a}^k\mathtt{b}^n\mathtt{a}^m : k, n, m \geq 0\}$

Megoldás:

(a) Ez egy reguláris nyelv. Nyelvtant lehet egy véges automatájából készíteni, de egyből is megy:

$$S \to \mathtt{a}S \mid \mathtt{b}S \mid \mathtt{b}X_{aba} \qquad X_{aba} \to \mathtt{a}X_{ba} \qquad X_{ba} \to \mathtt{b}X_a \qquad X_a \to \mathtt{a}Y \mid \mathtt{a} \qquad Y \to \mathtt{a}Y \mid \mathtt{b}Y \mid \mathtt{a} \mid \mathtt{b}$$

Itt az egyes X változók indexe jelöli, hogy a kívánt részszóból mit kell még belőle megkapnunk. Az első két szabály miatt lehet a `baba` elé tetszőleges betűsorozatot írni, Y a végén gondoskodik ugyanerről.

(b) Ez is egy reguláris nyelv, itt is 3. osztályú nyelvtant adunk. Mivel egyszerre két betűt a reguláris nyelvtan nem tud előállítani, ezért erről mindig két lépésben gondoskodunk. Mivel az üres szó is benne van a nyelvben, ezért 3 változó is kell (a kezdőváltozó nem lehet jobb oldalon).

$$S \to \varepsilon \mid \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}X \qquad X \to \mathtt{a}Y \mid \mathtt{b}Y \mid \mathtt{a} \mid \mathtt{b} \qquad Y \to \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}X$$

(c) Most is adható reguláris nyelvtan, de előbb egyszerűbb egy nem regulárisat adni:

$$A \to \mathtt{a}A \mid B \qquad B \to \mathtt{b}B \mid C \qquad C \to \mathtt{a}C \mid \varepsilon$$

Az látszik, hogy ez a kívánt nyelvet generálja, mert az A-ból kapjuk meg az `a` betűket, utána átváltunk a B-re, amivel tetszőleges számú `b` betűt generálhatunk, majd a C-ból a szó végére tetszőleges számú `a` betű kapható. Ez viszont nem reguláris, mert van egyszeres szabály és ε-szabály is. Ezeket még ki kell küszöbölni. Az eredmény:

$$S \to \varepsilon \mid \mathtt{a}A \mid \mathtt{b}B \mid \mathtt{a}C \mid \mathtt{a} \mid \mathtt{b} \qquad A \to \mathtt{a}A \mid \mathtt{b}B \mid \mathtt{a}C \mid \mathtt{a} \mid \mathtt{b} \qquad B \to \mathtt{b}B \mid \mathtt{a}C \mid \mathtt{a} \mid \mathtt{b} \qquad C \to \mathtt{a}C \mid \mathtt{a}$$

11. Legyen a nyelvtan

$$S \to \mathtt{a}S \mid \mathtt{b}S \mid \mathtt{c}S \mid \mathtt{c}A, \quad A \to \mathtt{c}B \mid \mathtt{c}, \quad B \to \mathtt{a}B \mid \mathtt{b}B \mid \mathtt{c}B \mid \mathtt{a} \mid \mathtt{b} \mid \mathtt{c}$$

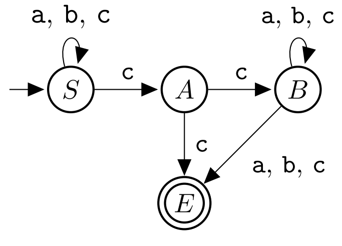
   (a) Mi a generált nyelv?

   (b) Készítse el a nyelvtanból a tanult módon a megfelelő véges automatát!

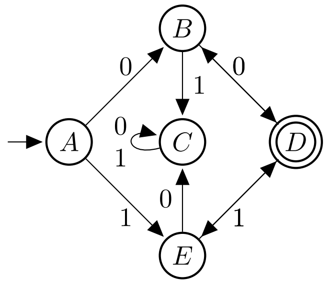
Megoldás:

(a) A nyelv a `cc` részszót tartalmazó szavakból áll. Mielőtt az S változót az A felváltja, tetszőleges $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^*$-beli szót megkaphatunk, ezt az A-ra váltáskor egy `c`, majd az A-ból egy újabb `c` követi. A szó vagy itt ér véget, vagy a B-ből levezethetőkkel folytatódik. A B változóból pedig a nem üres szavak mindegyike levezethető. Tehát a levezetett szavakban szerepel a `cc`, de előtte és utána bármi állhat.

(b)



12. Az alábbi automatából a tanult módon készítse el a megfelelő nyelvtant!



Megoldás:

$$A \to \mathtt{0}B \mid \mathtt{1}E \qquad B \to \mathtt{0}D \mid \mathtt{1}C \mid \mathtt{0} \qquad C \to \mathtt{0}C \mid \mathtt{1}C \qquad D \to \mathtt{0}B \mid \mathtt{1}E \qquad E \to \mathtt{0}C \mid \mathtt{1}D \mid \mathtt{1}$$

13. A tanult módszerrel küszöbölje ki az ε-szabályokat az alábbi nyelvtanokból!

(a) $S \to S\mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \epsilon$

(b) $S \to ABC, \quad A \to BB \mid \varepsilon, \quad B \to CC \mid \mathtt{a}, \quad C \to AA \mid \mathtt{b}$

Megoldás:

(a) S-ből megkapható az ε, ezért kell egy új kezdőváltozó is.

$$S' \to \varepsilon \mid S \qquad S \to S\mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid S\mathtt{ab} \mid \mathtt{ab}$$

(b) Elenyésző változók meghatározása: $E_1 = \{A\}$, $E_2 = \{A, C\}$, $E_3 = \{A, B, C\}$, $E_4 = \{A, B, C, S\} = E$.

Az új nyelvtan:

$$\begin{aligned} S' &\to \varepsilon | S \\ S &\to ABC \mid BC \mid AC \mid AB \mid A \mid B \mid C \\ A &\to BB \mid B \\ B &\to CC \mid C \mid \mathtt{a} \\ C &\to AA \mid A \mid \mathtt{b} \end{aligned}$$