5. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1997/98 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Bizonyítsa be vektoralgebrai eszközökkel a Thálesz tételt!
MO. A középpontból irányítva a kör egy–egy pontjához húzott helyvektorok legyenek r_1 és r_2. Mivel az r_1 végpontjához tartozó átmérő másik végpontjának helyvektora $-r_1$, így belátandó, hogy $r_1 - r_2 \perp (-r_1) - r_2)$, azaz $(r_1 - r_2, -r_1 - r_2)) = 0$. De $(r_1 - r_2, -r_1 - r_2)) = -(r_1 - r_2, r_1 + r_2)) = {r_1}^2 - {r_2}^2 = 0$, hiszen $|r_1| = |r_2|$ a kör sugarának hossza.

2. Bizonyítsa be, hogy bármely A, B, C halmazok esetén

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

MO. $a \cdot \overline{(b \cdot \overline{c})} = a(\overline{b} + \overline{\overline{c}}) = a(\overline{b} + c) = a \cdot \overline{b} + a \cdot c$

3. Az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik nem?
a) Ha a_n konvergens $(a_n)^n$ is konvergens
b) Ha a_n divergens $(a_n)^n$ is divergens
c) Ha $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = 1$, akkor $\lim_{n\longrightarrow\infty} (a_n)^n = 1$
d) Ha $\lim_{n\longrightarrow\infty} (a_n)^n = 1$, akkor $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = 1$
MO. a) nem: $a_n = 2$ b) nem: a_n a $b_n = \frac{1}{2}$ és a $c_n = \frac{1}{3}$ sorozatok összefésülésével keletkezett sorozat. c) nem $1+\frac{1}{n}$ d) igen: $a_n \longrightarrow 1 \rightsquigarrow$ végülis $\frac{1}{2} \le (a_n)^n \le 2 \rightsquigarrow 1 \longleftarrow \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \le a_n \le \sqrt[n]{2} \longrightarrow 1$, amiből csendőrelvvel $a_n \longrightarrow$ 1.

4. Legyen $a > 0$ tetszőleges valós szám. Határozza meg a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1 + 2a^n}{2 - 3a^n}$$

határértéket a függvényében!

MO. Három eset van: a) Ha $a > 1$, akkor $\dfrac{1 + 2a^n}{2 - 3a^n} = \dfrac{\left(\frac{1}{a}\right)^n + 2}{2\left(\frac{1}{a}\right)^n - 3} \longrightarrow -\dfrac{2}{3}$, b) ha $a = 1$, akkor $\dfrac{1 + 2a^n}{2 - 3a^n} = \dfrac{3}{-1} = -3 \longrightarrow 3$ és végül b) ha $a < 1$, akkor $\dfrac{1 + 2a^n}{2 - 3a^n} \longrightarrow \dfrac{1}{2}$.

5. Egyenletesen folytonos–e az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény a $[0, \infty)$ intervallumon?
MO. Igen: egyrészt f folytonos így egyenletesen folytonos az $I_1 = [0, 2]$ intervallumon, másrészt $|f'(x)| = |\frac{1}{2\sqrt{x}}| \le 1$ ha $x \ge 2$, tehát f' korlátos az $I_2 = [1, \infty)$ intervallumon, így f egyenletesen folytonos I_2–n, következésképp f egyenletesen folytonos I_1 és I_2 egyesítésén, hiszen nyilván itt az adott ε–hoz a két részintervallumon található 1–nél kisebb δ–ák közül a kisebb jó lesz.

6. Hol és milyen szakadása van az

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

függvénynek?
MO. Ugrása: $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0+} f(x) = \lim_{y\longrightarrow\infty} \frac{e^y}{1 + e^y} = \lim_{y\longrightarrow\infty} \frac{1}{e^{-y} + 1} = 1 \ne 0 = \lim_{y\longrightarrow -\infty} \frac{e^y}{1 + e^y} = \lim_{x\longrightarrow 0-} f(x)$.

7. Legyen $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 8$. Van–e valós gyöke f–nek? Ha igen, van–e pozitív gyöke?
MO. Van, páratlan fokszámú polinomnak mindig van valós gyöke. Pozitív gyöke azonban nincs, mert $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = (x - 1)(x + 3) \rightsquigarrow x \ge 1$ esetén $f'(x) \ge 0$ és $-3 \le x \le 1$ esetén $f'(x) \le 0 \rightsquigarrow f(x) \ge f(1) = 3 > 0$ ha $x \in [-3, \infty)$.

8. Van–e primitív függvénye az $f(x) = x^2 e^x$ függvénynek? Ha igen, határozzon meg egyet!
MO. $\displaystyle\int x^2 e^x = x^2 e^x - 2\int x e^x \, dx = x^2 e^x - 2(x\, e^x - \int e^x \, dx) = e^x(x^2 - 2x + 2)$