Jelek és jelfeldolgozás (BMEVIHVBB01)
5-6. gyakorlat

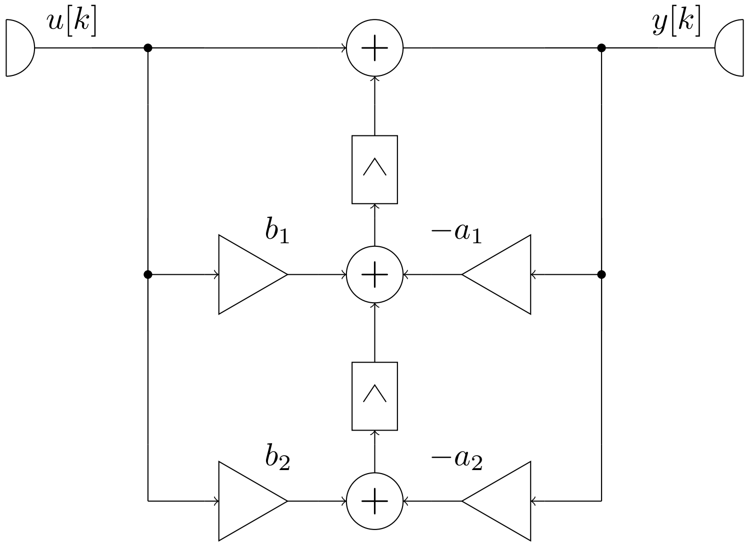
Szerkesztette: Dr. Horváth Bálint Péter, BME-HVT

2022.03.28.

1. DI rendszerek analízise az időtartományban

1.1. Feladat

Adja meg a 1. ábrán látható hálózat által reprezentált rendszer rendszeregyenletét és állapotváltozós leírását!



1. ábra. a) hálózat

Jelölje a középső összeadó kimenetét $v_1[k]$, az alsóé $v_2[k]$! Ezzel

$$v_2[k] = b_2u[k] - a_2y[k]$$

$$v_1[k] = b_1u[k] - a_1y[k] + v_2[k-1]$$

$$y[k] = u[k] + v_1[k-1] = u[k] + b_1u[k-1] - a_1y[k-1] + v_2[k-2]$$

$$y[k] = u[k] + b_1u[k-1] - a_1y[k-1] + b_2u[k-2] - a_2y[k-2]$$

Rendezve

$$\underline{\underline{y[k] + a_1y[k-1] + a_2y[k-2] = u[k] + b_1u[k-1] + b_2u[k-2]}}$$

Az állapotváltozós leíráshoz jelölje x_1 a felső, x_2 az alsó tároló állapotát. Ezekkel

$$\left.\begin{aligned} x_1[k+1] &= b_1u[k] + x_2[k] - a_1y[k] \\ x_2[k+1] &= b_2u[k] - a_2y[k] \\ y[k] &= x_1[k] + u[k] \end{aligned}\right\}$$

Ez nem normálalak, mert az állapotegyenletek jobb oldalán szerepel meg nem engedett változó (a válasz). Az első két egyenletbe be tudjuk helyettesíteni a válaszra vonatkozó egyenletet, amivel normálalakot kapunk:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x_1[k+1] &= -a_1 x_1[k] + x_2[k] + (b_1 - a_1)u[k] \\ x_2[k+1] &= -a_2 x_1[k] + (b_2 - a_2)u[k] \\ y[k] &= x_1[k] + u[k] \end{aligned}\right\}}$$

1.2. Feladat

Határozzuk meg az előző feladatban látható rendszer impulzusválaszát az ÁVLNA és a RE alapján fokozatos behelyettesítéssel (lépésről-lépsre módszer.) az első 4 ütemre. Hasonlítsuk össze a kapott eredményeket.

1.3. Feladat

Készítsünk számítógépes programot, mely a fokozatos behleyettesítést használva kiszámítja az impulzusválaszt tetszőleges ütemre. Rajzoljuk ki az impulzusválaszt az első 10 ütemre.

1.4. Feladat

Egy DI rendszer impulzusválasza $h[k] = 2\delta[k] - 3 \cdot \varepsilon[k] \cdot 0,5^k$ határozzuk meg a $g[k]$ ugrásválaszát!

Megoldás

$$
\begin{aligned}
g[k] = \sum_{i=-\infty}^{k} h[i] = \sum_{i=-\infty}^{k} 2\delta[k] - 3 \cdot \varepsilon[k] \cdot 0,5^k = \\
\sum_{i=-\infty}^{k} 2\delta[i] - \sum_{i=-\infty}^{k} 3 \cdot \varepsilon[i] \cdot 0,5^i = \\
2\varepsilon[k] - 3\sum_{i=0}^{k} \cdot 0,5^i = 2\varepsilon[k] - 3\frac{1-0,5^{k+1}}{1-0,5} = \\
2\varepsilon[k] - 3 \cdot 2(1 - 0,5^k \cdot 0,5) = 2\varepsilon[k] - (6 + 3 \cdot 0,5^k)\varepsilon[k] = \varepsilon[k](-4 + 3 \cdot 0,5^k)
\end{aligned}
$$

1.5. Feladat

Egy DI rendszer impulzusválasza $h[k] = 2\delta[k] - 3 \cdot \varepsilon[k] \cdot 0,5^k$ (az előző feladattal megegyező). GV stabilis-e a rendszer?

Megoldás Ellenőrizzük, hogy $h[k]$ abszolút összegezhető-e?

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|2\delta[k] - 3 \cdot \varepsilon[k] \cdot 0,5^k\right| \le \\
\sum_{k=-\infty}^{\infty} |2\delta[k]| + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|3 \cdot \varepsilon[k] \cdot 0,5^k\right| = \\
2 + \sum_{k=0}^{\infty} \left|3 \cdot 0,5^k\right| = 2 + \sum_{k=0}^{\infty} 3 \cdot 0,5^k = \\
2 + 3\frac{1}{1-0,5} = 2 + 6 = \underline{\underline{8 \le \infty \Rightarrow \text{ GV stabil}}}
\end{aligned}
$$

1.6. Feladat

Egy DI rendszer ugrásválasza $g[k] = \varepsilon[k](6 \cdot 0,8^k - 5)$ határozzuk meg a $h[k]$ impulzusválaszát!

Megoldás

$$\begin{aligned}h[k] = g[k] - g[k-1] = \varepsilon[k](6 \cdot 0,8^k - 5) - \varepsilon[k-1](6 \cdot 0,8^{k-1} - 5) = \\ \varepsilon[k](6 \cdot 0,8^k - 5) - \left[\varepsilon[k](6 \cdot 0,8^{k-1} - 5) - \delta[k](6 \cdot 0,8^{k-1} - 5)\right] = \\ \varepsilon[k](6 \cdot 0,8^k - 5 - (6 \cdot 0,8^{k-1} - 5)) - \delta[k](6 \cdot 0,8^{k-1} - 5) = \\ \varepsilon[k](6 \cdot 0,8^k - 6 \cdot 0,8^{-1} 0,8^k) - \delta[k](7,5 - 5) = \\ \varepsilon[k](6 \cdot 0,8^k - 7,5 \cdot 0,8^k) - 2,5\delta[k] = \\ \ldots = 2,5\delta[k] - 1,5 \cdot \varepsilon[k] \cdot 0,8^k\end{aligned}$$

1.7. Feladat

Egy FIR típusú DI rendszer impulzusválasza:

$$\begin{aligned} h[0] &= 1 \\ h[1] &= 0,5 \\ h[2] &= 0,25. \end{aligned}$$

Határozzuk meg rendszer $u[k] = \varepsilon[k]$ gerjesztésre adott válaszát a fokozatos behelyettesítés módszerével.

Megoldás Elevenítsük fel a konvolúció definícióját, illetve a kauzális rendszerre valamint belépő gerjesztésre vonatkozó összefüggést.

$$\begin{aligned} y[k] &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i]h[k-i] \xRightarrow[\text{kauzális rsz.}]{\text{belépő gerj.}} \sum_{i=0}^{k} u[i]h[k-i] \\ y[0] &= u[0]h[0] = 1 \cdot 1 = 1 \\ y[1] &= u[0]h[1] + u[1]h[0] = 1 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1 = 1,5 \\ y[2] &= u[0]h[2] + u[1]h[1] + u[2]h[0] = 0,25 + 0,5 + 1 = 1,75 \\ y[3] &= u[0]h[3] + u[1]h[2] + u[2]h[1] + u[3]h[0] = 0 + 0,25 + 0,5 + 1 = 1,75 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Látható, hogy a 3. ütemtől beáll az állandósult állapot.

1.8. Feladat

Készítsünk számítógépes programot mely kiszámítja az előző feladatban megadott rendszer válaszát tetszőleges (belépő) gerjesztésre. Hasonlítsuk össze a program által kiszámolt eredményt az előző feladat eredményével.

1.9. Feladat

Egy DI rendszer impulzusválasza $h[k] = 2,5\delta[k] - 1,5 \cdot \varepsilon[k] \cdot 0,8^k$ Hatrázzuk meg a rendszer válaszát az alábbi gerjesztésekre

a) $u[k] = \varepsilon[k]0,6^k$

b) $u[k] = 3$

c) $u[k] = \varepsilon[k-L]0,6^{k-L}$

Megj.: Az impulzusválasz belépő alakjából következik, hogy a rendszer kauzális.

a) Megoldás

$$\begin{aligned}
y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i]h[k-i] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (2,5\delta[k-i] - 1,5\cdot\varepsilon[k-i]\cdot 0,8^{k-i})\varepsilon[i]0,6^i &= \\
\sum_{i=-\infty}^{\infty} 2,5\delta[k-i]\cdot\varepsilon[i]0,6^i - \sum_{i=-\infty}^{\infty} 1,5\cdot\varepsilon[k-i]\cdot 0,8^{k-i}\cdot\varepsilon[i]0,6^i &= \\
\sum_{i=-0}^{\infty} 2,5\delta[k-i]0,6^i - \sum_{i=0}^{k} 1,5\cdot 0,8^{k-i}\cdot 0,6^i &= \\
2,5\cdot 0,6^k - 1,5\cdot 0,8^k \sum_{i=0}^{k}\left(\frac{0,6}{0,8}\right)^i &= \\
2,5\cdot 0,6^k - 1,5\cdot 0,8^k \left(\frac{1-\frac{3}{4}^{k+1}}{1-\frac{3}{4}}\right) &= \\
2,5\cdot 0,6^k - 1,5\cdot 0,8^k\cdot 4\cdot\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^k\cdot\frac{3}{4}\right) &= \\
2,5\cdot 0,6^k + \left(-6\cdot 0,8^k + 4,5\cdot 0,6^k\right) &= \\
\underline{\underline{\left(-6\cdot 0,8^k + 7\cdot 0,6^k\right)\varepsilon[k]}} &
\end{aligned}$$

b) Megoldás

$$\begin{aligned}
y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[k-i]h[i] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (2,5\delta[i] - 1,5\cdot\varepsilon[i]\cdot 0,8^i)\cdot 3 &= \\
\sum_{i=-\infty}^{\infty} (2,5\delta[i]\cdot 3) - \sum_{i=-\infty}^{\infty} (1,5\cdot\varepsilon[i]\cdot 0,8^i)\cdot 3 &= \\
7,5 - \sum_{i=0}^{\infty}(4,5\cdot 0,8^i) &= \\
7,5 - 4,5\cdot\frac{1}{1-0,8} = 7,5 - 22,5 = \underline{\underline{-15}} &
\end{aligned}$$

c) Megoldás A gerjesztés megegyezik az a) feladat gerjesztésének L ütemmel eltolt változatával. Az LTI rendszerek tulajdonságai miatt a válasz megegyezik az a) feladat válaszának L ütemmel eltolt változatával, vagyis

$$y[k] = \underline{\underline{\left(-6\cdot 0,8^{k-L} + 7\cdot 0,6^{k-L}\right)\varepsilon[k-L]}}$$