Felsőbb Matematika 1. ZH 2013-10-30

1. Oldjuk meg az együtthatómátrix PLU-felbontását meghatározva és azt fölhasználva a

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszert! *(3 pont)*

Megoldás. 1. megoldás (a természetes):

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer megoldása az $\mathbf{Ly} = \mathbf{P}(1,0,3) = (1,3,0)$ és $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletekből adódik: $\mathbf{y} = (1,1,-1)$, $\mathbf{x} = (1,-1,1)$.

2. megoldás (részleges főelemkiválasztással):

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & -1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PLU 2 pont, megoldás 1 pont.

2. Diagonalizáljuk ortogonálisan az $\mathbf{A}$ mátrixot, *(a)* írjuk fel sajátfelbontását, *(b)* spektrálfelbontását (a vetítőmátrixok különböző sajátértékekkel vett lineáris kombinációjaként), és (ezekből) *(c)* a redukált szinguláris felbontását! Végül *(d)* bontsuk fel az $(1,1,1)$ vektort a sajátalterekbe eső vektorok összegére! *(5 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. *(a)* A karakterisztikus polinom $-\lambda(\lambda-2)^2$ (0.5 pont). A sajátvektorok: $\lambda_{1,2} = 2$-höz $v_1 = (0,1,0)$ és $v_2 = (1,0,-1)$, $\lambda_3 = 0$-hoz $v_3 = (1,0,1)$, (1.5 pont).

A sajátfelbontás:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix}$$

(b) A spektrálfelbontás $2\mathbf{P}_1 + 0\mathbf{P}_2$ alakú, a sajátfelbontásból megkapható:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(Hasonlóan adódik $\mathbf{P}_2$, de ezt nem kellett kiszámolni, mert 0-val van szorozva, csak a teljesség kedvéért:

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P}_1$ sokkal egyszerűbben, az eredeti $\mathbf{A}$ mátrixból is kitalálható, hisz $\mathbf{A} = 2\mathbf{P}_1 + 0\mathbf{P}_2 = 2\mathbf{P}_1$, tehát

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(c) A sajátfelbontásban a sajátértékek nemnegatívak, a mátrix, amivel jobbról, illetve balról szorzunk ortogonális, tehát ez egyúttal szinguláris felbontás is! Így a redukált alak sorok és oszlopok törlésével azonnal adódik minden számolás nélkül:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix}$$

(d) A felbontáshoz a $\mathbf{P}_1(1,1,1) = (0,1,0)$ és a $\mathbf{P}_2(1,1,1) = (1,0,1)$ vektort kell kiszámolni, de az utóbbi el is hagyható, mert kivonva az elsőt $(1,1,1)$-ből adódik a másik is, így $(1,1,1) = (0,1,0) + (1,0,1)$.

3. Írjuk fel annak a 11×11-es mátrixnak a Jordan-féle normálalakját, melynek egyetlen sajátértéke λ, és amelyre $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^k$ rangja $k = 1,2,3,4$ esetén rendre 7, 4, 1, 0. *(2 pont)*

Megoldás. 1. megoldás:

i		1	2	3	4	
r_i		7	4	1	0	
d_i	0	4	7	10	11	
d'_i		4	3	3	1	0
d''_i		1	0	2	1	

(1.5 pont),

így a Jordan-alakban egy 1×1-es, két 3×3-es, valamint egy 4×4-es blokk van (mátrix fölírása .5 pont).

2. megoldás: Lehet az n_i számokra vonatkozó egyenletrendszerrel is számolni:

$$\begin{aligned} n_4 &= 1 \\ n_3 + 2n_4 &= 4 \\ n_2 + 2n_3 + 3n_4 &= 7 \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 &= 11 \end{aligned}$$

amiből $n_4 = 1$, $n_3 = 2$, $n_2 = 0$, $n_1 = 1$. (egyenletek + megoldás 1.5 pont, a mátrix fölírása még .5 pont).

4. Melyek irreducibilisek és melyek primitívek az alábbi mátrixok közül? *(3 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Megoldás. $\mathbf{A}$ irreducibilis és főátlójában van pozitív szám, így primitív. $\mathbf{B}$ reducibilis ({2,4}-ből nem megy ki él), tehát nem primitív. (Irreducibilitás 1-1 pont, primitívség .5-.5 pont)

5. Határozzuk meg az alábbi mátrix pszeudoinverzét! *(3 pont)*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A mátrix blokkdiagonális:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

a főátlóbeli mátrixok közül az első sorfüggetlen, a második oszlopfüggetlen, így pszeudoinverze könnyen számolható, elég e két részmátrix pszeudoinverzét számolni. Így a pszeudoinverz

$$\begin{bmatrix} 1/9 & 0 & 0 & 0 \\ 2/9 & 0 & 0 & 0 \\ 2/9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & -1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

6. Normális-e az $\mathbf{A}$ mátrix, és mennyi az 1- és a 2-normája, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Igazoljuk, hogy $\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ valós, sőt $\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} \geqslant 0$ minden $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3$ vektorra! *(4 pont)*

Megoldás. Normális, mert önadjungált (.5 pont). 1-normája 3 (.5 pont). Mivel önadjungált, sajátértékei valósak, ha azok nemnegatívak, akkor megegyeznek a szinguláris értékekkel. Valóban, karakterisztikus polinomja $x^3 - 5x^2 + 6x$, így sajátértékei: 3, 2, 0 (1 pont): 2-normája tehát 3, mert $\sigma_1 = \lambda_1 = 3$ (1 pont).

Az $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ mátrixból is számolható, csak kicsit bonyolultabb:

$$\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3i & 3 \\ -3i & 5 & -i \\ 3 & i & 5 \end{bmatrix}$$

aminek $x^3 - 13x^2 + 36x$ a karakterisztikus polinomja.

$\mathbf{A}$ unitéren diagonalizálható, mert normális, így van olyan $\mathbf{U}$, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}$, így $\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{x} = (\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{x})^{\mathsf{H}}\mathbf{\Lambda}(\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{x}) = \mathbf{y}^{\mathsf{H}}\mathbf{\Lambda}\mathbf{y} = \sum \lambda_i |y_i|^2 \geqslant 0$, ahol $\mathbf{y} = \mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{x}$.

7. Igazoljuk, hogy ha λ a valós $\mathbf{A}$ mátrix egyszeres algebrai multiplicitású valós sajátértéke, és $\mathbf{x}$ egy hozzá tartozó jobb, $\mathbf{y}$ egy bal sajátvektor, akkor a

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{x}\mathbf{y}^{\mathsf{T}}}{\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}}$$

mátrix az $\mathbf{A}$ mátrix λ-hoz tartozó sajátalterére vetít az $\mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ tér mentén. (Útmutatás: mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}$ vetítő mátrix, hogy minden vektort $\mathbf{x}$ skalárszorosába visz, és hogy $\mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ vektorait a 0-vektorba) *(5 pont)*

Megoldás. $\mathbf{P}$ vetítő mátrix, ugyanis $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$:

$$\mathbf{P}^2 = \frac{\mathbf{x}\mathbf{y}^{\mathsf{T}}}{\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}}\frac{\mathbf{x}\mathbf{y}^{\mathsf{T}}}{\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}\mathbf{y}^{\mathsf{T}}}{(\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{x})(\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{x}(\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{x})\mathbf{y}^{\mathsf{T}}}{(\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{x})(\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{x}\mathbf{y}^{\mathsf{T}}}{\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}} = \mathbf{P}$$

A sajátaltér $\mathbf{x}$ skalárszorosaiból áll, egy tetszőleges $\mathbf{v}$ vektorra pedig

$$\mathbf{P}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{x}\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{v}}{\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}} = \mathbf{x}\frac{\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{v}}{\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}} = \mathbf{x} \cdot \text{skalár},$$

tehát $\mathbf{P}$ a sajátaltérre vetít.

$\mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ vektorai $\mathbf{v} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{z} - \lambda\mathbf{z}$ alakúak valamilyen $\mathbf{z}$ vektorral, így

$$\mathbf{P}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{x}\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{z}}{\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}} - \frac{\mathbf{x}\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\lambda\mathbf{z}}{\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}} = 0,$$

ugyanis $\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{A} = \mathbf{y}^{\mathsf{T}}\lambda$.

Mivel a sajátaltér 1-dimenziós, az oszloptér $n-1$ dimenziós, így csak azt kell ellenőrizni, hogy a metszetükben csak a 0-vektor van, de ez nyilvánvaló, hisz $\mathbf{P}\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}}{\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}} = \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Így e két altér kiegészítő alterek.