INFOANALÍZIS2 3.SZIGORLAT

2016 november 18.

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
max. pontszám	10	10	10	10	10	50
elért pontszám						

NÉV
NEPTUN KÓD

1. Feladat. Határozzuk meg az f parciális deriváltjait ahol léteznek.

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2x^3 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2. Feladat. Keressük meg az adott felületnek azon pontjait, ahol az érintősík párhuzamos az adott síkkal, és írjuk fel az érintősík egyenletét ezekben a pontokban!

$$z = x^2 + y^2, \quad S : 2x + 3y - 4z = 0.$$

3. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$y'' - 5y' + 6y = 2xe^x.$$

4. Feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdeti érték problémát

$$y'' - y' - 2y = 3e^{2x},$$
$$y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.$$

5. Feladat. Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

1. Feladat. Határozzuk meg az f parciális deriváltjait ahol léteznek.

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2x^3 - y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Megoldás. Ha $(x,y) \neq (0,0)$ akkor $\boxed{\textbf{3+3p}}$

$$f'_x(x,y) = \frac{6x^2(x^2+y^2) - (2x^3-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f'_y(x,y) = \frac{-2y(x^2+y^2) - (2x^3-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Ha $(x,y) = (0,0)$ akkor $\boxed{\textbf{2+2p}}$

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x^3}{x^2}}{x} = 2,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{-\frac{y^2}{y^2}}{y} = \nexists. \quad \blacksquare$$

---

2. Feladat. Keressük meg az adott felületnek azon pontjait, ahol az érintősík párhuzamos az adott síkkal, és írjuk fel az érintősík egyenletét ezekben a pontokban!

$$z = x^2 + y^2, \quad S : 2x + 3y - 4z = 0.$$

Megoldás. Ezt a felületet tekinthetjük egy $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$ háromváltozós függvény nullához tartozó szintfelületének, így a felület (a,b,c) pontjában az érintősík normálvektorának koordinátái $f'_x(a,b,c) = 2a$ $\boxed{\textbf{1p}}$, $f'_y(a,b,c) = 2b$ $\boxed{\textbf{1p}}$, $f'_z(a,b,c) = -1$ $\boxed{\textbf{1p}}$. Az adott sík normálvektora $\mathbf{n}_S = (2,3,-4)$ $\boxed{\textbf{1p}}$.

Ha két sík párhuzamos, normálvektoraik párhuzamosak, pl. egyik a másiknak számszorosa: $2a = \tau \cdot 2$, $2b = \tau \cdot 3$, $-1 = \tau \cdot (-4)$ $\boxed{\textbf{1p}}$. Így $\tau = \frac{1}{4}$, amiből $a = \frac{1}{4}$ $\boxed{\textbf{1p}}$, $b = \frac{3}{8}$ $\boxed{\textbf{1p}}$, és $c = (\frac{1}{4})^2 + (\frac{3}{8})^2 = \frac{13}{64}$ $\boxed{\textbf{1p}}$.

Két háromdimenziós vektor párhuzamosságát úgy is ellenőrizhetjük, hogy vektoriális szorzatuk a nullvektor. $(2a, 2b, -1) \times (2,3,-4) = (-8b+3, 8a-2, 6a-4b) = (0,0,0)$, és ebből ugyancsak $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{8}$ adódik.

Az érintősík egyenlete az $(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{13}{64})$ pontban $2x + 3y - 4z = \frac{13}{16}$ $\boxed{\textbf{2p}}$. $\blacksquare$

---

3. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$y'' - 5y' + 6y = 2xe^x.$$

Megoldás. A karakterisztikus egyenlet $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Gyökei $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3.$$

A homogén egyenlet általános megoldása $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$y_p(x) = (Ax + B)e^x$$

alakban keressük.

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= (A + B)e^x + Axe^x, \\ y_p''(x) &= (2A + B)e^x + Axe^x. \end{aligned}$$

Behelyettesítve az inhomogén egyenletbe $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$(\underbrace{A - 5A + 6A}_{=2})xe^x + (\underbrace{2A + B - 5A - 5B + 6B}_{=0})e^x = 2xe^x.$$

Az egyenletrendszert megoldva $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$A = 1, \quad B = \frac{3}{2}.$$

Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$\begin{aligned} y_{iá}(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= c_1 e^x + c_2 e^x + \left(x + \frac{3}{2}\right) e^x, \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

---

4. Feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdeti érték problémát

$$y'' - y' - 2y = 3e^{2x},$$
$$y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.$$

Megoldás. A karakterisztikus egyenlet $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Gyökei $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1.$$

A homogén egyenlet általános megoldása $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}.$$

Külső rezonancia van, ezért az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$y_p(x) = Axe^{2x}$$

alakban keressük.

$$y_p'(x) = Ae^{2x} + 2Axe^{2x},$$
$$y_p''(x) = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x}.$$

Behelyettesítve az inhomogén egyenletbe $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$(\underbrace{4A - 2A - 2A}_{=0})xe^{2x} + (\underbrace{4A - A}_{=3})e^{2x} = 3e^{2x}.$$

Az egyenletrendszert megoldva $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$A = 1.$$

Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$\begin{aligned} y_{iá}(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + xe^{2x}, \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R}). \end{aligned}$$

A kezdetiérték probléma megoldása

$$y(x) = e^{2x} + 2e^{-x} + xe^{2x}. \quad \blacksquare$$

---

5. Feladat. Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Megoldás. A sor pozitív tagú, ha konvergens, akkor egyben abszolút konvergens is. A tagok hatványok szorzatai, ez a hányados, vagy a gyökkritérium alkalmazását sugallja.
Gyökkritériummal $\boxed{\mathbf{1p}}$:

$$\sqrt[n]{a_n} \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \sqrt[n]{n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n} \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} (\sqrt[n]{n})^2 \frac{2}{3} \xrightarrow[\boxed{\mathbf{2p}}]{n\to\infty} \frac{2}{3},$$

ugyanis $\sqrt[n]{n}$ 1-hez tart. Mivel $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ létezik, és kisebb mint 1 $\boxed{\mathbf{2p}}$, a sor konvergens $\boxed{\mathbf{1p}}$.
Hányadoskritériummal $\boxed{\mathbf{1p}}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \frac{(n+1)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n} \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{2}{3} \xrightarrow[\boxed{\mathbf{2p}}]{n\to\infty} \frac{2}{3},$$

ugyanis $\frac{n+1}{n}$ 1-hez tart. Mivel $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ létezik, és kisebb mint 1 $\boxed{\mathbf{2p}}$, a sor konvergens $\boxed{\mathbf{1p}}$.
