Indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat időtartama 80 perc.

1. *(12 pont)* Adja meg az $y' = \cos x \cos^2 y$ egyenlet összes megoldását!
2. *(12 pont)* Oldja meg az $y'' + 4y = \sin t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti érték problémát!
3. *(12 pont)* Számítsa ki a $v(x,y,z) = (x^3y^2 + z, -z, xy)$ függvény vonalintegrálját az x-y síkbeli, a $(0,R,0)$ pontból az $(R,0,0)$ pontba menő, origó középpontú negyedkörívre $(R > 0)$!
4. *(12 pont)* Határozza meg a $v(x,y) = (y^2e^{xy^2} + y^4, 4xy^3 + 2xye^{xy^2})$ függvény potenciálfüggvényét, ha van! Mi v vonalintegrálja az origóból az $(1,1)$ pontba menő egyenes szakasz mentén?
5. *(4+4+4 pont)* **(a)** Tekintsük azt a K körlapot, ami párhuzamos az x-y síkkal, pontjainak z koordinátája m, középpontja a z tengelyen van és sugara 2. Fejezzük ki m függvényeként a $v(r) = r$ függvény integrálját a felfelé irányított K-ra!
(b) Igazak-e az alábbi állítások? (Válaszát indokolja!)
(b1) Az $y' = \sqrt[3]{y}$ differenciálegyenletnek csak egy *olyan* megoldása van, ami teljesíti az $y(0) = 0$ feltételt.
(b2) Ha $v : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ kétszer folytonosan differenciálható, akkor $\operatorname{div}\operatorname{rot} v = 0$.
iMSc feladat. *(10 pont)* Mi $\operatorname{grad}(|r|^m \operatorname{div}(|r|^m r))$, ha $r \in \mathbf{R}^n$ és $m \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$?

1. MO. Szinguláris megoldások: $\cos y = 0 \rightsquigarrow y = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. Ezek a konstans függvények valóban megoldások. Szeparálással: $\int \frac{1}{\cos^2 y} dy = \int \cos x dx \rightsquigarrow \operatorname{tg} y = \sin x + C$. (Nincsenek más megoldások, mert a de. teljesíti a Picard–Lindelöf-tétel feltételeit.)

2. MO. (Laplace-t.-val) $s^2Y - 1 + 4Y = \frac{1}{s^2+1} \rightsquigarrow Y = \frac{1}{s^2+4} + \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{1}{s^2+4} + \frac{1}{3}\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{s^2+4} = \frac{1}{3}\frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{3}\frac{1}{s^2+1} \rightsquigarrow y(t) = \frac{1}{3}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin t$.

3. MO. Legyen a görbe G. *Vonalintegrállal.* $r(t) = (R\cos t, R\sin t, 0)$, $\dot r(t) = (-R\sin t, R\cos t, 0)$.

$$\int_G v\,dr = \int_{\pi/2}^{0} v(r(t)) \cdot \dot r(t)\,dt = \int_{\pi/2}^{0} -R^6 \cos^3 t \sin^3 t\,dt = \int_0^{\pi/2} R^6 \cos^3 t \sin t(1-\cos^2 t)\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} R^6 \cos^3 t \sin t\,dt - \int_0^{\pi/2} R^6 \cos^5 t \sin t\,dt = \frac{R^6}{4} - \frac{R^6}{6} = \frac{R^6}{12}.$$

Stokes-tétellel. A tengelyek és a görbe által határolt negyedkörlap legyen N. $\operatorname{rot} v(x,y,z) = (x+1, 1-y, -2x^3y)$. A tengelyek mentén a vektormező nulla, ezért ott az integrál is. Az $(x,y,0)$ paraméterezésben N határának megegyezés szerinti irányítása ellentétes G irányításával.

$$\int\limits_G vdr = -\int\limits_N \operatorname{rot} v\,df = -\int\limits_{N_{xy}} \begin{vmatrix} x+1 & 1-y & -2x^3y \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} dxdy = -\int\limits_{N_{xy}} -2x^3y dxdy = \int\limits_0^R \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2r^3\cos^3\varphi \cdot r\sin\varphi \cdot r d\varphi dr = \frac{R^6}{12}$$

4. MO. $\operatorname{rot} v(x,y) = 0$, és v mindenhol folytonosan differenciálható, ezért van primitívfüggvénye. $\partial x u = y^2e^{xy^2} + y^4 \rightsquigarrow u = e^{xy^2} + xy^4 + c(y)$. $\partial y u = \partial y(e^{xy^2} + xy^4 + c(y)) = 4xy^3 + 2xye^{xy^2} + c'(y) = 4xy^3 + 2xye^{xy^2}$. Innen $c(y) = C$ konstans és $u = e^{xy^2} + xy^4 + C$. Az integrál a Newton–Leibniz-tételből: $\int_{(0,0)}^{(1,1)} vdr = u(1,1) - u(0,0) = e^1 + 1 - 1 = e$.

5. MO. (a) Az $v(r) = r$ merőleges komponense a K pontjaiban: $v_\perp = m$, ezért $\int_K vdf = \int_K v_\perp d|f| = m\int_K d|f| = m \cdot |K| = 4\pi m$.
(b1) Hamis. $y \equiv 0$ megoldás, amire $y(0) = 0$. Továbbá szeparálással: $\int y^{-1/3}dy = \int dx \rightsquigarrow \frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} = x + c$. $y(x) = (\frac{2}{3}(x-1))^{\frac{3}{2}}$ ha $x \le 1, y(x) = 0$, ha $0 < x \le 1$ az 1-ben is differenciálható, így nemkonstans megoldás, amire $y(0) = 0$.
(b2) Igen. div rot $v(x_1,x_2,x_3) = \partial_{x_1}(\partial_{x_2}v_3 - \partial_{x_3}v_2) + \partial_{x_2}(-\partial_{x_1}v_3 + \partial_{x_3}v_1) + \partial_{x_3}(\partial_{x_1}v_2 - \partial_{x_2}v_1)$, amiben a tagok a Young-tétel miatt kiejtik egymást.

iMSc. MO. $r \ne 0$ esetén: div $|r|^m r = (\operatorname{grad}|r|^m)r + |r|^m \operatorname{div} r = m|r|^{m-1}\frac{r}{|r|}r + n|r|^m = (m+n)|r|^m$, és $r = 0$ esetén a nullmátrix jól lesz $m > 0$-ra derváltnak, így a divergencia 0, $\lim\limits_{r\to 0} \frac{1}{|r|}(|r|^m r - 0 - \mathbf{O}r) = 0$. Hasonlóképpen, ha $r \ne 0$, akkor $\operatorname{grad}(m+n)|r|^{2m} = 2m(m+n)|r|^{2m-1}\frac{r}{|r|} = 2m(m+n)|r|^{2m-2}r$. Ha $r = 0$, akkor a gradiensnek jó lesz a nullvektor: $\lim\limits_{r\to 0} \frac{1}{|r|}((m+n)|r|^{2m} - 0 - 0 \cdot r) = 0$.